This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Uebungen

aus der

Statik und Mechanik

der

festen Körper

für

Techniker und besonders für Architekten, Artilleristen, Ingenieure, Forst- und Bergbau-Beamte ꝛc.,

bearbeitet

von

Dr. Ephraim Salomon Unger.

861
72
Bd 1

Erste Abtheilung.

Mit drei Kupfertafeln.

Berlin,
bei J. A. List.
1831.

Einleitung.

§. 1.

Von der angewandten Mathematik überhaupt.

Bei allen Wissenschaften wird die Eintheilung in einen reinen Theil und in einen angewandten vorgefunden, indem man immer die Theorie von der Anwendung derselben auf bestimmte Gegenstände des praktischen Lebens trennt. Da nun die Mathematik als Wissenschaft unbedingt die erste Stelle einnimmt, und ihr Einfluß auf das praktische Leben sehr groß und wichtig ist, so ist es bei derselben auch vorzugsweise zweckmäßig, sie in einen reinen und einen angewandten Theil zu trennen. Die Mathematik dient ihrer Gründlichkeit wegen sowohl, als wegen der ihr eigenthümlichen strengen Methode, als ein unerreichbares Muster für alle anderen Wissenschaften: es ist nicht schwer, den Grund hiervon aufzufinden und zugleich die Frage zu beantworten, in wie fern auch den angewandten Theilen der Mathematik dieser Vorzug zukommt. Der Gegenstand der Mathematik ist nämlich die Größe, und da diese nur in Raum und Zeit vorgefunden wird, so läßt sie sich immer in einer Anschauung darstellen, und zwar in einer Anschauung, die unabhängig von aller Erfahrung ist, da Raum und Zeit aller Erfahrung vorausgehen und dieselbe erst möglich machen. Die Darstellung eines Begriffes in einer Anschauung, so daß durch sie eine allgemeine Norm für denselben gegeben wird, *nennt man die* **Construction** des

Begriffes, und die Mathematik wird daher mit Recht als di Wiſſenſchaft von der Conſtruction der Begriffe erklärt. Die ſer, von aller Erfahrung unabhängigen Conſtruction nun ver dankt ſie ihre Gründlichkeit, und durch ſie iſt die eigenthüm liche Methode der Wiſſenſchaft bedingt. Die Mathematik iſ unerſchöpflich, ſo wie die Mannichfaltigkeiten in Zeit un Raum unendlich ſind.

In der angewandten Mathematik werden Begriffe au der Erfahrung entlehnt und mathematiſch behandelt: dieſe Be griffe und die Erfahrungen, von welchen ſie abhängen un durch welche ſie ihre näheren Beſtimmungen erhalten, ſind da Gegebene, woran die mathematiſchen Unterſuchungen ſic knüpfen. Dieſe Unterſuchungen ſind immer der Evidenz fähig wie irgend ein Gegenſtand der reinen Mathematik, und nu in ſo fern die Grundlage aus der Erfahrung entnommen iſt gehören die Theile der angewandten Mathematik zu den Er fahrungswiſſenſchaften; im übrigen werden bei derſelben all der Mathematik zukommenden Vorzüge vorgefunden, und e gelingt in den meiſten Fällen, ſelbſt die Hypotheſen, welche z einer hinlänglichen Erklärung der zum Grunde liegenden Er fahrungen urſprünglich angenommen werden müſſen, zu ma thematiſchen Gewißheiten zu erheben.

Eine vollſtändige Aufzählung aller zur angewandten Ma thematik gehörigen Theile iſt nicht möglich, da die Anwen dungen überhaupt durch nichts beſchränkt ſind, und imme neue Theile entſtehen können; es kann daher auch kein genügende Eintheilung derſelben gegeben werden. Die Unter ſcheidung der angewandten Mathematik von der techniſchen wo unter der letztern die architektoniſchen und militairiſche Wiſſenſchaften, in ſo fern ſie mathematiſch ſind, verſtande werden, iſt ganz willkührlich und führt zu keinem auch nu einigermaßen intereſſanten Reſultate.

Gewöhnlich ſind die, einem Theile der angewandten Ma thematik zum Grunde liegenden Begriffe aus der Naturlehr entlehnt, und es iſt dieſes nicht blos bei den mechaniſchen optiſchen und aſtronomiſchen Wiſſenſchaften der Fall, ſonder auch bei der, erſt in neuerer Zeit ausgebildeten Kryſtallographi und Stöchiometrie; indeſſen ſind auch Gegenſtände denkbar

bei welchen dieſes nicht der Fall iſt: ſo muß z. B. unbedingt die Wahrſcheinlichkeitsrechnung, ihrem wichtigſten Theile nach, ebenfalls als zur angewandten Mathematik gehörig angeſehen werden.

§. 2.

Von den mechaniſchen Wiſſenſchaften insbeſondere.

Obgleich die Mathematik in allen ihren Anwendungen wichtig iſt, und immer zu Reſultaten führt, die einen bedeutenden Einfluß auf das praktiſche Leben haben, ſo gebührt doch den mechaniſchen Wiſſenſchaften in dieſer Beziehung ſowohl, als in ihrer Ausbildung, ohne Zweifel der erſte Rang. Während theoretiſch genommen die Mechanik das ganze Gebiet der reinen Mathematik von den erſten Elementen bis zu den feinſten Kunſtgriffen der Analyſis in Anſpruch nimmt, iſt ihr Einfluß auf Künſte und Gewerbe von je her überwiegend geweſen und wird von Tag zu Tag größer. Berückſichtigt man nun noch, daß die Aſtronomie nur mit Hülfe der in den mechaniſchen Wiſſenſchaften entwickelten Geſetze das werden konnte, was ſie jetzt iſt, und daß gerade der mechaniſche Theil derſelben der wichtigſte iſt, ſo läßt ſich der ungemeine Einfluß der mechaniſchen Wiſſenſchaften nicht verkennen, und es kann derſelben ein hoher Rang nicht blos in der angewandten Mathematik, ſondern auch im ganzen Gebiete des menſchlichen Wiſſens überhaupt, nicht ſtreitig gemacht werden.

Der Grund dieſer Wichtigkeit der mechaniſchen Wiſſenſchaften läßt ſich unmittelbar aus den Begriffen erkennen, welche die Grundlage derſelben bilden. Dieſe Begriffe ſind: Bewegung, Ruhe, und die Urſache von beiden: die Kraft; die Mechanik hat es alſo mit den erſten Functionen des Lebens der ganzen Natur überhaupt, und eines jeden einzelnen Gegenſtandes derſelben insbeſondere, ſo wie mit den Grundbedingungen dieſes Lebens zu thun: es müſſen daher die Geſetze derſelben überall ihre Anwendung finden. Da übrigens Bewegung und Ruhe ſelbſt erſt der Zeit und dem Raume für uns Bedeutung geben, ſo folgt hieraus zugleich, daß die Mechanik vorzugsweiſe nicht nur einer mathematiſchen Bearbeitung fähig ſein muß, ſondern ohne eine ſolche gar nicht

denkbar sein kann. Wirklich kommen auch die mechanischen Wissenschaften, was ihre Gründlichkeit anbelangt, der reinen Mathematik am nächsten, und einzelne Theile derselben haben dieselbe Evidenz wie die Geometrie; dieses ist z. B. bei der reinen Bewegungslehre des mathematischen Punktes der Fall.

Die Grundbegriffe der mechanischen Wissenschaften: Ruhe und Bewegung, geben unmittelbar die oberste Eintheilung derselben in die Lehre von dem Gleichgewicht und in die von der Bewegung; daher unterscheidet man die statischen Wissenschaften von den mechanischen. Die fernere Eintheilung wird nun erst von der Natur des ruhenden oder bewegten Gegenstandes, also von den Eigenthümlichkeiten des physischen Körpers abgeleitet, und es wird hierbei der verschiedene Aggregat-Zustand der Körper als Grundlage benutzt. Die Körper werden in dieser Beziehung bekanntlich unterschieden in feste, tropfbar-flüssige und elastisch-flüssige; daher unterscheidet man auch bei den mechanischen Wissenschaften zweimal drei verschiedene Theile. Diese sind:

A. Die statischen Wissenschaften, welche die Körper im Zustande des Gleichgewichts betrachten; hier unterscheidet man

1) die Statik der festen Körper oder die Statik im engern Sinne;
2) die Statik der tropfbar-flüssigen Körper, welche die Hydrostatik genannt wird, und
3) die Statik der elastisch-flüssigen Körper oder die Aerostatik.

B. Die mechanischen Wissenschaften oder die Lehre von der Bewegung; hier wird wieder unterschieden

1) die Mechanik der festen Körper oder die Mechanik im engern Sinne;
2) die Mechanik der tropfbar-flüssigen Körper, welche die Hydraulik genannt wird, und
3) die Mechanik der elastisch-flüssigen Körper oder die Pneumatik.

Außerdem unterscheidet man bei den mechanischen Wissenschaften noch einen elementaren Theil und einen höheren; den letztern nennt man Dynamik für die festen und Hy-

drodynamik für die flüssigen Körper: doch hat diese Unterscheidung keinen wesentlichen Nutzen. Die Maschinenlehre bildet übrigens einen praktischen Theil der mechanischen Wissenschaften, der gewöhnlich besonders behandelt wird.

§. 3.

Die Grundbegriffe der Mechanik.

1. Die Materie ist das Bewegliche im Raume, in so fern es einen Raum erfüllt, also allem Beweglichen widersteht, welches durch seine Bewegung in einen gewissen Raum einzudringen sich bestrebt. Der durch Materie erfüllte gegebene Raum ist der physische Körper; in einem engern Sinne wird hierunter der von der Materie erfüllte begränzte Raum verstanden, und so der physische Körper dem mathematischen entgegengesetzt. Die Menge der einen Körper bildenden Materie wird die Masse desselben genannt.

Die Grundeigenschaften der Materie, und also auch des physischen Körpers sind die Undurchdringlichkeit, Beweglichkeit und Theilbarkeit. Die Undurchdringlichkeit, wonach nicht zwei Körper zugleich denselben Raum einnehmen können, und die Beweglichkeit, folgen unmittelbar aus der von Materie gegebenen Erklärung; die Theilbarkeit aber ist eine unmittelbare Folge davon, daß Materie nur im Raume vorhanden sein kann. Worin das wahre Wesen der Materie besteht, ob sie aus zuletzt untheilbaren Atomen, oder aus einander beschränkenden Anziehungs und Zurückstoßungskräften ꝛc. zusammengesetzt sei, sind Fragen, die zur Metaphysik gehören, und daher wohl auch nie genügend werden beantwortet werden, was dem Mathematiker wenig verschlagen kann, da derselbe es nicht mit dem Grundwesen der Matrie zu thun hat, sondern mit derselben nur, in so fern sie den Sinnen wahrnehmbar ist, also in so fern sie in Raum und Zeit vorgefunden wird.

Dem physischen Körper, als dem durch Materie erfüllten begränzten Raume kommt noch die Eigenschaft zu, daß er eine bestimmte Form und also meßbare Dimensionen hat.

Die Menge der Materie, welche einen Raum erfüllt, kann größer oder kleiner sein, und es kann daher auch bei verschie-

denen Körpern von gleichem Rauminhalte die Masse verschieden sein, was dadurch ausgedrückt wird, daß man sagt: die Körper haben verschiedene Dichtigkeit; die Dichtigkeit eines Körpers ist also immer der Masse desselben proportionirt. Ein absolutes Maaß der Dichtigkeit giebt es nicht, da kein Körper als der dichteste angesehen werden kann; wohl aber giebt es ein relatives Maaß derselben, wodurch die Dichtigkeit eines Körpers in Verhältniß zu der eines andern sich bestimmen läßt, und dieses ist, wie aus No. 4. sich ergeben wird, das Gewicht der Körper.

2. Kraft ist die unbekannte Ursache der Veränderungen, die wir an den Körpern wahrnehmen, und da alle Veränderungen durch Bewegung erfolgen, so wird die Kraft auch als die Ursache einer wirklichen Bewegung oder des Bestrebens zur Bewegung, wenn diese auch nicht wirklich erfolgt, erklärt. Bewegung ist die Veränderung der äußern Verhältnisse eines Körpers zu einem gegebenen Raume, und es ist ihr entgegengesetzt die Ruhe, wodurch die beharrliche Gegenwart eines Körpers an einem bestimmten Orte bezeichnet wird. Beharrlich aber ist das, was eine Zeit hindurch dauert.

Alle Veränderungen, die wir in der Natur wahrnehmen, sind blos Wirkungen gewisser Ursachen, die selbst unmittelbar sich nicht erkennen lassen, sondern deren Dasein nur gefolgert werden kann. Die allgemeine Ursache aller Veränderungen in der Natur nun ist die Kraft, deren inneres Wesen uns eben so unbekannt ist, wie das der Materie, von der wir jedoch durch ihre Wirkung, nämlich durch die Bewegung oder durch das Bestreben zu derselben, genug wissen, um sie als die Grundlage einer mathematischen Untersuchung benutzen zu können.

Man nennt die Lage eines Körpers im Raume seinen Ort, und die Lage desselben in Beziehung zu der anderer Körper wird der relative Ort genannt, der sich dadurch bestimmen läßt, daß angegeben wird, wieviel die Entfernung desselben von anderen Körpern beträgt, deren Lage bekannt ist. Soll diese Entfernung aber richtig angegeben werden können, so muß hierbei ein bestimmter Punkt der Körper als Endpunkt derselben angenommen werden; es bezieht sich daher die Angabe des Ortes eines Körpers immer nur

auf einen bestimmten Punkt desselben, wozu sein Mittelpunkt in allen Fällen benutzt wird, wenn dieser, wie bei sphärischen Körpern, als bekannt vorausgesetzt werden kann.

Gewöhnlich wird Bewegung als Veränderung des Ortes erklärt; da der Ort aber blos ein Punkt ist, und dieser daher bei vielen Bewegungen, z. B. bei einer Axendrehung keine Veränderung erleidet, so folgt, daß diese Erklärung keinesweges genau ist: nur wenn von der Bewegung eines mathematischen Punktes die Rede ist, muß mit derselben immer eine Veränderung des Ortes verbunden sein.

Jede Veränderung muß einer Ursache als Wirkung zugeschrieben werden, und dieses führt zu dem obersten Grundsatze der mechanischen Wissenschaften, welcher lautet: *Jeder Körper beharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der Bewegung, bis dieser Zustand durch eine äußere Ursache verändert wird.* Ueberall wo also der bisherige Zustand eines Körpers geändert wird, sei es nun daß der ruhende eine Bewegung beginnt oder der bewegte in Ruhe versetzt wird, kann man mit Gewißheit folgern, daß eine einwirkende Kraft diese Veränderung veranlaßt hat. Es ist viel darüber gestritten worden, ob diese Eigenschaft der Körper *Trägheit* genannt werden kann oder nicht; doch kommt auf die Benennung hierbei wenig an, und es ist jedenfalls richtiger, wenn man diesen Satz als das *Gesetz der Beharrlichkeit* bezeichnet.

3. Werden alle Eigenschaften des Beweglichen außer Acht gelassen, so bleiben bei einer jeden Bewegung noch *Richtung* und *Geschwindigkeit* zu berücksichtigen. — Die *Richtung* ist rein geometrisch und wird durch den Weg dargestellt, welchen der Körper bei seiner Bewegung zurücklegt: und da die Bewegung eines Körpers immer auf die eines Punktes zurückgeführt wird, so ist der Weg in allen Fällen eine Linie. Ist die Linie gerade, so bleibt die Richtung des Körpers dieselbe, und sie ändert sich, sobald der Weg gebrochen wird, also von einer Linie in eine andere übergeht, die mit der erstern irgend einen Winkel bildet. Bei einer krummlinigen Bewegung wird die Richtung daher immerwährend geändert, und sie stimmt in

jedem Punkte der Curve mit der Lage der Tangente dieſes Punktes überein. Bei Bewegungen in einer geſchloſſenen Curve werden unendlich viel verſchiedene Richtungen durchlaufen: deſſen ungeachtet iſt es gebräuchlich, ſie als Bewegung nach einer unveränderlichen Richtung zu bezeichnen, indem man z. B. ſagt: der Körper bewegt ſich von Oſten nach Weſten. Doch da die Bedeutung dieſer Ausdrücke bekannt iſt, ſo kann hieraus keine Zweideutigkeit entſtehen. — Die Geſchwindigkeit wird durch den in der Zeiteinheit von einem Körper durchlaufenen Raum ausgedrückt, und es iſt, wenn man für irgend eine angenommene Zeiteinheit die ganze Zeit der Dauer einer Bewegung mit T, den in dieſer Zeit gleichförmig durchlaufenen Raum mit S und die Geſchwindigkeit mit C bezeichnet, der Ausdruck für die Geſchwindigkeit $C = \frac{S}{T}$ Legt alſo z. B. ein Körper in einer Zeit von 5 Secunden, wo eine Secunde die Zeiteinheit bildet, einen Raum von 68 Fuß gleichförmig zurück, ſo iſt die Geſchwindigkeit deſſelben $= \frac{68}{5} = 13{,}6$; nämlich ſie iſt $13\frac{2}{5}$ Fuß in der Secunde. Eine Geſchwindigkeit wird gleichförmig genannt, wenn der Körper immer in gleichen Zeiten gleiche Räume durchlauft; iſt dieſes nicht der Fall, ſo nennt man die Geſchwindigkeit ungleichförmig oder veränderlich. Die Geſchwindigkeit eines ungleichförmig bewegten Körpers in jedem Punkte ſeiner Bahn wird durch den Raum ausgedrückt, welchen der Körper von dieſem Punkt an in der nächſtfolgenden Zeiteinheit zurücklegen würde, wenn er die Geſchwindigkeit, die er in dieſem Punkte hatte, nun unverändert beibehielte.

Die Formel für die Geſchwindigkeit $C = \frac{S}{T}$ giebt unmittelbar zu erkennen, wie die Elemente einer gleichförmigen Bewegung: Raum, Zeit und Geſchwindigkeit von einander abhängen; denn iſt für einen andern Körper dieſe Formel $c = \frac{s}{t}$, ſo folgt hieraus

$$1)\ C : c = \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$$

$$2)\ S : s = CT : st$$

$$3)\ T : t = \frac{S}{C} : \frac{s}{c}$$

Die Geschwindigkeiten zweier Körper verhalten sich also direct wie die von denselben durchlaufenen Räume, und indirect wie die Zeiten, in welchen diese Räume durchlaufen werden.

Richtung und Geschwindigkeit bilden die ersten Elemente für die Bewegungslehre, und die Construction derselben zu dem Behufe einer mathematischen Behandlung geschieht ganz einfach durch eine gerade Linie, deren Lage die Richtung und deren Länge den in der Zeiteinheit durchlaufenen Raum, also die Geschwindigkeit ausdrückt.

Jede Bewegung geschieht in der Zeit und kann nur durch dieselbe bestimmt werden: die Zeit aber läßt sich selbst erst durch eine Bewegung messen. Bei der Bestimmung einer jeden Bewegung wird also eine andere gebraucht und als bekannt vorausgesetzt; ein Umstand der nicht umgangen werden kann.

4. Wirkt eine Kraft auf einen Körper, so wird dadurch immer entweder eine wirkliche Bewegung erzeugt, oder ein Bestreben zur Bewegung, die nur deswegen nicht erfolgt, weil ein hinreichend starker Widerstand dieselbe verhindert. Die Kraft äußert sich alsdann durch einen Druck, welchen der Widerstand erleidet, und die gerade Linie, nach welcher die Kraft, ohne Widerstand, den Körper bewegen würde, ist die Richtung des Druckes. Ist der Widerstand nicht stark genug, um den Druck abzuhalten, so wird durch denselben nur ein Theil der bewegenden Kraft gehemmt, und der Körper wird durch den übrigen Theil derselben wirklich bewegt. Daher muß bei jedem Drucke, wenn keine Bewegung erfolgen soll, Druck und Widerstand gleich groß sein.

Jeder Körper auf der Erde hat ein Bestreben, in einer Richtung, die verlängert durch den Mittelpunkt der Erde geht, sich zu bewegen, und kann an dieser Bewegung nur durch einen Widerstand verhindert werden, auf den er alsdann drückt. Diese auf alle Körper immerwährend wirkende Kraft wird der Anziehung der Erde zugeschrieben und die allgemeine Schwere genannt; in Folge dieser Kraft kommt jedem Körper die Eigenschaft zu, daß er schwer ist. Die Schwere eines

Körpers ist also nichts anders als das Bestreben desselben, dem Mittelpunkte der Erde so nahe als möglich zu kommen. Die Größe des Druckes aber, welchen der Widerstand erleidet, der diese Bewegung des Körpers verhindert, bildet sein Gewicht, das immer der Menge der Masse des Körpers proportionirt ist. Da nun die Masse zweier Körper von gleicher Größe mit ihrer Dichtigkeit im Verhältniß steht, so folgt, daß bei gegebener Größe auch die Dichtigkeit sich durch das Gewicht bestimmen läßt.

Die Richtung, in welcher ein nicht unterstützter Körper vermöge seiner Schwere fällt, nennt man eine Vertikale oder Senkrechte, und die Ebene, worauf diese Linie senkrecht steht, wird eine Horizontalebene genannt, so wie jede Linie, welche mit der Vertikalen einen rechten Winkel bildet, eine Horizontallinie ist.

5. Die Größe des Raumes, den ein Körper einnimmt, nennt man sein Volumen, und das Verhältniß des Gewichts eines Körpers zu dem eines andern, der mit ihm gleiches Volumen hat, drückt sein eigenthümliches oder specifisches Gewicht zu dem des andern Körpers aus. Haben hiernach die Körper A und B ein gleiches Volumen, und ist das Gewicht von A = a und von B = b, so ist, in Beziehung auf den Körper B, das eigenthümliche Gewicht von A = $\frac{a}{b}$. Wiegt z. B. ein Kubikfuß von A 414 Pfund und von B 72 Pf., so ist in Beziehung auf B das eigenthümliche Gewicht von A = $\frac{414}{72} = \frac{23}{4} = 5{,}75$.

Wiegt ein Kubikfuß von A 91 Pf. und von B 104 Pf., so ist in Beziehung auf B das eigenthümliche Gewicht des Körpers A = $\frac{91}{104} = \frac{7}{8} = 0{,}875$.

Um eine allgemeine Norm bei der Bestimmung des eigenthümlichen Gewichts der Körper zu haben, wird hierbei das des reinen Wassers = 1 angenommen, und wenn es daher z. B. heißt: das eigenthümliche Gewicht eines Körper A ist = 4,5 so wird darunter verstanden, daß eine Kubikeinheit dieses Körpers 4½ mal so viel wiegt als dieselbe Kubikeinheit Wasser.

Das Gewicht eines rheinländischen oder preußischen Kubikfußes Wasser beträgt 66 preußische Pfund, die Länge des preußischen Fußes ist = 139,13 französische Linien, und das Gewicht eines preußischen Pfundes beträgt 9728 holländische As.

§. 4.

Einfache Aufgaben und Beispiele über das eigenthümliche Gewicht der Körper.

Aufgabe 1. Es soll angegeben werden, wie das Gewicht, das Volumen und das eigenthümliche Gewicht eines Körpers von einander abhängen.

Auflösung. Setzt man das Gewicht des Körpers = P, sein Volumen = V und sein eigenthümliches Gewicht = S, wo P durch preußische Pfund und V in preußischen Kubikfuß ausgedrückt ist, so ist das Gewicht eines Kubikfußes dieses Körpers = $\frac{P}{V}$ preußische Pf.; das Gewicht eines Kubikfußes Wasser aber ist 66 Pf.; folglich ist das eigenthümliche Gewicht des Körpers in Beziehung zu dem des Wassers = $\frac{P}{V} : 66 = \frac{P}{66V}$ und es ist daher $S = \frac{P}{66V}$

Zusatz. Hieraus geht zugleich hervor, daß, wenn zwei von den drei Größen P, V und S gegeben sind, die dritte durch Rechnung gefunden werden kann. Es ist nämlich

1) $S = \frac{P}{66V}$; 2) $P = 66VS$ und 3) $V = \frac{P}{66S}$

Aufgabe 2. Man kennt von zwei verschiedenen Körpern ihr Gewicht und ihr Volumen; es soll angegeben werden, wie ihre eigenthümlichen Gewichte von einander abhängen.

Auflösung. Setzt man von den beiden Körpern A und a, ihre Gewichte P und p, ihre Volumina V und v und ihre eigenthümlichen Gewichte S und s, so ist

$$S = \frac{P}{66V} \text{ und } s = \frac{p}{66v}$$

$$\text{und daher } S : s = \frac{P}{V} : \frac{p}{v}$$

Die eigenthümlichen Gewichte verhalten sich also direkt

wie das Gewicht und umgekehrt wie das Volumen der Körper.

Zusatz. Aus der Proportion $S : s = \frac{P}{V} : \frac{p}{v}$

folgt $P : p = VS : vs$

und $V : v = \frac{P}{S} : \frac{p}{s}$

woraus sich ergiebt, wie die Gewichte zweier Körper von ihrem Volumen und eigenthümlichen Gewichte, und wie die Volumina von dem Gewichte und dem eigenthümlichen Gewichte abhängen.

Aufgabe 3. Das Gewicht eines Körpers ist = P Pf., das Pf. zu a holländ. As; das Volumen desselben ist = V Kubikfuß, und es hält der hierbei zum Grunde liegende Längenfuß l französische Linien. Es soll hieraus das eigenthümliche Gewicht dieses Körpers berechnet werden.

Auflösung. Da das preußische Pfund 9728 holländische As wiegt, und das Gewicht eines Körpers desto mehr Pf. hat, je weniger As dasselbe schwer ist, so wird

$$9728 : a = P \text{ Pf.} : X \text{ preuß. Pf.}$$

und es ist daher $X = \frac{aP}{9728}$ das Gewicht des Körpers in preuß. Pf. ausgedrückt.

Der preußische Fuß hält 139,13 Linien, also der preußische Kubikfuß $139{,}13^3$ französische Kubiklinien, während der Kubikfuß, durch welchen das Volumen des Körpers gemessen ist, l^3 solcher Linien hält. Der Inhalt des ganzen Körpers besteht also aus $V \cdot l^3$ französischen Kubiklinien, und diese, durch $139{,}13^3$ getheilt, geben den Inhalt Z desselben in preußischen Kubikfuß; nämlich es ist dieser Inhalt $= Z = \frac{V \cdot l^3}{139{,}13^3}$ Wird nun in der Formel der Aufgabe 1. für das eigenthümliche Gewicht $S = \frac{P}{66\,V}$ für P hier der Werth von X und für V der von Z gesetzt, so findet man

$$S = \frac{X}{66Z} = \frac{\frac{aP}{9728}}{66 \cdot \frac{Vl^3}{139{,}13^3}}$$

nämlich es ist

$$S = \frac{aP \cdot 139{,}13^3}{66 \cdot 9728 \cdot Vl^3} = \frac{139{,}13^3}{66 \cdot 9728} \cdot \frac{aP}{Vl^3}$$

oder weil $\frac{139{,}13^3}{66 \cdot 9728} = 4{,}19464$ so ist endlich

$$S = 4{,}19464 \cdot \frac{aP}{V \cdot l^3}$$

wo 4,19464 einen constanten Coefficienten bildet, aus dem sich, wenn man ihn in einen Kettenbruch auflöset, hinreichend genaue Näherungswerthe ableiten lassen. Diese Näherungswerthe sind der Reihe nach

$$\frac{4}{1};\ \frac{21}{5};\ \frac{151}{36};\ \frac{474}{113};\ \frac{625}{149};\ \frac{2974}{709};\ \frac{15495}{3694};\ \frac{18469}{4403}$$

und $\frac{52433}{12500}$

Zusatz. Mit Hülfe eines Kettensatzes läßt sich diese Aufgabe ebenfalls lösen, wenn man die Frage so stellt: Wie viel Kubikfuß Wasser haben das Gewicht von einem Kubikfuß der Masse? — Denn sind z. B. m Kubikfuß Wasser eben so schwer als ein Kubikfuß der Masse, so ist nothwendigerweise das eigenthümliche Gewicht derselben = m.

Der Ansatz wird hiernach:

x pr. Kubikf. Wasser	=	1 pr. Kubikf. der Masse
1	=	$139{,}13^3$ fr. Kubiklinien
l^3	=	1 Kubikfuß
V	=	P Pfund
1	=	a As
9728	=	1 pr. Pfund
66	=	1 pr. Kubikfuß.

also $x \cdot l^3 \cdot V \cdot 9728 \cdot 66 = 139{,}13^3 \cdot P \cdot a$

und man erhält hieraus

$$x = S = \frac{139{,}13^3 \cdot P \cdot a}{66 \cdot 9728 \cdot l^3 \cdot V}$$

wie oben.

Beispiele.

1. Ein Körper, der $1\frac{1}{2}$ rheinländische Kubikfuß hält, wiegt

$173\frac{1}{4}$ Pf. pr.; wie groß iſt das eigenthümliche Gewicht deſſelben?

Da $S = \frac{P}{66\,V}$ ſo iſt hier $\frac{173\frac{1}{4}}{66 \cdot 1\frac{5}{8}} = 1{,}6154.$

2. Ein Körper von $6\frac{3}{8}$ preuß. Kubikzoll wiegt $1\frac{3}{8}$ Pf. preußiſch; wie groß iſt das eigenthümliche Gewicht dieſes Körpers?

Hier iſt $P = 1\frac{3}{8}$ und weil ein Kubikfuß $= 12^3 = 1728$ Kubikzoll, ſo iſt $V = \frac{6\frac{3}{8}}{1728} = \frac{32}{5 \cdot 1728} = \frac{1}{270}$ und es iſt daher $S = \frac{1\frac{3}{8}}{66 \cdot \frac{1}{270}} = \frac{11 \cdot 270}{8 \cdot 66} = 5{,}625.$

3. Das Blei hat ein eigenthümliches Gewicht $= 11{,}31$; wieviel wiegt daher ein Stück, deſſen Größe 18 preußiſche Kubikzoll beträgt?

In dieſem Beiſpiel iſt $S = 11{,}31$ und $V = \frac{18}{1728} = \frac{1}{96}$; und da $P = 66\,VS$, ſo iſt hier

$P = 66 \cdot \frac{1}{96} \cdot 11{,}31 = 7{,}7756$ Pf. $= 7$ Pf. 24,8 Loth.

4. Wieviel preußiſche Kubikzoll beträgt die Größe von einem Stück Silber, das 140 Pf. wiegt? wenn das eigenthümliche Gewicht des Silbers $= 10{,}5$ iſt.

Hier iſt $P = 140$ und $S = 10{,}5$ und da $V = \frac{P}{66S}$ Kubikfuß $= \frac{P \cdot 1728}{66\,S}$ Kubikzoll, ſo iſt hier $V = \frac{140 \cdot 1728}{66 \cdot 10{,}5} = 349\frac{1}{11}$ Kubikzoll.

5. Der Körper A hält 140 Kubikzoll und wiegt 42 Pf. und der Körper B, deſſen Gewicht 36 Pf. beträgt, hält 175 Kubikzoll; wie verhalten ſich daher die eigenthümlichen Gewichte dieſer Körper zu einander?

Es iſt, wenn man das eigenthümliche Gewicht von $A = \alpha$, und von $B = \beta$ ſetzt,

$$\alpha : \beta = \frac{P}{V} : \frac{P}{v}$$

und daher iſt in dem gegenwärtigen Falle

$$\alpha : \beta = \frac{42}{140} : \frac{36}{175} = \frac{3}{10} : \frac{36}{175}$$

also $\alpha : \beta = 35 : 24$.

6. Ein Körper, der $3\frac{3}{8}$ hamburger Kubikfuß hält, wiegt $4\frac{1}{2}$ hamburger Centner; wie groß ist das eigenthümliche Gewicht desselben? da die Länge des hamburger Fußes 127 französische Linien beträgt und der hamburger Ctr. 112 hamburger Pf. hält, à 10080 holländ. As.

Der Ansatz dieser Aufgabe nach der Kette ist:

x pr. Kubikf. Wasser	=	1 pr. Kubikf. des Körpers
1	=	$139{,}13^3$ fr. Kubiklinien
127^3	=	1 hamb. Kubikf.
$3\frac{3}{8}$	=	$4\frac{1}{2}$ hamb. Ctr.
1	=	112 hamb. Pf.
1	=	10080 holländ. As
9728	=	1 pr. Pf.
66	=	1 pr. Kubikf. Wasser

daher ist $x = S = \frac{139{,}13^3 \cdot 4{,}5 \cdot 112 \cdot 10080}{127^3 \cdot 3{,}375 \cdot 9728 \cdot 66}$

und man findet hieraus den Werth von $S = 3{,}08248$.

7. Wieviel wiegt ein Stück Marmor von einem eigenthümlichen Gewicht = 2,84 in leipziger Gewicht? das Pfund zu 9716 As gerechnet, da der Kubikinhalt desselben $8\frac{1}{2}$ leipziger Kubikfuß beträgt; die Länge des leipziger Fußes ist = 125,2 französ. Linien.

Auch diese Aufgabe läßt sich mit Hülfe eines Kettensatzes lösen, und es ist der Ansatz:

x leipz. Pf.	=	$8\frac{1}{2}$ leipz. Kubikf. Marmor
1	=	$125{,}2^3$ fr. Kubiklinien
$139{,}13^3$	=	1 pr. Kubikf. Marmor
1	=	2,84 pr. Kubikf. Wasser
1	=	66 pr. Pf.
1	=	9728 As
9716	=	1 leipz. Pf.

daher ist $x = \frac{8{,}5 \cdot 125{,}2^3 \cdot 2{,}84 \cdot 66 \cdot 9728}{139{,}13^3 \cdot 9716}$

Das gesuchte Gewicht ist daher P = 1162,43 leipziger Pf. = 1162 Pf. $13\frac{3}{7}$ *Lth. circa.*

8. Wieviel nürnberger Kubikzoll Kupfer wiegen einen nürnberger Ctr.? das eigenthümliche Gewicht des Kupfers zu 7,788 angenommen, da der nürnberger Fuß von 12 Zoll 134,88 französische Linien hält und der nürnberger Ctr. aus 100 Pf. besteht, von welchen jedes 10608 holländische As wiegt.

Der Ansatz dieser Aufgabe nach der Kette ist:

x nürnb. Kubikz.	=	1 nürnb. Ctr. Kupfer
1	=	100 nürnb. Pf. Kupfer
1	=	10608 holländ. As Kupfer
9728	=	1 pr. Pf. Kupfer
7,788	=	1 Pf. Wasser dem Raume nach
66	=	1 pr. Kubikf.
1	=	$139{,}13^3$ fr. Kubiklinien
$134{,}88^3$	=	1 nürnb. Kubikf.
1	=	1728 nürnb. Kubikzoll

daher ist $x = \frac{100 \cdot 10608 \cdot 139{,}13^3 \cdot 1728}{9728 \cdot 7{,}788 \cdot 66 \cdot 134{,}88^3}$

Der Kubikinhalt des Kupfers ist also

$V = 402{,}35 = 402\frac{7}{20}$ nürnberger Kubikzoll.

§. 5.

Aufgaben zur Bestimmung der Abhängigkeit des eigenthümlichen Gewichts einer Mischung und der Theile derselben von einander, so wie von dem Volumen.

Aufgabe 1. Man kennt das Volumen und das eigenthümliche Gewicht mehrerer Körper; es soll hieraus das eigenthümliche Gewicht des Körpers bestimmt werden, der aus diesen zusammengesetzt ist.

Auflösung. Es sei von dem Körper

A' das Volumen $= V'$ und das eigenthümliche Gewicht $= S'$
A'' » $= V''$ » » $= S''$
A''' » $= V'''$ » » $= S'''$

ꝛc.; man bezeichne die Gewichte dieser Körper mit P', P'', P'''...; das Gewicht des zusammengesetzten Körpers setze man $= P$, sein Volumen $= V$ und sein eigenthümliches Gewicht $= S$, so ist

$P = P' + P'' + P'''...$ und $V = V' + V'' + V'''...$

Nun

Nun ist aber $P = 66VS$ und ebenso

$P' = 66V'S'$; $P'' = 66V''S''$; $P''' = 66V'''S'''$...

folglich auch $S = \frac{P}{66V} =$

$$\frac{P' + P'' + P'''...}{66(V' + V'' + V'''...)} = \frac{66V'S' + 66V''S'' + 66V'''S'''...}{66(V' + V'' + V'''...)}$$

und hieraus erhält man endlich

$$S = \frac{V'S' + V''S'' + V'''S'''...}{V' + V'' + V'''...}$$

Das eigenthümliche Gewicht einer Mischung wird also erhalten, wenn man das Volumen eines jeden Theils mit seinem eigenthümlichen Gewichte multiplicirt, und die Summe der Produkte durch die Summe des Kubikinhalts der einzelnen Theile theilt.

Zusatz. Ist das Volumen der Theile durch Kubikeinheiten ausgedrückt, von welchen jede Längeneinheit = 1 franz. Linien ist, so findet man den Inhalt von A' in preuß. Kubikfuß $= \frac{1^3}{139{,}13^3} \cdot V'$ ꝛc.; es ist also in diesem Falle $\frac{1^3}{139{,}13^3}$ ein gemeinschaftlicher Factor aller Theile des Zählers und Nenners der Formel für S, und man kann diesen Factor mithin weglassen. Folglich behält die Formel

$$S = \frac{V'S' + V''S'' + V'''S'''...}{V' + V'' + V'''...}$$

immer Gültigkeit, welche Kubikeinheit auch bei der Bestimmung des Volumens gebraucht werden mag, wenn nur bei allen Theilen dasselbe Maaß benutzt ist.

Aufgabe 2. Ein aus zwei heterogenen Theilen bestehender Körper hat ein Volumen = V und ein eigenthümliches Gewicht = S. Von dem einem Theile A' ist das Volumen = V' und das eigenthümliche Gewicht = S'; es soll hieraus das Volumen V'' und eigenthümliche Gewicht S'' des andern Theils A'' berechnet werden.

Auflösung. Es ist nach Aufgabe 1.

$$V = V' + V'' \text{ und } S = \frac{V'S' + V''S''}{V' + V''}$$

aus diesen beiden Gleichungen lassen sich nun die Werthe

von V'' und S'' leicht bestimmen. Die erste Gleichung unmittelbar

$$V'' = V - V'$$

und daher wird nun die zweite Gleichung

$$S = \frac{V'S' + (V - V')\,S''}{V' + V - V'}$$

nämlich es ist $VS = V'S' + (V - V')\,S''$, woraus

$$S'' = \frac{VS - V'S'}{V - V'}$$

Multiplicirt man also die ganze Masse mit ihrem thümlichen Gewichte, und eben so auch den einen Th dem seinigen, zieht beide Produkte von einander ab, und den Rest durch die Differenz des Kubikinhalts der Masse und des einen Theils, so giebt der Quotient t genthümliche Gewicht des andern Theils.

Zusatz. Auch hier kann, wie bei der ersten Au die Größe von V und V' durch jede beliebige, aber gemeinschaftliche Kubikeinheit ausgedrückt werden, ohn dieses einen Einfluß auf den Werth von S'' hat.

Aufgabe 3. Zwei Körper A′ und A″, deren eigen liche Gewichte S' und S'' gegeben sind, sollen in solcher tität mit einander verbunden werden, daß die Verbindu Volumen = V und ein eigenthümliches Gewicht = Wieviel muß von jedem Theile genommen werden?

Auflösung. Wird das Volumen des einen Theils und das des andern $= V''$ gesetzt, so hat man nach Aufg die Gleichungen

$$V' + V'' = V \text{ und } S = \frac{V'S' + V''S''}{V' + V''}$$

wo nun V' und V'' die gesuchten Größen sind. Die Gleichung giebt $V'' = V - V'$ und daher wird die wenn man diesen Werth setzt,

$$S = \frac{V'S' + (V - V')\,S''}{V}$$

nämlich es ist $VS = V'S' + VS'' - V'S''$

also $V(S - S'') = V'(S' - S'')$

ist $V' = \frac{V(S - S'')}{S' - S''}$,

und eben so findet man

$$V'' = \frac{V\,(S - S')}{S'' - S'} = \frac{V\,(S' - S)}{S' - S''}$$

wodurch die gesuchten Volumina beider Theile bestimmt sind.

Aufgabe 4. Ein Körper, dessen Volumen = V' und dessen eigenthümliches Gewicht = S' ist, soll mit einem andern Körper von einem eigenthümlichen Gewicht = S'' so verbunden werden, daß das eigenthümliche Gewicht der Verbindung = S wird. Welche Quantität muß von dem zweiten Körper genommen werden?

Auflösung. Wird die Quantität des zweiten Körpers = V'' und die der Verbindung = V gesetzt, so hat man in den beiden Gleichungen

$$V = V' + V'' \text{ und } S = \frac{V'S' + V''S''}{V' + V''}$$

die beiden unbekannten Größen V' und V'', und die zweite Gleichung giebt

$$V'S + V''S = V'S' + V''S''$$

es ist also

$$V''\,(S - S') = V'\,(S' - S)$$

$$\text{und daher } V'' = \frac{V'\,(S' - S)}{S - S''}$$

die Formel für die Quantität des zweiten Theils. Da nun $V = V' + V''$, so ist auch

$$V = V' + \frac{V'S' - V'S}{S - S''} = \frac{V'S' - V'S''}{S - S''}$$

nämlich es ist $V = \frac{V'\,(S' - S'')}{S - S''}$

Uebungen.

1. Das eigenthümliche Gewicht von A sei = 5,45; von B = 8,25; von C = 2,7 und von D = 0,96; nun werden $2\frac{2}{3}$ Kubikfuß von A, $3\frac{1}{2}$ von B, $4\frac{3}{4}$ von C und $2\frac{2}{4}$ Kubikfuß von D mit einander verbunden: wie groß ist das eigenthümliche Gewicht der Verbindung?

Nach Aufgabe 1. ist

$$S = \frac{V'S' + V''S'' + V'''S'''\ldots}{V' + V'' + V'''\ldots}$$

folglich ist hier das gesuchte eigenthümliche Gewicht

$$S = \frac{2\frac{3}{5}\cdot 5{,}45 + 3\frac{1}{8}\cdot 8{,}25 + 4\frac{3}{5}\cdot 2{,}7 + 2\frac{3}{4}\cdot 0{,}96}{2\frac{3}{5} + 3\frac{1}{8} + 4\frac{3}{5} + 2\frac{3}{4}} = \frac{56{,}91}{13{,}35} = 4{,}26.$$

2. Ein Körper, dessen Inhalt $123\frac{3}{5}$ Zoll beträgt, hat ein eigenthümliches Gewicht = 5,45 und es besteht derselbe aus zwei Theilen, von welchen der eine $42\frac{1}{2}$ Kubikzoll hält und ein eigenthümliches Gewicht = 3,84 hat. Wie groß ist daher das eigenthümliche Gewicht des andern Theils dieses Körpers?

Nach Aufgabe 2. ist

$$S'' = \frac{VS - V'S'}{V - V'}$$

und es ist daher in dem gegenwärtigen Fall

$$S'' = \frac{123\frac{3}{5}\cdot 5{,}45 - 42\frac{1}{2}\cdot 3{,}84}{123{,}6 - 42{,}5} = \frac{510{,}42}{81{,}1}$$

das eigenthümliche Gewicht des zweiten Theils ist also = 6,29.

3. Ein Körper, dessen eigenthümliches Gewicht = 7,2 ist, soll mit einem andern, der ein eigenthümliches Gewicht = 2,5 hat, so verbunden werden, daß die Verbindung 120 Kubikzoll beträgt, und das eigenthümliche Gewicht derselben = 5,8 ist. Wieviel Kubikzoll müssen von jedem Theile genommen werden?

Die Formeln zur Auflösung dieser Gattung von Aufgaben sind nach No. 3.

$$V' = \frac{V(S - S'')}{S' - S''} \text{ und } V'' = \frac{V(S' - S)}{S' - S''}$$

und es ist hier $V = 120$; $S = 5{,}8$; $S' = 7{,}2$ und $S'' = 2{,}5$; folglich wird

$$V' = \frac{120\,(5{,}8 - 2{,}5)}{7{,}2 - 2{,}5} = \frac{120\cdot 3{,}3}{4{,}7} = 84{,}255$$

$$\text{und } V'' = \frac{120\,(7{,}2 - 5{,}8)}{7{,}2 - 2{,}5} = \frac{120\cdot 1{,}4}{4{,}7} = 35{,}745$$

Es müssen also von dem Theile, dessen eigenthümliches Gewicht = 7,2 ist, 84,255 Kubikzoll, und von dem andern Theile, der ein eigenthümliches Gewicht = 2,5 hat, 35,745 Kubikzoll genommen werden.

4. Ein Körper, dessen Inhalt 50 Kubikzoll beträgt, und der ein eigenthümliches Gewicht = 1,84 hat, soll mit einem andern, dessen eigenthümliches Gewicht = 7,25 ist, so verbunden werden, daß das eigenthümliche Gewicht der Verbin-

dung 4,0 wird. Wieviel Kubikzoll müſſen von dem andern Körper genommen werden?

Die Formel zur Löſung dieſer Aufgabe iſt nach No. 4.

$$V'' = \frac{V'(S' - S)}{S - S''}$$

und es iſt alsdann $V = V' + V'' = \frac{V'(S' - S'')}{S - S''}$

Nun iſt hier $V' = 50$; $S' = 1{,}84$; $S'' = 7{,}25$ und $S = 4{,}00$; es wird alſo $V'' = \frac{50\,(1{,}84 - 4{,}00)}{4{,}00 - 7{,}25} = \frac{-50 \cdot 2{,}16}{-3{,}25} = 33{,}23$

und $V = \frac{50\,(1{,}84 - 7{,}25)}{4{,}00 - 7{,}25} = \frac{-50 \cdot 5{,}41}{-3{,}25} = 83{,}23$;

der zweite Theil muß alſo 33,23 Kubikzoll betragen, und die ganze Verbindung iſt alsdann 83,23 Kubikzoll.

§. 6.

Das eigenthümliche Gewicht und die Schwere mehrerer Körper und ihrer Verbindung betreffende Aufgaben.

Aufgabe 1. Es iſt das Gewicht und das eigenthümliche Gewicht mehrerer Körper gegeben; man ſoll hieraus das eigenthümliche Gewicht ihrer Verbindung beſtimmen.

Auflöſung. Setzt man

das Gew. von A' $= P'$; das ſp. Gew. $= S'$ und ſein Volum. $= V'$

„ $A'' = P''$; „ $= S''$ „ $= V''$

„ $A''' = P'''$; „ $= S'''$ „ $= V'''$

und bezeichnet mit P, S und V dieſe Größen für die aus den Körpern A', A'', A'''... entſtehende Verbindung, ſo iſt ganz allgemein $V = \frac{P}{66S}$

und es iſt daher auch

$$V' = \frac{P'}{66S'};\quad V'' = \frac{P''}{66S''};\quad V''' = \frac{P'''}{66S'''}\cdots$$

da nun nach §. 5. No. 1.

$$S = \frac{V'S' + V''S'' + V'''S'''\ldots}{V' + V'' + V'''\ldots}$$

ſo iſt auch

$$S = \frac{\frac{P'}{66} + \frac{P''}{66} + \frac{P'''}{66}\cdots}{\frac{P'}{66S'} + \frac{P''}{66S''} + \frac{P'''}{66S'''}\cdots}$$

nämlich es ist das gesuchte eigenthümliche Gewicht der Verbindung

$$S = \frac{P' + P'' + P''' \ldots}{\frac{P'}{S'} + \frac{P''}{S''} + \frac{P'''}{S'''} \ldots}$$

dasselbe wird also erhalten, wenn man die Summe der Gewichte der Theile durch die Summe der Quotienten theilt, welche entstehen, wenn man das Gewicht eines jeden Theils durch sein eigenthümliches Gewicht theilt.

Zusatz. Die hier gegebene Regel gilt immer, welche Gewichtseinheiten den Größen P', P'', P'''... auch zum Grunde liegen mögen, wenn nur alle durch dieselbe Einheit bestimmt sind.

Aufgabe 2. Man kennt von einer Verbindung und von einem Theile derselben das Gewicht und das eigenthümliche Gewicht; es sollen hieraus diese Größen für den andern Theil berechnet werden.

Auflösung. Ist das Gewicht der Verbindung $= P$, das eigenthümliche Gewicht $= S$, und setzt man diese bekannten Größen für den einen Theil $= P'$ und $= S'$, und die gesuchten für den andern $= P''$ und $= S''$, so ist nach Aufgabe 1.

$$P = P' + P'' \text{ und } S = \frac{P' + P''}{\frac{P'}{S'} + \frac{P''}{S''}}$$

woraus sich die Werthe von P'' und S'' berechnen lassen. Die erste Gleichung giebt unmittelbar $P'' = P - P'$, und die zweite wird daher

$$S = \frac{P' + P - P'}{\frac{P'}{S'} + \frac{P - P'}{S''}} = \frac{P}{\frac{P'}{S'} + \frac{P - P'}{S''}}$$

und es ist sonach $\frac{P'}{S'} + \frac{P - P'}{S''} = \frac{P}{S}$

$$\text{und } S'' \left[\frac{P}{S} - \frac{P'}{S'}\right] = P - P'$$

$$\text{folglich ist } S'' = \frac{P - P'}{\frac{P}{S} - \frac{P'}{S'}}$$

Zusatz. Nach §. 5. No. 2. ist

$$S'' = \frac{VS - V'S'}{V - V'}$$

da nun $V = \frac{P}{66S}$ und $V' = \frac{P'}{66S'}$, so erhält man, wenn diese Werthe substituirt werden, unmittelbar die obige Formel

$$S'' = \frac{P - P'}{\frac{P}{S} - \frac{P'}{S'}}$$

Aufgabe 3. Zwei Körper, deren eigenthümliche Gewichte S′ und S″ gegeben sind, sollen so mit einander verbunden werden, daß das Gewicht der Verbindung = P und das eigenthümliche Gewicht derselben = S wird. Wieviel muß der Schwere nach von jedem Körper genommen werden?

Auflösung. Es ist $P = P' + P''$ und $S = \frac{P' + P''}{\frac{P'}{S'} + \frac{P''}{S''}}$

und in diesen beiden Gleichungen sind jetzt P′ und P″ die unbekannten Größen, deren Werth durch Reduction gefunden werden kann. Da aus der erstern Gleichung folgt $P'' = P - P'$, so wird nun die zweite

$$S = \frac{P}{\frac{P'}{S'} + \frac{P - P'}{S''}}$$

und es ist sonach $S\left[\frac{P'}{S'} + \frac{P}{S''} - \frac{P'}{S''}\right] = P$

und daher auch $P'\left[\frac{1}{S'} - \frac{1}{S''}\right] = \frac{P}{S} - \frac{P}{S''}$

folglich wird $P' = P\left\{\frac{\frac{1}{S} - \frac{1}{S''}}{\frac{1}{S'} - \frac{1}{S''}}\right\}$

das Gewicht des einen Theils, und man erhält hieraus unmittelbar den Werth von P″, wenn man in dieser Formel S′ mit S″ verwechselt, und es ist sonach

$$P'' = P\left\{\frac{\frac{1}{S} - \frac{1}{S'}}{\frac{1}{S''} - \frac{1}{S'}}\right\} = P\left\{\frac{\frac{1}{S'} - \frac{1}{S}}{\frac{1}{S'} - \frac{1}{S''}}\right\}$$

Zusatz. Nach §. 5. No. 3. ist $V' = \frac{V(S - S'')}{S' - S''}$

und es läßt ſich hieraus der Werth von P′ auf folgende Art finden: da $V = \frac{P}{66S}$ und $V' = \frac{P'}{66S'}$, ſo wird, wenn man dieſe Werthe ſetzt,

$$\frac{P'}{66S'} = \frac{P}{66S}\left(\frac{S - S''}{S' - S''}\right)$$

und es iſt daher

$$P' = \frac{P\,(SS' - S'S'')}{SS' - SS''}.$$

und hieraus wird erhalten, wenn man durchgehends mit SS′S″ theilt

$$P' = P\left\{\frac{\frac{1}{S''} - \frac{1}{S}}{\frac{1}{S''} - \frac{1}{S'}}\right\} = P\left\{\frac{\frac{1}{S} - \frac{1}{S''}}{\frac{1}{S'} - \frac{1}{S''}}\right\}$$

was mit dem oben für P′ erhaltenen Werth übereinſtimmt.

Aufgabe 4. Ein Körper, deſſen Gewicht = P′ und deſſen eigenthümliches Gewicht = S′ iſt, ſoll mit einem andern von dem eigenthümlichen Gewicht = S″ ſo verbunden werden, daß das eigenthümliche Gewicht der Verbindung = S wird. Wieviel muß der Schwere nach von dem zweiten Körper genommen werden, und wieviel wiegt die Verbindung?

Auflöſung. Man ſetze das Gewicht der Verbindung = P und das des zweiten Theils = P″, ſo ſind dieſes die unbekannten Größen in den Gleichungen

$$P = P' + P'' \text{ und } S = \frac{P' + P''}{\frac{P'}{S'} + \frac{P''}{S''}}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$S\left(\frac{P'}{S'} + \frac{P''}{S''}\right) = P' + P''$$

$$\text{alſo auch } \frac{P'}{S'} + \frac{P''}{S''} = \frac{P'}{S} + \frac{P''}{S}$$

und es iſt hiernach

$$P''\left(\frac{1}{S''} - \frac{1}{S}\right) = P'\left(\frac{1}{S} - \frac{1}{S'}\right)$$

$$\text{folglich wird } P'' = P'\left\{\frac{\frac{1}{S} - \frac{1}{S'}}{\frac{1}{S''} - \frac{1}{S}}\right\}$$

welches die Formel für das Gewicht des zweiten Theils ist. Da nun $P = P' + P''$, so ist auch

$$P = P' \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{S} - \frac{1}{S'}}{\frac{1}{S''} - \frac{1}{S}} \right\}$$

nämlich es ist

$$P = P' \left\{ \frac{\frac{1}{S''} - \frac{1}{S'}}{\frac{1}{S''} - \frac{1}{S}} \right\}$$

Zusatz. Setzt man $\frac{1}{S} = s$; $\frac{1}{S'} = s'$ und $\frac{1}{S''} = s''$, so erhalten die Formeln in den hier gelösten 4 Aufgaben eine einfachere Form; nämlich man erhält für die Formel

Aufgabe 1. $$S = \frac{P' + P'' + P''' \ldots}{P's' + P''s'' + P'''s''' \ldots}$$

Aufgabe 2. $$S'' = \frac{P - P'}{Ps - P's'}$$

und aus diesen beiden Formeln folgt nun

$$s = \frac{1}{S} = \frac{P's' + P''s'' + P'''s''' \ldots}{P' + P'' + P''' \ldots}$$

und $$s'' = \frac{1}{S'} = \frac{Ps - P's'}{P - P'}$$

Ferner erhält man für die Formeln

Aufgabe 3. $$P' = P\left(\frac{s - s''}{s' - s''}\right) \text{ und } P'' = P\left(\frac{s' - s}{s' - s''}\right)$$

Aufgabe 4. $$P'' = P'\left(\frac{s - s'}{s'' - s}\right) \text{ und } P = P'\left(\frac{s'' - s'}{s'' - s}\right)$$

und so sind diese Formeln ganz denen gleich, welche bei den Aufgaben §. 5. erhalten worden sind. Man kann also durch die Formeln für das Volumen, wie sie §. 5. vorkommen, auch die Aufgaben in Beziehung auf die Gewichte lösen, wenn man überall für das eigenthümliche Gewicht Brüche einführt, welche 1 zum Zähler und das eigenthümliche Gewicht zum Nenner haben.

Uebungen.

1. Ein Stück Eichenholz von $8\frac{1}{2}$ Ctr. ist mit 50 Pf. Eisen beschlagen; es soll das eigenthümliche Gewicht dieser Verbindung angegeben werden, da das eigenthümliche Gewicht des Eichenholzes = 0,72 und das des Eisens = 8,3 ist.

Die Formel zur Auflösung dieser Aufgabe ist nach Aufgabe 1.

$$S = \frac{P' + P''}{\frac{P'}{S'} + \frac{P''}{S''}}$$

und es ist hier $P' = 8\frac{1}{2}$ Ctr. = 935 Pf., $P'' = 50$ Pf., $S' = 0{,}72$ und $S'' = 8{,}3$. Daher wird

$$S = \frac{935 + 50}{\frac{935}{0{,}72} + \frac{50}{8{,}3}} = \frac{985}{1298{,}611 + 6{,}024} = \frac{985}{1304{,}635} = 0{,}755.$$

2. Ein mit Blei ausgefüllter hohler Stein wiegt $2\frac{1}{4}$ Ctr. und hat ein eigenthümliches Gewicht = 5,4 und es beträgt das in demselben enthaltene Blei $1\frac{1}{2}$ Ctr., welches ein eigenthümliches Gewicht = 11,32 hat. Wie groß ist daher das eigenthümliche Gewicht des Steins ohne Blei?

Diese Aufgabe läßt sich mit Hülfe der Formel Aufgabe 2. lösen, nämlich es ist

$$S'' = \frac{P - P'}{\frac{P}{S} - \frac{P'}{S'}}$$

und es ist hier $P = 2\frac{1}{4}$; $P' = 1\frac{1}{2}$; $S = 5{,}4$ und $S' = 11{,}32$;

also $$S'' = \frac{2\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2}}{\frac{2\frac{1}{4}}{5{,}4} - \frac{1\frac{1}{2}}{11{,}32}} = \frac{3}{\frac{9}{5{,}4} - \frac{6}{11{,}32}} = \frac{3}{1{,}67 - 0{,}53}$$

$$= \frac{3}{1{,}14} = 2{,}63.$$

3. Zwei Körper, deren eigenthümliche Gewichte 5,4 und 1,6 sind, sollen so mit einander verbunden werden, daß die Verbindung 190 Pf. wiegt und ein eigenthümliches Gewicht = 3,2 erhält. Wieviel Pf. müssen von jedem dieser beiden Körper genommen werden?

Die Formeln zur Auflösung dieser Aufgabe sind nach Aufgabe 3.

$$P' = P\left\{\frac{\frac{1}{S}-\frac{1}{S''}}{\frac{1}{S'}-\frac{1}{S}}\right\} \text{ und } P'' = P\left\{\frac{\frac{1}{S'}-\frac{1}{S}}{\frac{1}{S'}-\frac{1}{S''}}\right\}$$

und es ist hier $P = 190$;

$S = 3{,}2$ also $\frac{1}{S} = \frac{5}{16}$; $S' = 5{,}4$ also $\frac{1}{S'} = \frac{5}{27}$ und

$S'' = 1{,}6$ also $\frac{1}{S''} = \frac{5}{8}$ Daher ist

$$P' = \frac{190\left(\frac{5}{16}-\frac{5}{8}\right)}{\frac{5}{27}-\frac{5}{8}} = \frac{-190\cdot\frac{5}{16}}{-\frac{95}{216}} = 135 \text{ Pf.}$$

$$\text{und } P'' = \frac{190\left(\frac{5}{27}-\frac{5}{16}\right)}{\frac{5}{27}-\frac{5}{8}} = \frac{-190\cdot\frac{55}{432}}{-\frac{95}{216}} = 55 \text{ Pf.}$$

Es sind also 135 Pf. von dem Körper erforderlich, dessen eigenthümliches Gewicht 1,6 beträgt, und 55 Pf. von dem, der ein eigenthümliches Gewicht = 5,4 hat.

4. Mit wieviel Kupfer muß ein Stück Kiefernholz von 300 Pf., dessen eigenthümliches Gewicht = 0,725 ist, belegt werden, wenn das eigenthümliche Gewicht der Verbindung = 1 werden soll und das des Kupfers = 8,75 ist?

Die zur Auflösung dieser Aufgabe erforderlichen Formeln sind nach Aufgabe 4.

$$P'' = P'\left\{\frac{\frac{1}{S}-\frac{1}{S'}}{\frac{1}{S''}-\frac{1}{S}}\right\} \text{ und } P = P' + P'' = P'\left\{\frac{\frac{1}{S''}-\frac{1}{S'}}{\frac{1}{S''}-\frac{1}{S}}\right\}$$

und es ist hier $P' = 300$;

$S = 1$ also $\frac{1}{S} = 1$; $S' = 0{,}725$ also $\frac{1}{S'} = \frac{40}{29} = 1{,}379$;

$S'' = 8{,}75$ also $\frac{1}{S''} = \frac{4}{35} = 0{,}114$.

Daher wird $P'' = 300\left(\frac{1-1{,}379}{0{,}114-1}\right) = \frac{300\cdot 379}{886} = 128{,}33$

und $P = 300\left(\frac{0{,}114-1{,}379}{0{,}114-1}\right) = \frac{300\cdot 1265}{886} = 428{,}33.$

Es sind also hierzu $128\frac{1}{3}$ Pf. Kupfer erforderlich.

§. 7.

Noch einige Aufgaben und Uebungen.

1. Ein Kegel besteht aus einer Masse, deren eigenthümliches Gewicht = k; seine Höhe ist = h und der Radius seiner Grundfläche = R. Man soll aus demselben, concentrisch zur Axe, einen Cylinder hinwegnehmen und den hohlen Raum durch eine Masse, die ein eigenthümliches Gewicht = c hat, ausfüllen, und zwar so, daß hierdurch das ganze Gewicht des Kegels = Q Pf. werde. Wie groß ist der hinwegzunehmende Cylinder?

Auflösung. Man setze, durch preuß. Kubikfuß ausgedrückt, das Volumen des Cylinders = X, so ist, wenn auch h und R in Fuß gegeben sind, das Volumen des ausgehöhlten Kegels $= \frac{hR^2\pi}{3} - X$. Nun ist, nach §. 4. Aufgabe 1., ganz allgemein P = 66VS preuß. Pf., folglich ist das Gewicht des ausgehöhlten Kegels $= 66\left[\frac{hR^2\pi}{3} - X\right]k$ und das des Cylinders = 66Xc. Beide zusammen aber sollen = Q sein, folglich wird

$$66\left[\frac{hR^2\pi}{3} - X\right]k + 66Xc = Q$$

und es ist daher

$$66X\,(c - k) = Q - 22hR^2\pi.$$

Hieraus erhält man unmittelbar

$$X = \frac{Q - 22hR^2\pi}{66\,(c - k)}$$

woraus zugleich hervorgeht, daß, wenn $c > k$ ist, auch $Q > 22hR^2\pi$ sein muß und umgekehrt.

2. Es giebt für jeden Kegel einen möglichst größten Cylinder, der aus demselben hinweggenommen werden kann. Innerhalb welcher Gränzen muß daher der Werth von Q liegen, für gegebene Werthe von h, R, k und c, wenn die Auflösung der obigen Aufgabe möglich sein soll?

3. Wie groß ist der Radius einer Kugel, die Q preuß. Pf. wiegt und ein eigenthümliches Gewicht = g hat?

Antw. Es ist $R = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{Q}{11g\pi}} = 0{,}1535\sqrt[3]{\frac{Q}{g}}$

4. Ein Stück mit Kupfer legirtes Gold hat ein eigenthümliches Gewicht = 16. Wie verhält sich das Kupfer zu dem Golde in dieser Masse? da das eigenthümliche Gewicht des reinen Goldes = 19,64 und das des Kupfers = 8,75 ist.

Diese Aufgabe läßt sich mit Hülfe der Formel §. 6. No. 3. lösen. Nämlich es ist

$$P' = P\left\{\frac{\frac{1}{S}-\frac{1}{S''}}{\frac{1}{S'}-\frac{1}{S''}}\right\} \text{ und } P'' = P\left\{\frac{\frac{1}{S'}-\frac{1}{S}}{\frac{1}{S'}-\frac{1}{S''}}\right\}$$

und man kann hier, weil kein Gewicht angegeben ist, P = 1 setzen. Bedeutet nun P' das Gewicht des Goldes und P'' das des Kupfers, welches die Masse enthält, so ist

$$S' = 19{,}64;\ \text{also}\ \frac{1}{S'} = 0{,}0509$$

$$S'' = 8{,}75;\ \text{also}\ \frac{1}{S''} = 0{,}1143$$

$$S = 16{,}00;\ \text{also}\ \frac{1}{S} = 0{,}0625$$

$$\text{und daher } P' = \frac{0{,}0625 - 0{,}1143}{0{,}0509 - 0{,}1134} = \frac{0{,}0518}{0{,}0634} = \frac{259}{317}$$

$$\text{und } P'' = \frac{0{,}0509 - 0{,}0625}{0{,}0509 - 0{,}1143} = \frac{0{,}0116}{0{,}0634} = \frac{58}{317}$$

Das Gold verhält sich also zu dem Kupfer wie 259 : 58 und es ist die Masse $\frac{24 \cdot 259}{317}$ karatig, nämlich sie enthält in der Mark von 24 Karat $19\frac{3}{5}$ Karat reines Gold und $4\frac{2}{5}$ Karat Kupfer.

5. Ein abgestumpfter normaler Kegel, von welchem das Verhältniß der einzelnen Dimensionen zu einander gegeben ist, soll von einer Masse construirt werden, die ein eigenthümliches Gewicht = k hat; die Schwere desselben soll Q preuß. Pf. betragen. Wie groß muß derselbe gemacht werden?

Auflösung. Setzt man den Radius der untern Fläche

$= R$, den der obern $= r$ und die Höhe $= h$, so kann $R = mh$ und $r = nh$ angenommen werden, und es sind m und n gegeben. Nun ist das Volumen

$$V = \frac{h\,(R^2 + Rr + r^2)\,\pi}{3}$$

es ist also auch $V = \frac{h^3\,(m^2 + mn + n^2)\,\pi}{3}$

und weil $P = 66VS$, so wird

$$66 \cdot \frac{h^3\,(m^2 + mn + n^2)\,\pi}{3} \cdot k = Q$$

und hieraus erhält man

$$h = \sqrt[3]{\frac{Q}{22\,(m^2 + mn + n^2)\,k\pi}}$$

wodurch die Höhe und also auch die beiden Radien der Grundflächen bestimmt sind.

6. Ein Kegel, dessen Höhe $= h$ und der einen Radius der Grundfläche $= R$ hat, besteht aus zwei Theilen, so daß ihre gemeinschaftliche Begränzungsfläche parallel zu der Grundfläche ist. Das eigenthümliche Gewicht des obern Theils, nach der Spitze des Kegels zu, ist $= a$, das des untern Theils $= b$, und beide Theile sind gleich schwer; es soll die Höhe eines jeden der beiden Theile berechnet werden.

Auflösung. Setzt man die Höhe des obern Theils $= x$, so ist das Volumen desselben $= \frac{x}{3}\left(\frac{Rx}{h}\right)^2\pi = \frac{x^3R^2\pi}{3h^2}$ und das Gewicht dieses Theils ist folglich $= 66 \cdot \frac{x^3R^2\pi}{3h^2} \cdot a$. Das Volumen des untern Theils ist $= \frac{hR^2\pi}{3} - \frac{x^3R^2\pi}{3h^2}$ und also ist hiervon das Gewicht $= 66\left[\frac{hR^2\pi}{3} - \frac{x^3R^2\pi}{3h^2}\right] b$. Da nun beide Theile ein gleiches Gewicht haben sollen, so ist die Gleichung

$$66 \cdot \frac{ax^3R^2\pi}{3h^2} = 66 \cdot \frac{bhR^2\pi}{3} - 66 \cdot \frac{bx^3R^2\pi}{3h^2}$$

und hieraus folgt $\frac{ax^3}{h^2} = bh - \frac{bx^3}{h^2}$

Es ist also auch $x^3 (a + b) = bh^3$

und daher $x = h\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a + b}\right)}$

Zusatz. Für $a = 7 \cdot b$, wenn also das eigenthümliche Gewicht des obern Theils 7 mal so groß als das des untern ist, wird $x = \frac{1}{2}h$.

Erste Abtheilung.

Die mathematische Theorie der Statik betreffende Uebungen.

Erster Abschnitt.

Von den auf einen Punkt wirkenden Kräften.

§. 8.

Von der Kraft überhaupt.

1. Die Kraft ist nach der bereits §. 3. No. 2. gegebenen Erklärung: die Ursache der Bewegung oder eines Strebens zur Bewegung, und die Größe derselben läßt sich immer aus ihrer Wirkung beurtheilen. Die Wirkung bei einer wirklichen Bewegung offenbart sich durch die Größe der bewegten Masse und durch die Geschwindigkeit, mit welcher dieselbe bewegt wird. Die Größe der bewegten Masse kann durch Gewichte, und die Geschwindigkeit durch den in der Zeiteinheit zurückgelegten Raum gemessen werden. Hierdurch bietet sich ein Mittel dar, die verhältnißmäßige Größe zweier Kräfte gegen einander zu bestimmen; diese Größe wird bloß nach der Geschwindigkeit beurtheilt, wenn durch beide Kräfte eine und dieselbe Masse bewegt wird, oder wenn man die bewegte Masse gewichtlos annimmt, die Untersuchung sich also auf die Bewegung eines mathematischen Punktes bezieht. Wird durch eine Kraft keine wirkliche Bewegung, sondern bloß ein Bestreben zu derselben erzeugt, so äußert sie sich durch einen Druck, der immer der Größe der Kraft proportionirt ist, durch welche er erzeugt wird, und es wird daher in diesem Falle die Größe der Kraft immer durch Gewichte gemessen.

Ge-

Gewicht und Geſchwindigkeit bilden daher den Maaßſtab für die Größe aller Kräfte: das erſtere bei der bloßen Beſtrebung zur Bewegung einer Maſſe, die letztere bei der wirklichen Bewegung eines mathematiſchen Punktes, und beide zuſammen, wenn eine ſchwere Maſſe bewegt wird.

2. Eine Kraft kann ſich nicht ſelbſt beſchränken, daher wird durch die Einwirkung einer Kraft immer eine Bewegung erzeugt, welche, vermöge des Geſetzes der Beharrlichkeit, fortwährend dieſelbe bleibt. Kommt alſo ein bewegter Gegenſtand in Ruhe, oder ändert ſich die Bewegung in der Art, daß ſie entweder mit einer andern Geſchwindigkeit oder in einer andern Richtung fortgeſetzt wird, ſo muß dieſes in allen Fällen der Einwirkung neuer Kräfte zugeſchrieben werden. Hieraus geht unmittelbar hervor, daß die durch eine Kraft (die nun auf den durch ſie bewegten Körper nicht weiter fortwirkt) erzeugte Bewegung gleichförmig und gradlinig ſein muß.

3. Die Wirkung einer Kraft iſt durch ihre Größe und Richtung vollkommen beſtimmt, aber von dem Angriffspunkte ganz unabhängig; ſie kann alſo in jedem Punkte ihrer Richtung wirkend gedacht werden, ohne daß hieraus ein Einfluß auf die Bewegung erfolgt. Wird z. B. ein Körper mittelſt eines Fadens fortgezogen, ſo iſt es gleichgültig, ob dieſer Faden eine größere oder geringere Länge hat ꝛc.

4. Die verhältnißmäßige Wirkung einer Kraft kann immer durch eine gerade Linie dargeſtellt werden, die durch ihre Lage die Richtung, und durch ihre Länge die Größe der Kraft ausdrückt, es mag dieſe Größe als Druck durch Gewichte, oder als Bewegung durch die Geſchwindigkeit gemeſſen werden. Dieſe Conſtruction, in ſo fern durch dieſelbe die Größe der Kraft ausgedrückt wird, erhält übrigens, wie ſich von ſelbſt verſteht, erſt in dem Falle eine beſtimmte Bedeutung, wenn ſie für mehrere Kräfte zugleich angewendet, und bei allen derſelbe Maaßſtab gebraucht wird.

5. Zwei Kräfte, die einen gleichen Druck erzeugen, oder demſelben Gegenſtande dieſelbe Geſchwindigkeit mittheilen, ſind gleich groß, und eine Kraft iſt mehreren andern gleich, wenn ſie, in Beziehung auf den erzeugten Druck oder die erzeugte

Geschwindigkeit, eben dieselbe Wirkung hervorbringt, welche von diesen zusammengenommen erzeugt wird. Eine Kraft, welche für eine oder mehrere andere zusammengenommen substituirt werden kann, ohne daß dadurch die Wirkung geändert wird, ist denselben äquipollent. Aequipollente Kräfte sind daher immer gleich groß; aber nicht umgekehrt, da gleiche Kräfte verschiedene Richtungen haben können.

6. Wirken zwei Kräfte auf einen Punkt nach einer und derselben Richtung, so wird dadurch dieselbe Bewegung oder derselbe Druck erzeugt, als wenn eine Kraft, die beiden zusammengenommen gleich ist, auf eben diesen Punkt nach eben dieser Richtung angebracht wird. Sind die Richtungen zweier auf einen Punkt wirkenden Kräfte aber entgegengesetzt, so ist ihre Wirkung der einer Kraft gleich, die in der Richtung der größern von beiden angebracht, und der Differenz beider gleich ist. Kräfte, die nach einer und derselben Richtung wirken, können also addirt werden, und wenn sie nach entgegengesetzten Richtungen wirken, kann man sie von einander subtrahiren.

7. Wirken zwei Kräfte, deren Richtungen irgend einen Winkel φ, verschieden von 180°, einschließen, zu gleicher Zeit auf einen Punkt, so wird durch die vereinte Wirkung beider immer eine gradlinige Bewegung erzeugt, deren Richtung mit der der beiden Kräfte in derselben Ebene liegt. Daß die erzeugte Bewegung gradlinig sein muß, geht daraus hervor, daß mit der Abweichung von der graden Linie immer eine Veränderung der Richtung verbunden ist, die nur durch eine neu hinzukommende Kraft erzeugt werden kann. Die Bewegung muß aber auch in der Ebene der Richtung beider Kräfte erfolgen, weil aus demselben Grunde ihre Richtung oberhalb oder unterhalb dieser Ebene sein könnte, und beides zu gleicher Zeit nicht möglich ist. Aus diesem Satze folgt, daß, wenn zwei Kräfte P und Q zugleich auf einen Punkt wirken, es immer eine einzige Kraft R giebt, die beiden zusammen äquipollent ist.

8. Wenn zwei gleich große Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen auf einen Punkt wirken, so kann keine Bewegung erfolgen, und es sind alsdann die Kräfte im Gleichgewicht. Wirken nun zwei Kräfte P und Q unter irgend einem Winkel,

und es ist ihnen R äquipollent, so ist R' mit R im Gleichgewicht, wenn R' = R ist und beide nach entgegengesetzten Richtungen wirken, daher ist in diesem Fall auch R' mit P und Q im Gleichgewicht. Gleichgewicht ist also sowohl zwischen zwei, als auch bei mehreren Kräften denkbar. Die Untersuchungen der Bedingungen, unter welchen Kräfte sich im Gleichgewicht erhalten, bilden zusammen die statischen Wissenschaften, und in so fern diese Untersuchungen sich bloß auf feste Körper beziehen, also auf solche, deren Theile nicht ohne Kraftanstrengung getrennt werden können, wird die Wissenschaft die Statik der festen Körper genannt. Uebrigens werden in diesen Theil der mechanischen Wissenschaften auch alle die Untersuchungen aufgenommen, wo Kräfte, als auf einen mathematischen Punkt wirkend, unter sich im Gleichgewicht gedacht werden.

§. 9.

Einfache Aufgaben.

1. Welche Veränderungen können bei Kräften, die im Gleichgewichte sind, vorgenommen werden, ohne daß dadurch das Gleichgewicht aufgehoben wird?

Die Bedingungen, unter welchen das Gleichgewicht nicht aufgehoben wird, sind:

a. Wenn man eine Kraft hinwegnimmt und dafür einen hinreichend festen Widerstand anbringt, der in entgegengesetzter Richtung wirkt. Der Widerstand erleidet in diesem Falle einen Druck, dessen Größe durch die weggelassene Kraft gemessen wird, und es muß derselbe also auch mit einer eben so großen Kraft widerstehen.

b. Wenn zu den im Gleichgewichte stehenden Kräften andere hinzukommen, die unter sich im Gleichgewichte sind, oder wenn man dergleichen hinwegnimmt.

c. Wenn man die im Gleichgewichte stehenden Kräfte verdoppelt oder überhaupt gleich vielfach nimmt. Sind z. B. die Kräfte P, Q und R im Gleichgewicht, so muß bei derselben Lage unter den Kräften mP, mQ und mR ebenfalls Gleichgewicht stattfinden. Eben so müssen auch gleiche Theile von im Gleichgewicht stehenden Kräften, in derselben Lage

wie diese, im Gleichgewichte sein. Bei derselben Lage, in welcher also die Kräfte P, Q und R im Gleichgewichte sind, müssen hiernach die Theile $\frac{P}{m}$, $\frac{Q}{m}$ und $\frac{R}{m}$ ebenfalls im Gleichgewichte stehen.

d. Hieraus folgt nun unmittelbar, daß, wenn P, Q und R im Gleichgewichte sind, und bei derselben Lage auch p, q und r sich im Gleichgewichte befinden, diese letztern Kräfte den erstern proportionirt sein müssen, und umgekehrt. Sind also P, Q und R, und bei derselben Lage p, q und r im Gleichgewichte, so muß

$$P : p = Q : q = R : r$$

und wenn diese Proportion statt findet, und P, Q und R sind im Gleichgewichte, so müssen p, q und r bei derselben Lage ebenfalls im Gleichgewichte sein.

2. Es soll angegeben werden, wie viele auf einen Punkt wirkende Kräfte zur Herstellung des Gleichgewichts wenigstens erforderlich sind.

Hier sind folgende Fälle zu unterscheiden:

a. Liegen die Richtungen der im Gleichgewichte stehenden Kräfte in derselben graden Linie, so sind hierzu zwei Kräfte hinreichend; sie müssen aber gleich groß sein und nach entgegengesetzten Richtungen wirken.

b. Liegen die Richtungen der Kräfte nicht in grader Linie, wohl aber in derselben Ebene, so ist Gleichgewicht unter drei Kräften möglich. Denn ist X äquipollent den beiden Kräften P und Q; hat die dritte Kraft R eine solche Lage, daß ihre Richtung der von X grade entgegengesetzt ist, und ist zugleich R = X, so stehen P, Q und R im Gleichgewicht.

c. Liegen die Richtungen der Kräfte in verschiedenen Ebenen, so sind zur Herstellung des Gleichgewichts wenigstens deren 4 erforderlich. Denn ist X äquipollent P und Q, so kann eine dritte Kraft R mit X nicht in grader Linie liegen, weil X mit P und Q in derselben Ebene liegt, in welcher nach der Voraussetzung R nicht liegen kann. X und R schließen also einen Winkel ein, und es giebt daher eine Kraft Y, welche beiden äquipollent ist; wenn nun die vierte Kraft S = Y ist, und die Richtungen beider sind entgegengesetzt, so findet

Gleichgewicht ſtatt zwiſchen S und Y, alſo auch zwiſchen S, R und X, und daher müſſen auch die Kräfte S, R, Q und P im Gleichgewichte ſein.

3. Auf einen Punkt m, Fig. 1., wirkt eine Kraft P, deren Größe und Richtung durch die Linie mp dargeſtellt wird; es ſoll die Wirkung derſelben in Beziehung auf eine beliebig durch m gezogene Abſciſſenlinie mn angegeben werden.

Zieht man von p auf mn die Normale px, ſetzt mx = x, px = y und den Winkel pmx = φ, ſo iſt, weil mp = P ſein ſoll,

$$P : x = 1 : \cos\varphi \text{ und } P : y = 1 : \sin\varphi$$

und es iſt daher $x = P\cos\varphi$ und $y = P\sin\varphi$

Zuſatz 1. Iſt mq = Q = P und $\angle qmn = \angle pmn = \varphi$, ſo iſt die Wirkung von Q der von P in Beziehung auf die Abſciſſe äquipollent; dagegen iſt die Wirkung in Beziehung auf die Ordinate zwar gleich groß, aber die Richtungen ſind entgegengeſetzt.

Zuſatz 2. Wird mr = R von einer ſolchen Größe genommen, daß der Endpunkt r in der Linie xp oder deren Verlängerung liegt, ſo iſt die Wirkung von R in Beziehung auf die Abſciſſe mn der von P äquipollent; aber in Beziehung auf die Ordinate ſind beide von verſchiedener Größe, wenn nicht p mit r zuſammenfällt.

4. Auf einen Punkt m, Fig. 1., wirken zwei gleich große Kräfte P und Q unter einem gegebenen Winkel pmq; es ſoll die Richtung der ihnen äquipollenten Kraft X angegeben werden.

Halbirt man den Winkel pmq durch mn, ſo giebt die Linie mn die Lage von X an; denn wäre mn nicht die Richtung von X, ſo müßte dieſelbe der einen Kraft P näher als der andern Q liegen, und da Q = P, ſo müßte aus demſelben Grunde auch X der Q näher als P liegen: da nun beides zugleich nicht ſtattfinden kann, ſo muß X nothwendiger Weiſe eine ſolche Lage haben, daß ſie mit P und Q gleiche Winkel bildet.

5. Die Kräfte ma = P und mb = Q, Fig. 2., wirken auf m unter einem rechten Winkel; es ſoll die Größe der ihnen äquipollenten Kraft mc = X beſtimmt werden.

Man ziehe an m die Linie de normal auf mc, ſo iſt

$\angle\alpha = \angle\gamma$ und $\angle\delta = \angle\beta$. Nimmt man nun an, daß P äquipollent ſei den beiden Kräften p in der Richtung mA und p′ in der Richtung mc; und daß Q äquipollent ſei den Kräften q und q′ in den Richtungen me und mc, ſo haben die drei Kräfte P, X und Q dieſelbe Lage gegen einander, wie die Kräfte p′, P und p, und auch wie die Kräfte q, Q und q′. Es müſſen daher (nach No. 1. d.) P, X und Q mit p′, P und p, und auch mit q, Q und q′ in demſelben Verhältniſſe ſtehen; alſo finden die Proportionen ſtatt: $P : X : Q = p' : P : p = q : Q : q'$, nämlich es iſt

$$P : X = p' : P \text{ und daher } p' = \frac{P^2}{X}$$

$$X : Q = P : p \quad » \quad p = \frac{PQ}{X}$$

$$P : X = q : Q \quad » \quad q = \frac{PQ}{X}$$

$$X : Q = Q : q' \quad » \quad q' = \frac{Q^2}{X}$$

Da nun p und p′ der P; q und q′ der Q, und P und Q der X äquipollent ſein ſollen, ſo müſſen die vier Kräfte p, p′, q und q′ ebenfalls der X äquipollent ſein. Es iſt aber $p = q = \frac{PQ}{X}$ und ſie haben die entgegengeſetzte Lage mA und me, ſtehen alſo unter ſich im Gleichgewicht und können daher weggelaſſen werden, folglich muß X auch den beiden Kräften p′ und q′ äquipollent ſein. Da nun aber p′ und q′ mit X in derſelben Richtung liegen, ſo muß $p' + q' = X$ ſein, und daher auch, wenn die obigen Werthe geſetzt werden,

$$\frac{P^2}{X} + \frac{Q^2}{X} = X$$

und hieraus folgt $P^2 + Q^2 = X^2$, alſo $X = \sqrt{(P^2 + Q^2)}$. Wirken alſo P und Q unter einem rechten Winkel, ſo iſt die denſelben äquipollente Kraft X der Hypotenuſe des rechtwinkligen Dreiecks gleich, von welchem P und Q die Katheten ſind.

§. 10.

Aufgaben zur Beſtimmung des Gleichgewichts dreier in einer Ebene auf einen Punkt wirkenden Kräfte.

Aufgabe 1. Es wirken zwei gleich große Kräfte P und

Q unter einem rechten Winkel auf einen Punkt; es ſoll die Größe und Lage einer dritten Kraft X beſtimmt werden, die mit denſelben im Gleichgewicht iſt.

Auflöſung. Da P = Q, ſo iſt die Lage einer äquipollenten Kraft X′, nach §. 9. No. 4., dadurch beſtimmt, daß die Richtung derſelben den von P und Q eingeſchloſſenen Winkel halbirt, und weil hier dieſer Winkel = 90° iſt, ſo muß, nach §. 9. No. 5., $X' = \sqrt{(P^2 + Q^2)} = \sqrt{2P^2} = P\sqrt{2}$ ſein. Beſchreibt man aber mit P = Q ein Quadrat, und zieht die Diagonale deſſelben = D, ſo iſt auch $D = P\sqrt{2}$, und es halbirt dieſelbe ebenfalls den rechten Winkel; folglich iſt D = X′ der Größe und Lage nach, und der geſuchte Werth von X iſt = X′, hat aber die entgegengeſetzte Lage. X wird alſo gefunden, wenn man das durch P = Q beſtimmte Quadrat vollendet, von dem Punkte aus, auf welchen die Kräfte wirken, eine Diagonale = D zieht, dieſelbe rückwärts verlängert, und die Verlängerung = D nimmt.

Aufgabe 2. Auf einen Punkt m, Fig. 3., wirken zwei gleich große Kräfte P = Q unter irgend einem Winkel pmq; es ſoll die Lage und Größe der ihnen äquipollenten Kraft X′ beſtimmt werden.

Auflöſung. Da P = Q, ſo erhält man, wenn der Winkel pmq durch die Linie mn halbirt wird, die Lage von X′ nach §. 9. No. 4. Nimmt man nun $nmp' = nmq' = 45°$, ſo ſind die Wirkungen von mp′ = P′ und von mq′ = Q′ auf die Abſciſſe mn dieſelben, wie die von P und Q, nach §. 9. No. 3. Zuſ. 2. Weil aber P′ und Q′ unter einem rechten Winkel wirken, ſo iſt die ihnen äquipollente in mn liegende Kraft die Diagonale des Quadrats mp′nq′; folglich iſt dieſe Diagonale auch dem geſuchten Werthe von X gleich. Zieht man aber pn und qn, ſo iſt mpnq ein Rhombus, von welchem mn ebenfalls die Diagonale iſt; es iſt alſo X′, der Größe und Lage nach, der Diagonale mn des gleichſeitigen Parallelogramms gleich, von welchem P und Q die Seiten ſind und pmq der Winkel.

Wird nun mn rückwärts über n hinaus verlängert, und man nimmt die Verlängerung X″ = X′ = mn, ſo iſt X mit P und Q im Gleichgewicht.

Zusatz. Ist eine Kraft mn = X′ gegeben, und man errichtet in dem Halbirungspunkt X derselben eine Normale p′q′, nimmt von x an auf beiden Seiten die gleichen Stücke xp = xq, und zieht nun mp = P und mq = Q, so ist P = Q und es sind die Kräfte P und Q der X′ äquipollent. Es läßt sich also jede Kraft in zwei gleich große Kräfte zerlegen, die derselben äquipollent sind.

Aufgabe 3. Zwei Kräfte P und Q von verschiedener Größe wirken auf einen Punkt m, Fig. 4., unter einem rechten Winkel; es soll die Größe und Lage der ihnen äquipollenten Kraft X′ bestimmt werden.

Auflösung. Man ziehe die Hypotenuse ab, zu derselben durch m die Linie $\alpha\beta$ parallel, halbire ab in x, ziehe mx und durch a und b die Linien aα und bβ parallel zu derselben, so ist mxaα ein gleichseitiges Viereck und ma = P die Diagonale desselben; es ist daher P äquipollent den Kräften mα = p′ und mx = p, wobei p′ = p ist. Eben so ist auch mxbβ ein gleichseitiges Viereck, und es ist daher Q den beiden gleichen Kräften mβ = q′ und mx = q äquipollent. Die Kraft X′, welche also den beiden Kräften P und Q äquipollent sein soll, muß es auch den vier Kräften p′, p, q und q′ sein. Weil aber mα = mβ, also p′ = q′ und beide entgegengesetzte Richtungen haben, so sind sie unter sich im Gleichgewicht und können außer Acht gelassen werden; also muß X′ äquipollent sein den Kräften p und q, die beide in der Richtung mx liegen und gleich groß sind: daher muß auch X′ in dieser Richtung liegen und = p + q = 2 (mx) sein. Verlängert man also mx und macht xn = xm, so ist mn = X′ der Größe und Lage nach. Es ist aber nun, wenn man an und bn zieht, ambn ein Rechteck, von welchem P und Q die Seiten sind, also ist X′ = mn die Diagonale dieses Rechtecks, der Größe und Lage nach. Daß das erstere der Fall sein muß, ist bereits §. 9. No. 4. bewiesen worden.

Wird nun mn rückwärts verlängert, und man nimmt die Verlängerung = X′, so erhält man hierdurch eine Kraft X, der Größe und Lage nach, welche mit P und Q im Gleichgewicht ist.

Zusatz. Beschreibt man über mn = X′ irgend ein recht-

nkliges Dreieck man und vollendet das hierdurch bestimmte
echteck manb, so sind die Seiten desselben ma = P und
b = Q zusammen der Kraft mn = X′ äquipollent; es
ßt sich also jede Kraft X′ in zwei äquipollente Kräfte P und
zerlegen, deren Richtungen einen rechten Winkel einschlie-
n. Für die eine derselben = P kann man jeden beliebigen
Werth < X′ annehmen, und es ist alsdann der Werth der
ndern durch die Gleichung bestimmt

$$Q = \sqrt{(X'^2 - P^2)}.$$

Aufgabe 4. Auf einen Punkt m, Fig. 5., wirken zwei
räfte P und Q unter einem beliebigen Winkel amb; es soll
ie Größe und Richtung der ihnen äquipollenten Mittelkraft
X bestimmt werden.

Auflösung. Es sei mn = X der Größe und Lage
nach, man ziehe von a und b die Normalen ap und bq auf
diese Linie und vollende die Rechtecke mpap′ und mqbq′, so
ist P äquipollent den Kräften mp = p und mp′ = p′, und
Q ist äquipollent mq = q und mq′ = q′. Da nun p und
q mit mn = X in derselben Linie liegen, so muß p + q = X sein,
und weil auch mn die Richtung der Mittelkraft sein soll, so
muß p′ = q′ sein. Die Bedingungen für das Gleichge-
wicht sind also

$$p' = q' \text{ also auch } ap = bq$$

und p + q = X, also mp + mq = mn und daher mp = qn
Wird also bn gezogen, so ist Δmpa = Δnqb, und da-
her nb = ma und ∠qnb = ∠amp; hiernach ist nb gleich
und parallel der ma, also wird, wenn man an zieht, ambn
ein Parallelogramm, von welchem mn eine Diagonale ist,
und es folgt hieraus, daß die Kraft X, welche P und Q
äquipollent sein soll, die von m aus gezogene Diagonale
des Parallelogramms ist, dessen Seiten = P und Q sind,
und das unter dem Neigungswinkel amb beider Kräfte gebil-
det ist. Diese Diagonale rückwärts verlängert und die Ver-
längerung = X gemacht, giebt hiernach eine Kraft, der Größe
und Lage nach, welche mit P und Q im Gleichgewicht ist.

Zusatz 1. Ist irgend eine Kraft mn = X gegeben und
construirt ein Parallelogramm ambn, von welchem mn
Diagonale ist, so sind die Seiten ma = P und mb = Q

deſſelben zwei Kräfte, die zuſammen der gegebenen X äquipollent ſind.

Zuſatz 2. Mit Hülfe des Parallelogramms kann man alſo zu je zwei Kräften eine dritte ihnen äquipollente Kraft finden, und es läßt ſich durch daſſelbe auch umgekehrt jede gegebene Kraft in zwei äquipollente Kräfte zerlegen. Das erſtere Verfahren nennt man das Zuſammenſetzen, und das letztere das Auflöſen der Kräfte; das Parallelogramm aber, in ſo fern man es zu dieſen Operationen benutzt, wird das Parallelogramm der Kräfte genannt.

Zuſatz 3. Wenn die Kraft X den beiden Kräften P und Q äquipollent iſt, ſo nennt man X die Mittelkraft, und P und Q ſind die dazu gehörigen Seitenkräfte.

§. 11.

Aufgabe.

Es ſoll angegeben werden, wie die Seitenkräfte A und B und die denſelben äquipollente Mittelkraft X und ihre Neigungswinkel von einander abhängen.

Auflöſung. Setzt man in dem Parallelogramm, Fig. 6, den Winkel, welchen die Mittelkraft X mit A bildet, $= \beta$, und den mit B $= \alpha$, ſo iſt $x = 180° - (\alpha + \beta)$ und es ſind A, B und X die Seiten eines Dreiecks, welchen die Winkel α, β und x gegenüber liegen; folglich hängen dieſe Größen eben ſo von einander ab, wie die Theile eines Dreiecks, und es laſſen ſich daher, wenn von den 6 Stücken A, B, X, α, β und x drei gegeben ſind, die übrigen in allen den Fällen durch Rechnung finden, in welchen es möglich iſt, aus drei gegebenen Stücken eines Dreiecks die übrigen zu berechnen. Daher iſt

$$\text{I.} \quad A : B : X = \sin\alpha : \sin\beta : \sin x$$

und mit Hülfe dieſer Proportion können die fehlenden Stücke gefunden werden, wenn entweder zwei Kräfte gegeben ſind und einer der Winkel, welchen dieſelben nicht einſchließen, oder zwei Winkel und irgend eine der drei Kräfte.

$$\text{II.} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{A \sin x}{B - A \frac{\cos x}{r}}$$

$$\text{und eben so } \operatorname{tg} x = \frac{X \sin\alpha}{B - X\frac{\cos\alpha}{r}}$$

$$\text{III. } X = \sqrt{\left(A^2 + B^2 - 2AB\frac{\cos x}{r}\right)}$$

$$\text{und } A = \sqrt{\left(X^2 + B^2 - 2BX\frac{\cos\alpha}{r}\right)}$$

nd durch diese Formeln kann man, wenn zwei Kräfte und er von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind, sowohl die übrigen beiden Winkel als auch die dritte Kraft berechnen.

$$\text{IV. } \cos x = \left(\frac{A^2 + B^2 - X^2}{2AB}\right) r$$

$$\text{und } \cos\alpha = \left(\frac{B^2 + X^2 - A^2}{2BX}\right) r$$

Formeln, mit deren Hülfe die Winkel gefunden werden können, wenn die drei Kräfte gegeben sind.

Zusatz 1. Aus der Proportion I.

$$A : B : X = \sin\alpha : \sin\beta : \sin x$$

folgt unmittelbar $B = \frac{A\sin\beta}{\sin\alpha}$ und $X = \frac{A\sin x}{\sin\alpha}$ ꝛc.

Jede Aufgabe, welche mit Hülfe dieser Proportion gelöst werden kann, führt also zu einer einfachen Rechnung, die immer durch Logarithmen leicht ausgeführt werden kann.

Zusatz 2. Die Formel II.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A\sin x}{B - A\frac{\cos x}{r}}$$

durch welche die übrigen Winkel gefunden werden, wenn zwei Kräfte gegeben sind und der von ihnen eingeschlossene Neigungswinkel, enthält statt des Winkels xmy, Fig. 6., $=(\alpha+\beta)$ seine Ergänzung zu $180^0 = x$, was nicht außer Acht gelassen werden darf, weder bei dieser Formel noch bei einer andern, wo von x eine andere Function als der Sinus vorkommt, weil dieselben in dem zweiten Quadranten das Zeichen wechseln, und für xmy = c ist daher $\cos x = \cos(180^0 - c)$ $= -\cos c$, wodurch die Formel wird

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A\sin c}{B + A\frac{\cos c}{r}}$$

Eben ſo verwandelt ſich die Formel III.

$$X = \sqrt{\left(A^2 + B^2 - 2AB\frac{\cos x}{r}\right)}$$

wenn man den wirklichen Neigungswinkel c der beiden Kräfte A und B ſtatt ſeiner Ergänzung x einführt, in

$$X = \sqrt{\left(A^2 + B^2 + 2AB\frac{\cos c}{r}\right)}$$

und es iſt auch die Formel IV.

$$\cos c = -\left(\frac{A^2 + B^2 - X^2}{2AB}\right) r$$

Zuſatz 3. Statt der Formel $tg\alpha = \frac{A \sin x}{B - A\frac{\cos x}{r}}$ kann man auch, um aus A, B und c den Winkel α zu finden, die Proportion anwenden

$$(A + B) : (A - B) = tgS : tgd$$

wo $S = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{c}{2}$, ſo daß hieraus d gefunden wird, und es iſt alsdann, wie aus der Trigonometrie bekannt iſt, für A > B,

$$\alpha = S + d \text{ und } \beta = S - d$$

Zuſatz 4. Auch die Formel $X = \sqrt{\left(A^2 + B^2 - 2AB\frac{\cos x}{r}\right)}$ läßt ſich ſo umformen, daß ſie für das Rechnen mit Logarithmen bequemer wird. Es iſt bekanntlich

$$\cos x = \frac{r^2 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}x}{r}$$

und daher auch

$$X^2 = A^2 + B^2 - 2AB\left(\frac{r^2 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}x}{r^2}\right)$$

$$= A^2 + B^2 - 2AB + \frac{4AB\sin^2\tfrac{1}{2}x}{r^2}$$

$$= (A - B)^2 + \frac{4AB\sin^2\tfrac{1}{2}x}{r^2}$$

nämlich es iſt $X^2 = \frac{(A - B)^2}{r^2}\left[r^2 + \frac{4AB\sin^2\frac{1}{2}x}{(A - B)^2}\right]$

und wenn man ſetzt $\frac{4AB\sin^2\frac{1}{2}x}{(A - B)^2} = tg^2\varphi$, wo ſich alſo der Winkel φ berechnen läßt, ſo wird

$$X^2 = \frac{(A-B)^2}{r^2}[r^2 + tg^2\varphi] = \frac{(A-B)^2 \sec^2\varphi}{r^2}$$

und weil $\sec\varphi = \frac{r^2}{\cos\varphi}$, so wird

$$X^2 = \frac{(A-B)^2 r^2}{\cos^2\varphi}$$

und daher endlich $X = \frac{(A-B)\,r}{\cos\varphi}$

Zusatz 5. Auch die Gleichung, durch welche aus den drei gegebenen Kräften ihre Neigungswinkel gefunden werden, läßt sich so umformen, daß die Formel bequem für das Rechnen mit Logarithmen wird. Nämlich es ist

$$\cos x = \frac{r^2 - 2\sin^2\frac{1}{2}x}{r}$$

Da nun $\cos x = \left(\frac{A^2 + B^2 - X^2}{2AB}\right) r$

so ist auch $r^2 - 2\sin^2\frac{1}{2}x = \left(\frac{A^2 + B^2 - X^2}{2AB}\right) r^2$

und es wird daher

$$\begin{aligned} 4AB\sin^2\tfrac{1}{2}x &= r^2\,[2AB - (A^2 + B^2 - X^2)] \\ &= r^2\,[X^2 - (A-B)^2] \\ &= r^2\,(X + A - B)\,(X + B - A) \end{aligned}$$

folglich ist $AB\sin^2\frac{1}{2}x = r^2\left(\frac{X + A - B}{2}\right)\left(\frac{X + B - A}{2}\right)$

und wenn man die halbe Summe der drei Kräfte, also $\frac{X + A + B}{2}$ mit H bezeichnet, so wird $\frac{X + A - B}{2} = H - B$

und $\frac{X + B - A}{2} = H - A$; es ist daher auch

$$AB\sin^2\tfrac{1}{2}x = r^2\,(H - A)\,(H - B)$$

und hieraus folgt $\sin\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{r^2\,(H - A)\,(H - B)}{AB}}$

Auf gleiche Weise findet man auch

$$\cos\tfrac{1}{2}x = \sqrt{\frac{r^2 H\,(H - X)}{AB}}$$

§. 12.

Aufgabe.

Auf den Punkt m, Fig. 7., wirken die drei Kräfte A, B und C, welche sich im Gleichgewicht erhalten, und es ist der

Winkel, welcher von den Richtungen der Kräfte A und
eingeschlossen wird, = c, der von A und C eingeschlossene
und der von B und C = a; man soll bestimmen, wie die s
Größen A, B, C, a, b und c von einander abhängen.

Auflösung. Wird C rückwärts verlängert, und
Verlängerung X = C genommen, so ist X äquipollent
Kräften A und B, und es ist nun die Abhängigkeit der G
ßen A, B, X, α, β und x in dem vorigen §. bestimmt w
den. Setzt man also in den dort erhaltenen Formeln für α
Werth = 180° — a; β = 180° — b, und c = 180° — x, so
kommt man die gesuchten Gleichungen; nämlich es ist nach §. 1

$$A : B : X = \sin\alpha : \sin\beta : \sin x$$

daher ist auch $A : B : C = \sin a : \sin b : \sin c$

Die drei im Gleichgewichte stehenden Kräfte verhalten sich
zu einander, wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden N
gungswinkel. Eben so lassen sich die, §. 11., gefundenen ü
gen Formeln hier anwenden. So ist z. B. nach IV.

$$\cos x = \left(\frac{A^2 + B^2 - X^2}{2AB}\right) r$$

und weil $\cos x = \cos(180^\circ - c) = -\cos c$, so ist auch

$$\cos c = -\left(\frac{A^2 + B^2 - C^2}{2AB}\right) r$$

u. s. w., u. s. w.

§. 13.

Beispiele.

1. Drei Kräfte, deren Größe 32 Pf., 40 Pf. und 45
beträgt, sollen auf einen Punkt so angebracht werden, daß
sich gegenseitig im Gleichgewicht erhalten; wie groß müs
die Neigungswinkel ihrer Richtungen angenommen werden.

Hier ist A = 32, B = 40 und C = 45, und
r = 1 ist nun

$$\cos x = -\cos c = \frac{A^2 + B^2 - C^2}{2AB} = \frac{599}{2560} = 0{,}23398$$

$$\cos\alpha = -\cos a = \frac{B^2 + C^2 - A^2}{2BC} = \frac{2601}{3600} = 0{,}72250$$

$$\cos\beta = -\cos b = \frac{A^2 + C^2 - B^2}{2AC} = \frac{1449}{2880} = 0{,}50312$$

hiernach ist $x = 76^\circ\ 28'\ 5''$; also $c = 103^\circ\ 31'\ 55''$
$\alpha = 43^\circ\ 44'\ 20''$; also $a = 136^\circ\ 15'\ 40''$
und $\beta = 59^\circ\ 47'\ 35''$; also $b = 120^\circ\ 12'\ 25''$

2. Zwei Kräfte von 40 Pf. und 80 Pf. wirken auf einen Punkt unter einem Winkel von $102^\circ\ 18'$; wie groß ist die dritte erforderliche Kraft, um das Gleichgewicht herzustellen, und in welcher Richtung muß dieselbe angebracht werden?

Setzt man hier $A = 40$ und $B = 80$, so ist $c = 180^\circ - x = 102^\circ\ 18'$ und daher $x = 77^\circ\ 42'$. Nun ist für $r = 1$

$$C = X = \sqrt{(A^2 + B^2 - 2AB\cos x)}$$

und $\cos x = \cos 77^\circ\ 42' = 0{,}2130304$

folglich ist $C = \sqrt{[40^2 + 80^2 - 2 \cdot 40 \cdot 80 \cdot 0{,}2130304]}$

$$= \sqrt{6636{,}605440} = 81{,}465$$

Will man den Werth von $C = X$ durch die Formel §. 11. Zusatz 4. berechnen, so ist

$$X = \frac{(A - B)\,r}{\cos\varphi} \text{ und } \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{4AB\sin^2\frac{1}{2}x}{(A - B)^2}$$

$$\text{also } \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin\frac{1}{2}x\sqrt{AB}}{A - B}$$

und es ist $\log AB = \log 3200 = 3{,}5051500$

$\log \sqrt{AB} = 1{,}7525750$

$\log \sin\frac{1}{2}x = \log \sin 38^\circ\ 51' = 9{,}7974640$

$\log 2 = 0{,}3010300$

$11{,}8510690$

Es ist also der Logarithmus des Zählers $= 11{,}8510690$

hiervon $\log(A - B) = \log 40 = 1{,}6020600$

bleibt $\log(-\operatorname{tg}\varphi) = 10{,}2490090$

Dazu findet man in der Tafel einen Winkel von $60^\circ\ 35'\ 35''$ und es ist daher $\varphi = 119^\circ\ 24'\ 25''$.

Da ist $\log(A - B) = \log 40 = 1{,}6020600$

$\log r = 10{,}0000000$

$11{,}6640600$

$\log \cos\varphi = 9{,}8010896$

$\log X = 0{,}9008704$

und es ist danach $X = 81{,}465$ genau mit dem obigen Werthe übereinstimmend.

Ferner ist $B + A : B - A = \operatorname{tg}S : \operatorname{tg}\delta$

$$\text{für } S = \frac{180^\circ - x}{2} = \frac{c}{2} = 51^\circ\ 9'$$

also $120 : 40 = \text{tg}\ 51^\circ 9' : \text{tg}\, d$

und es ist daher $\text{tg}\, d = \frac{1}{3}\text{tg}\ 51^\circ 9'$

Nun ist $\log \text{tg}\, 51^\circ\ 9' = 10{,}0939569$

$\log 3 = 0{,}4771213$

also ist $\log \text{tg}\, d = 9{,}6168356$

und daher $d = 22^\circ\ 28'\ 55''$

und es ist hier, weil $B > A$, auch $\beta > \alpha$, also

$\beta = S + d = 73^\circ\ 37'\ 55''$; daher $b = 106^\circ\ 22'\ 5''$

$\alpha = S - d = 28^\circ\ 40'\ 5''$; daher $a = 151^\circ\ 19'\ 55''$

die Winkel, welche die Richtung der dritten Kraft C mit den gegebenen A und B bilden muß.

Von der Richtigkeit dieser Winkel überzeugt man sich leicht mit Hülfe der Proportion

$$A : B = \sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta$$

es muß also hier $\sin\alpha : \sin\beta = 40 : 80 = 1 : 2$ sein, und wirklich findet man, daß

$$\sin 73^\circ\ 37'\ 55'' = 2 \sin 28^\circ\ 40'\ 5''$$

3. Drei an einem Punkte im Gleichgewicht stehende Kräfte haben eine solche Lage, daß ihre Richtungen die Winkel einschließen von 138° 12′; 154° 36′ und 67° 12′. Die dem letzten dieser Winkel gegenüberliegende Kraft beträgt 84 Pf. Wie groß ist jede der übrigen beiden Kräfte?

Hier ist $a = 138^\circ\ 12'$; $b = 154^\circ\ 36'$; $c = 67^\circ\ 12'$ und $C = 84$. Da nun $A : B : C = \sin a : \sin b : \sin c$

$$\text{so ist } A = \frac{C \sin a}{\sin c} = \frac{84 \sin 41^\circ\ 48'}{\sin 67^\circ\ 12'}$$

$$\text{und } B = \frac{C \sin b}{\sin c} = \frac{84 \sin 25^\circ\ 24'}{\sin 67^\circ\ 12'}$$

Nun ist $\log 84 = 1{,}9242793$	$\log 84 = 1{,}9242793$
$\log \sin 41^\circ 48' = 9{,}8238213$	$\log \sin 25^\circ 24' = 9{,}6323916$
$11{,}7481006$	$11{,}5566709$
$\log 67^\circ 12' = 9{,}9646665$	$\log 67^\circ 12' = 9{,}9646665$
folglich ist $\log A = 1{,}7834341$	und $\log B = 1{,}5920044$

und daher $A = 60{,}7343$ Pf. und $B = 39{,}0845$ Pf.

4. Zwei

4. Zwei Kräfte A und B von 64 Pf. und 90 Pf. ste-
en mit einer dritten Kraft C im Gleichgewicht, und es ist
r Winkel, welchen A und C einschließen, der also der Kraft
gegenüber liegt, = b = 113° 27′; wie groß ist die dritte
raft C, und wie groß sind die beiden übrigen Neigungs-
inkel?

Da $b = 113° 27'$, so ist $\beta = 66° 33'$ und weil

$$A : B = \sin\alpha : \sin\beta, \text{ so ist } \sin\alpha = \frac{A \sin\beta}{B}$$

Nun ist $\log\sin\beta = \log\sin 66° 33' = 9{,}9625624$

$\log A = \log 64 = 1{,}8061800$

$11{,}7687424$

$\log B = \log 90 = 1{,}9542425$

also ist $\log\sin\alpha = 9{,}8144999$

d da $B > A$, so muß auch $\beta > \alpha$ sein, und da $\beta < 90°$,
ist um so mehr auch $\alpha < 90°$; daher $\alpha = 40° 43' 16''$.

Hiernach ist $c = \alpha + \beta = 107° 16' 16''$ und $a =$
9° 16′ 44″. Endlich ist nun

$$B : C = \sin b : \sin c = \sin\beta : \sin x$$

nämlich es ist $90 : C = \sin 66° 33' : \sin 72° 43' 44''$

$$\text{und daher } C = \frac{90 \sin 72° 43' 44''}{\sin 66° 33'}$$

Da nun $\log \sin 72° 43' 44'' = 9{,}9799667$

$\log 90 = 1{,}9542425$

$11{,}9342092$

und $\log \sin 66° 33' = 9{,}9625624$

so ist $\log C = 1{,}9716468$

und daher $C = 93{,}68$.

Zusatz. Sind zwei Kräfte A und B und der Winkel b,
elcher der einen gegenüber liegt, gegeben, und ist $A > B$,
muß auch $\alpha > \beta$ und daher $a < b$ sein. Da aber in
iesem Fall β nothwendig $< 90°$ ist, und also $b > 90°$, so
leibt es ungewiß, ob α größer oder kleiner ist als 90°, und
lso auch, ob a kleiner oder größer als ein rechter Winkel ge-
ommen werden muß. Die Aufgabe ist also in diesem Fall
nbestimmt und kann selbst einen Widerspruch enthalten;
nn da

$$A : B = \sin a : \sin b, \text{ ſo iſt } \sin a = \frac{A}{B}\sin b$$

und weil $A > B$, ſo kann auch $\frac{A}{B}\sin b > r$ werden, und ſo oft dieſes der Fall iſt, kann überhaupt kein Gleichgewicht ſtatt finden.

§. 14.

Uebungen.

Aufgabe 1. Drei unter den Neigungswinkeln a, b, c wirkende, im Gleichgewicht ſtehende Kräfte A, B und C ſind zuſammen = S; es ſoll die Größe einer jeden von dieſen Kräften beſtimmt werden.

Auflöſung. Da die Kräfte unter den Winkeln a, b und c wirken, ſo ſind die Ergänzungen derſelben zu 180° welche mit α, β und γ bezeichnet werden können, die drei Winkel eines Dreiecks, die den drei Seiten A, B und C gegenüber liegen. Da nun

$$A : B : C = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

ſo iſt auch $A + B + C : A = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma : \sin\alpha$ oder, wenn man einſtweilen ſetzt $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = M$

$$S : A = M : \sin\alpha$$

und eben ſo iſt auch

$$S : B = M : \sin\beta \text{ und } S : C = M : \sin\gamma$$

es iſt daher

$$A = \frac{S\sin\alpha}{M};\ B = \frac{S\sin\beta}{M} \text{ und } C = \frac{S\sin\gamma}{M}$$

wodurch alſo die Größe der drei Kräfte beſtimmt iſt.

In dieſen Formeln iſt $M = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ und weil $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, ſo iſt $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$

$$\text{alſo auch } M = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha + \beta)$$

nämlich es iſt $M = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$= \sin\alpha(1 + \cos\beta) + \sin\beta(1 + \cos\alpha)$$

und weil allgemein $1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{1}{2}\varphi$, ſo iſt nun auch

$$M = 2\sin\alpha\cos^2\tfrac{1}{2}\beta + 2\sin\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

und da $\sin\varphi = 2\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi$, ſo wird

$$M = 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos^2\tfrac{1}{2}\beta + 4\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

nämlich es iſt

$$M = 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\,[\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta + \cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta]$$
$$= 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Da nun aber $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{180^\circ-\gamma}{2}\right) = \sin(90^\circ - \tfrac{1}{2}\gamma)$ $= \cos\tfrac{1}{2}\gamma$, so ist endlich

$M = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma$.

Hiernach lassen sich die obigen Formeln auch auf folgende Art ausdrücken: Es ist

$$A = \frac{S\sin\alpha}{M} = \frac{S\cdot 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha}{4\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma} = \frac{S\sin\tfrac{1}{2}\alpha}{2\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma}$$

und eben so ist

$$B = \frac{S\sin\tfrac{1}{2}\beta}{2\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\gamma} \text{ und } C = \frac{S\sin\tfrac{1}{2}\gamma}{2\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta}$$

Beispiel. Die Summe der drei Kräfte sei $= 458\frac{3}{4}$ Pf. $= 458{,}75$ und die drei Neigungswinkel sollen sein $a = 154^\circ 48'$; $b = 66^\circ 32'$ und $c = 138^\circ 40'$; so findet man

$A = 97{,}491$; $B = 210{,}038$ und $C = 151{,}221$.

Aufgabe 2. Von drei im Gleichgewichte stehenden Kräften kennt man die Summe der ersten und dritten $= M$, die Summe der zweiten und dritten $= N$ und den Winkel, welchen die Richtungen der ersten und zweiten einschließen, $= c$; es soll hieraus die Größe der einzelnen Kräfte berechnet werden.

Auflösung. Bezeichnet man, wie gewöhnlich, die drei Kräfte mit A, B und C, so ist $\gamma = 180^\circ - c$ der Winkel, welcher der Seite C in dem Dreieck, von welchem A, B und C die Seiten sind, gegenüberliegt, und es ist außer γ von diesem Dreiecke noch gegeben $A + C = M$ und $B + C = N$. Für $C = x$ wird also $A = M - x$ und $B = N - x$. Nun ist aber für $r = 1$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma$$

also wird auch $x^2 = (M-x)^2 + (N-x)^2 - 2(M-x)(N-x)\cos\gamma$ nämlich es ist $x^2 = M^2 + N^2 - 2(M+N)x + 2x^2 - 2MN\cos\gamma$ $+ 2(M+N)x\cos\gamma - 2x^2\cos\gamma$

Setzt man nun $M^2 + N^2 - 2MN\cos\gamma = P^2$, als das Quadrat der dritten Seite des Dreiecks, in welchem die gegebenen Seiten M und N den bekannten Winkel γ einschließen, so wird

$x^2 = P^2 + 2x^2 - 2x^2\cos\gamma - 2(M + N)(1 - \cos\gamma)$

Hierdurch erhält man nun

$x^2(1 - 2\cos\gamma) - 2(M + N)(1 - \cos\gamma)\,x = -P^2$

eine quadratische Gleichung, aus welcher der Werth von x sich berechnen läßt. Geometrisch läßt sich indessen diese Aufgabe einfacher auf folgende Art lösen: Man beschreibe unter dem gegebenen Winkel γ das Dreieck $a\gamma b$, Fig. 8, so daß $\gamma b = M$ und $\gamma a = N$, nehme von beliebiger Größe am = bn, ziehe durch m zu ab eine Parallele und schneide dieselbe von n aus mit einem Radius ne = nb. Zieht man nun von b durch e die be, welche γa in α schneidet, und zieht nun $\alpha\beta$ parallel zu en, so ist $\gamma\beta = A$, $\gamma\alpha = B$ und $\alpha\beta = C$. Die Richtigkeit dieser Construction läßt sich auf folgende Art einsehen: Man ziehe ed parallel zu ma, so ist in dem Viereck denb, welchem $ab\beta\alpha$ ähnlich ist, de = en = nb, und es muß daher auch $ae = \alpha\beta = \beta b$ sein, folglich ist $\gamma\alpha + \alpha\beta = \gamma a = N$, $\gamma\beta + \beta\alpha = \gamma b = M$ und $\alpha\beta = x = C$.

Aufgabe 3. Es soll eine gegebene Kraft = C in zwei Kräfte zerlegt werden, die derselben äquipollent sind, deren Summe = S ist und deren Richtungen einen Winkel = c einschließen.

Auflösung. Hier ist $\gamma = 180° - c$ der Winkel eines Dreiecks, von welchem man die Grundlinie C und die Summe der beiden übrigen Seiten = S = A + B kennt. Wird also die eine dieser Seiten = x gesetzt, so ist die andere = S − x, und es ist nun, nach §. 11. No. 4.,

$$\frac{x^2 + (S - x)^2 - C^2}{2x(S - x)} = \cos\gamma$$

eine Gleichung, aus welcher sich der Werth von x auf folgende Art bestimmen läßt: Es ist

$$2x^2 + S^2 - 2Sx - C^2 = (2Sx - 2x^2)\cos\gamma$$

und daher wird

$$2x^2(1 + \cos\gamma) - 2Sx(1 + \cos\gamma) = C^2 - S^2$$

und weil $1 + \cos\gamma = 2\cos^2\frac{1}{2}\gamma$, so wird

$$4x^2\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma - 4Sx\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma = C^2 - S^2$$

Wird nun $2x\cos\frac{1}{2}\gamma = z$ gesetzt, so erhält man

$$z^2 - 2Sz\cos\tfrac{1}{2}\gamma = C^2 - S^2$$

und daher $(z - S\cos\frac{1}{2}\gamma)^2 = C^2 - S^2 + S^2\cos^2\frac{1}{2}\gamma$

$$= C^2 - S^2(1 - \cos^2\tfrac{1}{2}\gamma) = C^2 - S^2\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma$$

nämlich es ist

$$(z - S\cos\tfrac{1}{2}\gamma)^2 = C^2\left[1 - \frac{S^2\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma}{C^2}\right]$$

und setzt man nun $\frac{S\sin\frac{1}{2}\gamma}{C} = \sin\varphi$, so wird

$$(z - S\cos\tfrac{1}{2}\gamma)^2 = C^2\,(1 - \sin^2\varphi) = C^2\cos^2\varphi$$

folglich ist $z - S\cos\frac{1}{2}\gamma = \pm C\cos\varphi$

und daher $z = S\cos\frac{1}{2}\gamma \pm C\cos\varphi$

also auch $2x\cos\frac{1}{2}\gamma = S\cos\frac{1}{2}\gamma \pm C\cos\varphi$

und sonach $x = \frac{1}{2}S \pm \frac{C\cos\varphi}{2\cos\frac{1}{2}\gamma}$

wodurch A und B zu gleicher Zeit gefunden werden.

Aufgabe 4. Es ist ein Dreieck abc, Fig. 9., gegeben; man soll in demselben einen Punkt x so bestimmen, daß, wenn von diesem Punkt aus die Linien xa, xb, xc an die Ecken a, b, c gezogen werden, die drei Kräfte, deren Größe und Lage durch diese drei Linien bestimmt ist, im Gleichgewichte sind.

Auflösung. Da xa und xb mit xc im Gleichgewichte sein sollen und, wenn man das durch axb bestimmte Parallelogramm axbe vollendet und die Diagonale xe zieht, diese den Kräften xa und xb äquipollent ist, so muß auch xe mit xc im Gleichgewichte sein; es liegen daher cx und xe in gerader Linie und es ist cx = xe. In dem Parallelogramm axbe halbiren sich die Diagonalen ab und xe, folglich ist ad = db und $xd = de = \frac{xe}{2} = \frac{cx}{2} = \frac{cd}{3}$. Der gesuchte Punkt x wird also gefunden, wenn man die eine Seite ab des Dreiecks in d halbirt, cd zieht und dx = ⅓(cd) nimmt.

Die Abhängigkeit der Werthe der drei Kräfte xa = a, xb = b und xc = c von den drei Seiten des Dreiecks bc = A, ac = B und ab = C läßt sich nun algebraisch auf folgende Art ausdrücken: Wenn man in einem Dreieck acb eine Linie cd von einer Spitze c an den Halbirungspunkt d der gegenüberliegenden Seite ab zieht, so ist, wie bekannt,

$$(ac)^2 + (bc)^2 = 2(cd)^2 + 2(ad)^2$$

Da nun $cd = 1\frac{1}{2} \times cx = \frac{3}{2}(cx)$, so ist auch

$$B^2 + A^2 = 2\left(\frac{3(cx)}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{ab}{2}\right)^2$$

nämlich es iſt

$$B^2 + A^2 = 2\cdot\frac{9c^2}{4} + 2\cdot\frac{C^2}{4}$$

und daher $2A^2 + 2B^2 - C^2 = 9c^2$

folglich iſt die Größe der einen Kraft c durch die Gleichung beſtimmt

$$c^2 = \frac{2A^2 + 2B^2 - C^2}{9}$$

Eben ſo findet man auch für die beiden übrigen Kräfte

$$a^2 = \frac{2B^2 + 2C^2 - A^2}{9}$$

$$\text{und } b^2 = \frac{2A^2 + 2C^2 - B^2}{9}$$

Durch Addition ergiebt ſich hieraus

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{3}$$

Die Summe der Quadrate der drei im Gleichgewicht ſtehenden Kräfte iſt alſo dem dritten Theile der Summe der Quadrate der drei Seiten des Dreiecks gleich.

Aufgabe 5. Man ſoll in dem Dreieck abc, Fig. 9, den Punkt x ſo beſtimmen, daß durch die drei Kräfte xa, xb und xc eine Mittelkraft = p nach der Richtung xc erzeugt wird.

Auflöſung. Vollendet man das durch axb beſtimmte Parallelogramm axbe, ſo iſt xe äquipollent den Kräften xa und xb, und es muß nun, vermöge der Bedingungen der Aufgabe, xc mit xc eine Kraft = p in der Richtung xc erzeugen, folglich muß xc − xe = p ſein,

Da nun dx = dc, ſo folgt auch xc − 2(xd) = p und weil xc = cd − xd, ſo muß auch

$$cd - 3(xd) = p$$

ſein, und daher, wenn man cd = d ſetzt,

$$\frac{d - p}{3} = (xd)$$

Die Lage von x wird alſo gefunden, wenn man ab in d halbirt, cd = d zieht und nun $dx = \frac{d - p}{3}$ nimmt.

Der Werth von cx = c ergiebt ſich durch folgende Gleichung: Es iſt

$$c = d - (xd) = d - \frac{d-p}{3} = \frac{2d+p}{3}$$

und weil, wenn hier wieder die drei Seiten des Dreiecks mit A, B und C bezeichnet werden,

$$2d^2 + 2\left(\frac{C}{2}\right)^2 = A^2 + B^2$$

$$\text{alſo } 4d^2 + C^2 = 2A^2 + 2B^2$$

und daher $2d = \sqrt{(2A^2 + 2B^2 - C^2)}$, ſo wird

$$c = \frac{p + \sqrt{(2A^2 + 2B^2 - C^2)}}{3}$$

Ferner iſt $(ax)^2 + (bx)^2 = 2(ad)^2 + 2(dx)^2$

folglich auch $a^2 + b^2 = 2\left(\frac{C}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{d-p}{3}\right)^2$

nämlich es iſt $a^2+b^2=\frac{C^2}{2}+\frac{2(d^2-2dp+p^2)}{9}=\frac{9C^2+4(d-p)^2}{18}$

Addirt man hierzu noch $c^2 = \left(\frac{2d+p}{3}\right)^2 = \frac{(2d+p)^2}{9}$

ſo wird $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{9C^2 + 4(d-p)^2 + 2(2d+p)^2}{18}$

nämlich es iſt $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3C^2 + 4d^2 + 2p^2}{6}$

und weil $4d^2 = 2A^2 + 2B^2 - C^2$, ſo wird

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2 + p^2}{3}$$

Auch läßt ſich der Werth von xa = a und xb = b jeder beſonders beſtimmen. Setzt man nämlich den Winkel adx = φ, ſo iſt in dem Dreieck adc

$$\cos\varphi = \frac{(da)^2 + (dc)^2 - (ac)^2}{2(da)(dc)}$$

und in dem Dreieck adx iſt

$$\cos\varphi = \frac{(da)^2 + (dx)^2 - (ax)^2}{2(da)(dx)}$$

folglich iſt auch

$$\frac{(da)^2 + (dc)^2 - (ac)^2}{(dc)} = \frac{(da)^2 + (dx)^2 - (ax)^2}{(dx)}$$

nämlich es iſt, wenn man die Werthe ſetzt

$$\frac{(\frac{1}{2}C)^2 + d^2 - B^2}{d} = \frac{(\frac{1}{2}C)^2 + (dx)^2 - a^2}{(dx)}$$

alſo weil $dx = \frac{d-p}{3}$

$$\frac{d-p}{3}\left[\frac{C^2}{4} + d^2 - B^2\right] = d\left[\frac{C^2}{4} + \left(\frac{d-p}{3}\right)^2 - a^2\right].$$

eine Gleichung, aus welcher durch Reduction ſich leicht der Werth von a^2 beſtimmen läßt, und man kann ebenſo den Werth von b^2 finden, wenn man A ſtatt B in dieſer Gleichung ſetzt.

Aufgabe 6. Es iſt ein Viereck abcd, Fig. 10., gegeben; man ſoll in demſelben einen Punkt x beſtimmen, ſo daß, wenn von dieſem Punkte an die Ecken der Figur die Linien xa, xb, xc und xd gezogen werden, dieſe Linien vier Kräfte der Größe und Lage nach ausdrücken, welche ſich gegenſeitig im Gleichgewicht erhalten.

Auflöſung. Den Kräften xa = a und xb = b iſt eine Kraft äquipollent, welche die von x aus gezogene Diagonale des durch axb beſtimmten Parallelogramms bildet; halbirt man alſo ab in α, ſo iſt $x\alpha$ die Lage und $2(x\alpha)$ die Größe der Kraft, welche a und b äquipollent iſt. Eben ſo iſt auch, wenn man cd in γ halbirt und $x\gamma$ zieht, dieſe Linie die Lage der Kraft, welche äquipollent iſt xc = c und xd = d, und die Größe derſelben iſt = $2(x\gamma)$. Sollen nun die vier Kräfte a, b, c und d im Gleichgewichte ſein, ſo muß $2(x\alpha)$ mit $2(x\gamma)$ ebenfalls im Gleichgewichte ſtehen, es muß daher $x\alpha = x\gamma$ ſein, und beide müſſen in gerader Linie liegen. Halbirt man alſo ab in α und cd in γ, zieht $\alpha\gamma$ und halbirt dieſelbe in x, ſo iſt dadurch der geſuchte Punkt gefunden, welchem die Eigenſchaft zukommt, daß durch ihn die vier Kräfte a, b, c und d unter ſich im Gleichgewichte ſind.

Wird ad in δ und bc in β halbirt und man zieht $\beta\delta$, ſo halbiren ſich die Linien $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$ in x, was bereits daraus hervorgeht, daß $\alpha\beta\gamma\delta$ ein Parallelogramm ſein muß, von welchem $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$ die Diagonalen ſind. Es iſt alſo der geſuchte Punkt x der Punkt, in welchem die beiden Linien $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$, durch die die Halbirungspunkte der gegenüberliegenden Seiten des Vierecks verbunden werden, ſich ſchneiden.

Zusatz 1. Setzt man $a\alpha = \alpha b = A$; $b\beta = \beta c = B$; $= \gamma d = C$; $d\delta = \delta a = D$; $x\alpha = x\gamma = m$ und $x\beta = n$, so ist, weil in dem Dreieck axb die Linie $x\alpha$ die undlinie ab halbirt

$$(ax)^2 + (bx)^2 = 2(a\alpha)^2 + 2(x\alpha)^2$$

d ähnliche Gleichungen werden für die Dreiecke bxc, cxd d dxa ebenfalls gefunden; in

Δaxb ist folglich $a^2 + b^2 = 2A^2 + 2m^2 = I$

Δbxc " $b^2 + c^2 = 2B^2 + 2n^2 = II$

Δcxd " $c^2 + d^2 = 2C^2 + 2m^2 = III$

Δdxa " $d^2 + a^2 = 2D^2 + 2n^2 = IV$

Nun ist $I - II = IV - III = a^2 - c^2$

o ist auch

$(A^2 + 2m^2) - (2B^2 + 2n^2) = (2D^2 + 2n^2) - (2C^2 + 2m^2)$,

und daher $A^2 - B^2 + C^2 - D^2 = 2n^2 - 2m^2$

folglich ist $n^2 = \frac{A^2 - B^2 + C^2 - D^2 + 2m^2}{2}$

aus hervorgeht, wie die eine Halbirungslinie $\beta\delta$ von der ern $\alpha\gamma$ und den 4 Seiten des Vierecks abhängt.

Zusatz 2. Werden, Zusatz 1., die Gleichungen I und III ist, so erhält man

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(A^2 + C^2 + 2m^2)$$

aus hervorgeht, daß die Summe der Quadrate der vier im Gleichgewicht erhaltenden Kräfte a, b, c und d durch einander gegenüber liegende Seiten des Vierecks und inie, welche ihre Halbirungspunkte verbindet, bestimmt ist.

Aufgabe 7. Es ist ein Fünfeck abcde, Fig. 11., ge; man soll in demselben den Punkt x so bestimmen, daß dadurch ihrer Größe und Lage nach gegebenen 5 Kräfte = a, xb = b, xc = c, xd = d und xe = e im Gleichchte sind.

Auflösung. Halbirt man ab in α, so ist $x\alpha$ die Lage $2(x\alpha)$ die Größe der den Kräften a und b äquipollenMittelkraft, und eben so ist, wenn man cd in β halbirt, ie Lage und $2(x\beta)$ die Größe der Mittelkraft, welche c d äquipollent ist. Wird also $\alpha\beta$ gezogen und in γ hals ist $x\gamma$ die Lage und $4(x\gamma)$ die Größe der Kraft, welche ollent ist $2(x\alpha)$ und $2(x\beta)$, und daher ist $4(x\gamma)$ auch

den Kräften a, b, c und d äquipollent. Sollen nun dieſe 4 Kräfte mit e im Gleichgewichte ſein, ſo muß auch zwiſchen $xe = e$ und $4(x\gamma)$ Gleichgewicht ſtatt finden: hieraus folgt, daß $e = (xe) = 4(x\gamma)$ ſein und mit derſelben in grader Linie liegen muß. Der geſuchte Punkt x wird alſo gefunden, wenn man ab in α und cd in β halbirt, α mit β verbindet, dieſe Linie in γ halbirt, $e\gamma$ zieht und auf dieſer Linie $ex = \frac{4}{5}(e\gamma)$ nimmt.

Die Abhängigkeit der 5 im Gleichgewicht ſtehenden Kräfte a, b, c, d, e von den Seiten des Fünfecks und den Linien, welche die Halbirungspunkte derſelben verbinden, läßt ſich auf folgende Art ausdrücken: Man ſetze $ab = 2A$, $bc = 2B$, $cd = 2C$, $de = 2D$ und $ea = 2E$; ferner die Verbindungslinie, welche den Halbirungspunkt von 2A mit dem von 2C, alſo mit Ueberſpringung von 2B, verbindet, $= 2\beta$; die Verbindungslinie der Mittelpunkte von 2B und 2D $= 2\gamma$ und ſo die folgenden 2δ, 2ε und 2α. Nun iſt

$(xa)^2+(xb)^2 = 2(a\alpha)^2+2(x\alpha)^2$ alſo $a^2+b^2 = 2A^2+2(x\alpha)^2$

$(xc)^2+(xd)^2 = 2(c\beta)^2+2(x\beta)^2$ alſo $c^2+d^2 = 2C^2+2(x\beta)^2$

alſo iſt auch $a^2+b^2+c^2+d^2 = 2A^2+2C^2+2(x\alpha)^2+2(x\beta)^2$

und weil in dem Dreieck $\alpha x\beta$ die Grundlinie $\alpha\beta = 2\beta$ durch $x\gamma$ halbirt wird, ſo iſt

$$(x\alpha)^2 + (x\beta)^2 = 2(\alpha\gamma)^2 + 2(x\gamma)^2$$

nämlich es iſt $(x\alpha)^2 + (x\beta)^2 = 2\beta^2 + 2\left(\frac{ex}{4}\right)^2 = 2\beta^2 + \frac{e^2}{8}$

und daher $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2A^2 + 2C^2 + 4\beta^2 + \frac{e^2}{4}$

und man erhält ähnliche Relationen für je 4 unmittelbar aufeinander folgende Kräfte, woraus die 5 Gleichungen entſtehen

1. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2A^2 + 2C^2 + 4\beta^2 + \frac{e^2}{4}$
2. $b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 2B^2 + 2D^2 + 4\gamma^2 + \frac{a^2}{4}$
3. $c^2 + d^2 + e^2 + a^2 = 2C^2 + 2E^2 + 4\delta^2 + \frac{b^2}{4}$
4. $d^2 + e^2 + a^2 + b^2 = 2D^2 + 2A^2 + 4\varepsilon^2 + \frac{c^2}{4}$
5. $e^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 2E^2 + 2B^2 + 4\alpha^2 + \frac{d^2}{4}$

und dieſe geben durch Addition

$$4(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2) = 4(A^2+B^2+C^2+D^2+E^2) + 4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2) + \tfrac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)$$

hiernach iſt

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = \tfrac{16}{15}[(A^2+B^2+C^2+D^2+E^2) + (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)].$$

Zuſatz. Die Auflöſungen der beiden letzten Aufgaben geben zu erkennen, daß für jedes beliebige gradlinige Vieleck der Punkt x gefunden werden kann, welchem die Eigenſchaft zukommt, daß die von dieſem Punkte an alle Ecken der Figur gezogenen Linien eben ſo viele Kräfte der Größe und Lage nach ausdrücken, die unter ſich im Gleichgewichte ſind. Die Lage von x läßt ſich in jedem Falle durch eine einfache Conſtruction ermitteln, und für die Summe der Quadrate der Kräfte erhält man einen einfachen Ausdruck, deſſen Form aus den bereits gelöſten Aufgaben allgemein gefunden werden kann.

Aufgabe 8. Man ſoll in einem n Eck einen Punkt x von der Art angeben, daß die, durch die von x an die Ecken der Figur gezogenen Linien, beſtimmten Kräfte zuſammen einer Kraft äquipollent ſind, welche der einen dieſer Linien gleich iſt.

Auflöſung. Iſt abcde, Fig. 11., das gegebene Vieleck, und ſollen die Kräfte zuſammen der xe äquipollent ſein, ſo läßt man die Ecke e weg und ſucht für das (n — 1)Eck abcd einen Punkt von der Art, daß die durch daſſelben in der Figur beſtimmten Kräfte im Gleichgewichte ſind, und das Verlangte iſt geſchehen.

Aufgabe 9. In dem Viereck abcd, Fig. 12., ſoll ein Punkt x ſo beſtimmt werden, daß die durch die Linien xa = a, xb = b, xc = c und xd = d ihrer Größe und Lage nach gegebenen Kräfte zuſammen einer gegebenen Kraft p in der Richtung xd gleich ſind.

Auflöſung. Die Kräfte a und d ſind zuſammen einer Mittelkraft äquipollent, deren Richtung mit xα zuſammenfällt, wenn man ad in α halbirt, und die Größe derſelben iſt = 2(xα); eben ſo iſt, wenn man bc in β halbirt, xβ die Richtung und 2(xβ) die Größe der Mittelkraft, welche den beiden Kräften b und c äquipollent iſt. Wird nun αβ gezogen und in m halbirt, ſo ſind xα und xβ äquipollent einer Kraft = 2(xm)

in der Richtung dieſer Linie; folglich ſind die Kräfte a, b, c und d äquipollent einer Kraft in der Richtung xm, welche $= 4(xm)$ iſt. Da nun dieſe 4 Kräfte äquipollent ſein ſollen einer Kraft p in der Richtung xd, ſo muß xm mit xd in grader Linie liegen, und es muß $4(xm) = p$, alſo $\frac{1}{4}p = (xm)$ ſein. Der geſuchte Punkt x wird alſo gefunden, wenn man die gegenüberliegenden Seiten ad und bc in α und β halbirt, die Linie $\alpha\beta$ zieht, dieſe in m halbirt, d mit m verbindet und die Verlängerung mx derſelben $= \frac{1}{4}p$ nimmt.

Setzt man $ad = 2A$, $bc = 2C$ und $\alpha\beta = 2m$, alſo $a\alpha = A$, $b\beta = C$ und $m\alpha = m$, ſo iſt

$$a^2 + d^2 = 2A^2 + 2(x\alpha)^2$$
$$c^2 + b^2 = 2C^2 + 2(x\beta)^2$$

alſo $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2A^2 + 2C^2 + 2[(x\alpha)^2 + (x\beta)^2]$.

Da nun $(x\alpha)^2 + (x\beta)^2 = 2(m\alpha)^2 + 2(xm)^2$

$$= 2m^2 + 2\left(\frac{p}{4}\right)^2$$

ſo wird $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2A^2 + 2C^2 + 4m^2 + \frac{p^2}{4}$

Aufgabe 10. In einem Dreieck abc, Fig. 12., ſoll ein Punkt x ſo beſtimmt werden, daß die Kräfte $xa = a$, $xb = b$ und $xc = c$ zuſammen eine Mittelkraft $= p$ geben, deren Richtung durch einen beſtimmten Punkt d geht.

Auflöſung. Zieht man ad und cd, und ſucht nun den Punkt x für die 4 Kräfte a, b, c und $xd = d$, ſo muß, weil hier eine Kraft d mehr benutzt wird, die in der Richtung xd erzeugte Mittelkraft $= d + p$ werden, folglich wird, nach Aufgabe 9.,

$$(xm) = \frac{p + d}{4}$$

Nun iſt $dm = g$ bekannt, alſo wird, wenn man $xm = x$ ſetzt, $d - g = x$; und man erhält die Gleichung

$$x = \frac{p + g + x}{4}$$

woraus folgt $x = \frac{p + g}{3} = (xm)$

und hierdurch iſt die Aufgabe gelöſt.

§. 15.

Das Zusammensetzen der Kräfte.

Aufgabe. Es sind mehrere, auf einen Punkt m in einer Ebene wirkende Kräfte $mA = A$, $mB = B$, $mC = C$, $mD = D$, $mE = E$ ꝛc., Fig. 13., gegeben; man soll die denselben äquipollente Mittelkraft ihrer Größe und Lage nach bestimmen.

Auflösung 1. Man vollende das durch $mA = A$, $mB = B$ und $\angle AmB$ bestimmte Parallelogramm $AmBB'$ und ziehe die Diagonale $mB' = B'$, so ist B' äquipollent den Kräften A und B. Wird nun das durch $mB' = B'$, $mC = C$ und $\angle B'mC$ bestimmmte Parallelogramm $B'mCC'$ entworfen und die Diagonale $mC' = C'$ gezogen, so ist C' äquipollent den Kräften B' und C. Eben so ist in dem Parallelogramm $C'mDD'$ die Diagonale $mD' = D'$ äquipollent C' und D, und in dem Parallelogramm $D'mEX$ ist $mX = X$ den Kräften D' und E äquipollent. Hiernach ist

	B' äquipollent	A und B
	C' »	B' und C
also	C' äquipollent	A, B, C
	D' »	C' und D
also	D' äquipollent	A, B, C, D
	X »	D' und E

folglich auch X äquipollent A, B, C, D, E

und es läßt sich auf diese Weise für jede beliebige Anzahl, der Größe und Lage nach gegebener, auf einen Punkt, in einer Ebene wirkender Kräfte, die entsprechende Mittelkraft bestimmen.

Auflösung 2. Man ziehe, Fig. 14., durch den Punkt m in der Ebene, in welcher die Richtungen der Kräfte $mA = A$, $mB = B$ ꝛc. liegen, zwei Linien $M'N'$ und $M''N''$ normal gegeneinander, und ziehe von A die Aa' und Aa'' parallel zu diesen beiden Linien, eben so von B die Bb' und Bb'', von C die Cc' und Cc'' ꝛc., so ist

$mA = A$ äquipollent den Kräften $ma' = a'$ und $ma'' = a''$
$mB = B$ » » $mb' = b'$ » $mb'' = b''$
$mC = C$ » » $mc' = c'$ » $mc'' = c''$
$mD = D$ » » $md' = d'$ » $md'' = d''$
und $mE = E$ » » $me' = e'$ » $me'' = e''$

folglich ſind die gegebenen Kräfte zuſammen äquipollent den Kräften (a', b', c', d', e') und $(a'', b'', c'', d'', e'')$, von welchen die Richtungen in den beiden gezogenen Linien $M'N'$ und $M''N''$ liegen. Sucht man nun die algebraiſche Summe von $a' + b' + c' + d' + e' = mx' = x'$, indem hierbei die Kräfte, welche von m aus in den entgegengeſetzten Richtungen mN' und mM' liegen, mit entgegengeſetzten Zeichen genommen werden, ſo iſt $mx' = x'$ allen dieſen Kräften zuſammen äquipollent. Eben ſo iſt, wenn die algebraiſche Summe von $a'' + b'' + c'' + d'' + e'' = mx'' = x''$ gefunden wird, wobei natürlich, wenn die Kräfte nach der Richtung mM'' als poſitiv betrachtet werden, die in der Richtung mN'' negativ genommen werden müſſen, $mx'' = x''$ äquipollent allen auf der Linie $M''N''$ liegenden Theilkräften. Hiernach ſind nun die Kräfte A, B, C, D und E zuſammen äquipollent den beiden Kräften $mx' = x'$ und $mx'' = x''$. Wird alſo das durch x' und x'' beſtimmte Rechteck $x'mx''X$ entworfen, ſo iſt $mX = X$ äquipollent x' und x'' und alſo auch den gegebenen Kräften A, B, C, D und E.

Es iſt leicht einzuſehen, daß dieſes Verfahren ebenfalls bei jeder beliebigen Anzahl von Kräften angewendet werden kann, wenn dieſelben alle auf einen Punkt wirken und in derſelben Ebene liegen.

Auflöſung 3. Die vorige Auflöſung führt noch zu einer algebraiſchen, durch welche eine Formel ſowohl für die Größe als für die Lage der geſuchten Mittelkraft X erhalten wird. Setzt man nämlich den Winkel, welchen die Richtung der Kraft $mA = A$ mit der Abſciſſenlinie mN' bildet, alſo $AmN' = \alpha$, ſo iſt

$$ma' = a' = A\cos\alpha \text{ und } ma'' = a'' = A\sin\alpha.$$

Eben ſo iſt für den Winkel $BmN' = \beta$

$$mb' = b' = B\cos\beta \text{ und } mb'' = b'' = B\sin\beta.$$

Setzt man ferner den Winkel $EmN' = \varepsilon$, so erhält man, weil $mE = E$ sein soll,

$me' = e' = E\cos\varepsilon$ negativ, weil ε ein Winkel im zweiten Quadranten ist. Es wird also durch die Formel $e' = E\cos\varepsilon$ bereits ausgedrückt, daß $me' = e'$ in Beziehung auf die angenommene Abscissenlinie mN' eine negative Lage hat. Dagegen ist $me'' = e'' = E\sin\varepsilon$ positiv, weil auch die Sinus der stumpfen Winkel einen positiven Werth haben.

Wird ferner der Winkel $DmN' = \delta$, wo dieser Winkel nach derselben Richtung herum genommen wird, wie die übrigen, so daß hier $\delta > 180^0$ und $< 270^0$, so wird

$md' = d' = D\cos\delta$ und $md'' = d'' = D\sin\delta$,

und es zeigen diese Formeln unmittelbar an, daß sowohl d' in Beziehung auf die Axe mN', als d'' in Beziehung auf die Axe mM'' negativ ist.

Endlich erhält man, wenn der Winkel CmN' ebenfalls von mN' *an links* herum genommen wird, so daß derselbe im vierten Quadranten liegt, also $> 270^0$ und $< 360^0$ ist, und $= \gamma$ gesetzt wird,

$mc' = c' = C\cos\gamma$ positiv, weil die Cosinus im vierten Quadranten positiv sind und

$mc'' = c'' = C\sin\gamma$ negativ, indem die Sinus in dem vierten Quadranten einen negativen Werth haben.

Die algebraische Summe der von den Kräften A, B, C, D, E abhängenden Theilkräfte a', b', c', d', e', welche, mit Rücksicht auf ihre Lage, $= a' + b' + c' - d' - e' = mx' = x'$, wird hiernach ausgedrückt durch die Formel

$$x' = A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma + D\cos\delta + E\cos\varepsilon;$$

die algebraische Summe der von den gegebenen Kräften abhängenden Theilkräfte a'', b'', c'', d'' und e'' aber ist $mx'' = x'' = a'' + b'' - c'' - d'' + e''$, und diese Summe wird durch die Formel ausgedrückt

$$x'' = A\sin\alpha + B\sin\beta + C\sin\gamma + D\sin\delta + E\sin\varepsilon.$$

Nun ist jedenfalls die gesuchte Mittelkraft $mx = X$ durch die Formel bestimmt

$$X^2 = (x')^2 + (x'')^2$$

folglich ist auch

$$X = \sqrt{[(x')^2 + (x'')^2]}$$
$$= \sqrt{[(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma + D\cos\delta + E\cos\varepsilon)^2 + (A\sin\alpha + B\sin\beta + C\sin\gamma + D\sin\delta + E\sin\varepsilon)^2]}.$$

Es iſt alſo durch die gegebenen Kräfte und die bekannten Winkel ihrer Richtungen gegen eine beliebig angenommene, durch m gezogene Axe, die Größe der, allen zuſammen äquipollenten Mittelkraft X beſtimmt.

Aber auch die Lage von X gegen die angenommene Axe läßt ſich durch eine Formel ausdrücken; denn ſetzt man nach derſelben Richtung herum, nach welcher alle übrigen Winkel genommen ſind, den Neigungswinkel von X gegen $mN' = \varphi$, ſo iſt immer

$$x' : x'' = 1 : \operatorname{tg}\varphi$$

und es iſt daher $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x''}{x'}$

nämlich es iſt, wenn man für x' und x'' ihre Werthe ſetzt,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A\sin\alpha + B\sin\beta + C\sin\gamma + D\sin\delta + E\sin\varepsilon}{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma + D\cos\delta + E\cos\varepsilon}$$

Zugleich läßt ſich aus der Formel $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x''}{x'}$ auch unmittelbar erkennen, in welchem Quadranten die Mittelkraft X liegen muß. Iſt nämlich ſowohl x' als x'' poſitiv, ſo liegt X im erſten Quadranten, alſo zwiſchen mN' und mM''. Iſt x' negativ und x'' poſitiv, ſo muß X im zweiten Quadranten zwiſchen mM'' und mM' liegen. Wenn x' und auch x'' negativ iſt, ſo liegt X im dritten Quadranten zwiſchen mM' und mN'', und X liegt endlich im vierten Quadranten zwiſchen mN'' und mN', wenn x'' negativ und x' poſitiv iſt.

Uebrigens verſteht es ſich von ſelbſt, daß, wenn in einem beſondern Falle $x' = 0$ gefunden wird, X mit der Linie $M''N''$ zuſammenfallen muß, und zwar in der Richtung mM'', wenn x'' poſitiv iſt, und in der Richtung mN'', wenn x'' einen negativen Werth hat. Eben ſo liegt X in der Linie $M'N'$, wenn $x'' = 0$ ſich ergiebt: und iſt zu gleicher Zeit $x' = 0$ und auch $x'' = 0$, ſo iſt X ebenfalls $= 0$, es ſind nämlich alsdann die gegebenen Kräfte unter ſich im Gleichgewicht.

Beiſpiel. Es iſt $A = 75{,}4$; $B = 26{,}3$; $C = 85{,}5$; $D = 54{,}2$; $E = 12{,}7$ und $F = 86{,}5$. Die Winkel, welche die Richtungen dieſer Kräfte, nach derſelben Seite herum genommen, mit mN' bilden, ſind $\alpha = 53°24'$; $\beta = 103°12'$; $\gamma = 165°27'$; $\delta = 201°40'$; $\varepsilon = 253°20'$ und $\psi = 304°15'$.

Dieſe

Dieſe Kräfte wirken alle in derſelben Ebene auf einen Punkt m; es ſoll die allen zuſammen äquipollente Mittelkraft ihrer Größe und Lage nach beſtimmt werden.

In den trigonometriſchen Tafeln findet man

$\sin\alpha = \sin 53^\circ 24' = +0{,}8028175$; $\cos\alpha = +0{,}5962249$
$\sin\beta = \sin 76^\circ 48' = +0{,}9735789$; $\cos\beta = -0{,}2283509$
$\sin\gamma = \sin 14^\circ 33' = +0{,}2512248$; $\cos\gamma = -0{,}9679288$
$\sin\delta = \sin 21^\circ 40' = -0{,}3692061$; $\cos\delta = -0{,}9293475$
$\sin\varepsilon = \sin 73^\circ 20' = -0{,}9579895$; $\cos\varepsilon = -0{,}2868032$
$\sin\psi = \sin 55^\circ 45' = -0{,}8265897$; $\cos\psi = +0{,}5628049$

Hiernach iſt nun auf vier Decimalſtellen genau

A $\sin\alpha$	$= +$	60,5324	
B $\sin\beta$	$= +$	25,6051	
C $\sin\gamma$	$= +$	21,4787	
D $\sin\delta$	$=$		$-$ 20,0110
E $\sin\varepsilon$	$=$		$-$ 12,1665
F $\sin\psi$	$=$		$-$ 71,5000
Es iſt alſo x''	$=$	107,6162	$-$ 103,6775 $= +$ 3,9387

ferner iſt

A $\cos\alpha$	$= +$	44,8554	
B $\cos\beta$	$=$		$-$ 6,0056
C $\cos\gamma$	$=$		$-$ 82,7579
D $\cos\delta$	$=$		$-$ 50,3706
E $\cos\varepsilon$	$=$		$-$ 3,6424
F $\cos\psi$	$= +$	48,6828	
folglich iſt x'	$= +$	93,5382	$-$ 142,7765 $= -$ 49,2383

Hiernach iſt nun $(x')^2 = 2424{,}4102$
und $(x'')^2 = 15{,}5134$
alſo $X^2 = 2439{,}9236$
und daher $X = \sqrt{2439{,}9236} = 49{,}39.$

Endlich iſt $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x''}{x'} = \frac{+3{,}9387}{-49{,}2383} = 0{,}0799926$

und man findet in den Tafeln, daß dieſe Tangente zu einem Winkel von 4°34′25″ gehört. Weil nun aber x'' poſitiv und x' negativ iſt, ſo muß X zwiſchen mM″ und mM′, alſo im zweiten Quadranten liegen, und es iſt daher

$$\varphi = 175^\circ\ 25'\ 35''.$$

Zuſatz. Die beiden Gleichungen

$$x' = A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma \ldots$$

und $x'' = A\sin\alpha + B\sin\beta + C\sin\gamma \ldots$

geben für den Fall, daß die Kräfte A, B, C... unter ſich im Gleichgewichte ſind, $x' = 0$ und auch $x'' = 0$. Für das Gleichgewicht mehrerer auf einen Punkt in einer Ebene wirkenden Kräfte werden alſo die Bedingungen für das Gleichgewicht durch die beiden Gleichungen ausgedrückt

$$A\sin\alpha + B\sin\beta + C\sin\gamma \ldots = 0$$

$$\text{und } A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma \ldots = 0$$

Dieſes führt nun zu der Aufgabe:

Wie laſſen ſich aus dieſen beiden Gleichungen die bekannten Gleichungen für drei im Gleichgewicht ſtehende Kräfte A, B und C, Fig. 15, ableiten?

Um dieſe Aufgabe zu löſen, nehme man an, es falle die Axe mit C zuſammen, ſo wird $\gamma = 0$, und bei der, Fig. 15., angenommenen Bezeichnung iſt nun $\alpha = b$ und $\beta = 360^\circ - a$; daher $\sin\gamma = 0$, $\cos\gamma = 1$, $\sin\beta = -\sin a$ und $\cos\beta = \cos a$. Die obigen Gleichungen werden alſo hierdurch

$$A\sin b - B\sin a = 0$$

$$\text{und } A\cos b + B\cos a + C = 0.$$

Aus der erſten Gleichung folgt $B = \frac{A\sin b}{\sin a}$

und daher wird die zweite Gleichung

$$A\cos b + \frac{A\cos a\sin b}{\sin a} + C = 0;$$

nämlich es iſt

$$A\sin(a+b) + C\sin a = 0$$

und weil $c = 360^\circ - (a+b)$, ſo iſt $\sin(a+b) = -\sin c$, alſo iſt auch $A\sin c = C\sin a$. Die beiden Gleichungen für drei im Gleichgewicht ſtehende Kräfte ſind mithin

$$A\sin b = B\sin a \text{ und } A\sin c = C\sin a,$$

folglich iſt $A : B : C = \sin a : \sin b : \sin c$, wie es ſein muß.

§. 16

Das Auflösen der Kräfte.

Aufgabe 1. Es ist eine Kraft $mC = C$, Fig. 16., gegeben; man soll dieselbe in zwei äquipollente Kräfte zerlegen, deren Richtungen durch zwei gegebene Punkte gehen.

Auflösung. Liegen die Punkte α und β auf verschiedenen Seiten von C, so ziehe man von m aus Linien durch diese Punkte, und durch den Endpunkt C der gegebenen Kraft Parallelen zu denselben, so werden die gesuchten äquipollenten Kräfte $mA = A$ und $mB = B$ erhalten. Liegen aber die Punkte α' und β auf einer und derselben Seite von C, so muß die Linie $m\alpha'$ rückwärts verlängert werden, um die eine Seitenkraft A zu erhalten.

Soll eine gegebene Kraft in drei Kräfte zerlegt werden, die durch drei gegebene Punkte gehen, so ist die Aufgabe unbestimmt und läßt sich dadurch lösen, daß man außer den gegebenen Punkten α, β, γ noch einen vierten δ annimmt, die gegebene Kraft zuvörderst in zwei Kräfte zerlegt, die durch α und δ gehen, und hierauf die durch den willkührlich angenommenen Punkt δ gehende wiederum in zwei Kräfte theilt, deren Richtungen die gegebenen β und γ treffen. Es ist einleuchtend, daß auf diese Weise eine gegebene Kraft in jede beliebige Anzahl von Kräften zerlegt werden kann, die alle durch bestimmte Punkte gehen.

Aufgabe 2. Es ist eine Kraft $mx = X$, Fig. 17., gegeben, und vier Punkte a, b, c, d. Man soll X in zwei Kräfte C und D zerlegen, die durch c und d gehen; hierauf D wieder in zwei, A und B, deren Richtungen die Punkte a und b treffen, und endlich die Werthe der hierdurch erhaltenen A, B und C, welche zusammen der X äquipollent sind, angeben.

Auflösung. Da die Punkte a, b, c und d gegeben sind, so kennt man auch die Winkel, welche die von diesen Punkten an m gezogenen Linien mit einander und mit $mx = X$ bilden. Werden diese Winkel, wie es Fig. 17. angegeben ist, bezeichnet, so ist

$$X : C : D = \sin(\gamma + \delta) : \sin\gamma : \sin\delta$$
$$\text{und } D : A : B = \sin(\alpha + \beta) : \sin\alpha : \sin\beta.$$
$$\text{Es iſt alſo } C = \frac{X \sin\gamma}{\sin(\gamma + \delta)}; \; D = \frac{X \sin\delta}{\sin(\gamma + \delta)};$$
$$A = \frac{D \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{X \sin\alpha \sin\delta}{\sin(\alpha + \beta)\sin(\gamma + \delta)},$$
$$\text{und } B = \frac{D \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{X \sin\beta \sin\delta}{\sin(\alpha + \beta)\sin(\gamma + \delta)}.$$

§. 17.

Aufgaben von den auf einen Punkt wirkenden Kräften, deren Richtungen nicht in einer Ebene liegen.

Aufgabe 1. Auf einen Punkt m, Fig. 16., wirken die Kräfte ma = A, mb = B, mc = C, deren Richtungen nicht in einer Ebene liegen; man ſoll die Größe und Lage der ihnen äquipollenten Mittelkraft mx = X angeben.

Auflöſung. Vollendet man das durch amb beſtimmte Parallelogramm ambz, ſo iſt die Diagonale mz = Z den Kräften A und B äquipollent, und wird das durch zmc beſtimmte Parallelogramm zmcx entworfen, ſo iſt die Diagonale mx = X äquipollent Z und C und daher auch A, B und C. Nun iſt aber mx = X die Diagonale des Parallelepipedon, deſſen Größe und Form durch die drei Linien ma, mb und mc und durch die von denſelben eingeſchloſſenen Winkel amb, amc und bmc beſtimmt iſt: folglich läßt ſich durch dieſes Parallelepipedon die geſuchte Mittelkraft ihrer Größe und Lage nach finden.

Am einfachſten ergiebt ſich der Werth von X in dem Falle, wenn die Linien ma, mb und mc normal aufeinander ſtehen, alſo ∠ amb = ∠ amc = ∠ bmc = 90° iſt; denn bei dieſer Vorausſetzung iſt

$$Z^2 = A^2 + B^2 \text{ und } X^2 = Z^2 + C^2$$
$$\text{und daher auch } X^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$
$$\text{Es iſt alſo } X = \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}$$

Ferner iſt bei dieſer Vorausſetzung, wenn man ∠ xma = x′, ∠ xmb = x″ und ∠ xmc = x‴ ſetzt,

$$X : A = 1 : \cos x' \text{ alſo } \cos x' = \frac{A}{X}$$
$$X : B = 1 : \cos x'' \text{ " } \cos x'' = \frac{B}{X}$$
$$\text{und } X : C = 1 : \cos x''' \text{ " } \cos x''' = \frac{C}{X}$$

und es sind daher die Winkel, welche die Mittelkraft mit den drei Seitenkräften bildet, durch diese Formeln bestimmt, wenn man in denselben für X den Werth setzt $= V(A^2 + B^2 + C^2)$.

Aufgabe 2. Es ist die Mittelkraft $mx = X$, Fig. 18., ihrer Größe nach gegeben, und die Lage derselben gegen die drei normal aufeinander stehenden Axen ma, mb, mc ist durch die Winkel bestimmt, welche sie mit diesen Axen bildet: nämlich es ist $xma = x'$, $xmb = x''$ und $xmc = x'''$. Man soll X in drei Seitenkräfte, welche mit diesen Axen zusammenfallen, zerlegen und die Größe einer jeden derselben angeben.

Auflösung. Bezeichnet man die drei Seitenkräfte mit A, B und C, so folgt aus den, in Aufgabe 1., für die Cosinus der drei Winkel gefundenen Formeln unmittelbar

$$A = X \cos x'; \quad B = X \cos x''; \quad C = X \cos x'''.$$

Aufgabe 3. Stehen die drei Axen ma, mb und mc normal aufeinander, und kennt man die Lage von mx gegen zwei derselben, so ist dadurch die Lage gegen die dritte Axe bestimmt; es ist nämlich der Werth von x''' bestimmt, wenn er von x' und x'' gegeben ist: man soll angeben, wie dieser dritte Winkel x''' von den beiden übrigen x' und x'' abhängt.

Auflösung. Es ist, nach Aufgabe 1.,

$$\cos x''' = \frac{C}{X}; \text{ also auch } \cos^2 x''' = \frac{C^2}{X^2}$$

da nun $X^2 = A^2 + B^2 + C^2$, so ist auch

$$\cos^2 x''' = \frac{X^2 - A^2 - B^2}{X^2} = 1 - \frac{A^2}{X^2} - \frac{B^2}{X^2}$$

Es ist aber $\frac{A}{X} = \cos x'$ und $\frac{B}{X} = \cos x''$

folglich wird $\cos^2 x''' = 1 - \cos^2 x' - \cos^2 x''$

so auch

$$\sin^2 x''' = \sin^2 x' - \cos^2 x'' = (\sin x' + \cos x'')(\sin x' - \cos x'').$$

Nun ist aber ganz allgemein

$$\sin p + \cos q = 2 \sin \tfrac{1}{2}(90^\circ + p - q) \cos \tfrac{1}{2}(p + q - 90^\circ)$$

$$\sin p - \cos q = 2 \cos \tfrac{1}{2}(90^\circ + p - q) \sin \tfrac{1}{2}(p + q - 90^\circ)$$

folglich wird $(\sin p + \cos q)(\sin p - \cos q) =$

$$= \sin \tfrac{1}{2}(90^\circ + p - q) \cos \tfrac{1}{2}(90^\circ + p - q) \cdot 2 \sin \tfrac{1}{2}(p + q - 90^\circ) \cos \tfrac{1}{2}(p + q - 90^\circ)$$

$$= \sin (90^\circ + p - q) \cdot \sin (p + q - 90^\circ)$$

$$= \cos (q - p) \cdot - \cos (q + p)$$

und es ist daher auch

$$\cos^2 x''' = -\cos(x'' - x')\cos(x'' + x')$$

wodurch also bestimmt ist, wie der dritte Winkel x''' von den beiden übrigen x' und x'' abhängt.

Aufgabe 4. Es wirken mehrere Kräfte A, B, C, D, E..., deren Richtungen in verschiedenen Ebenen liegen, auf einen Punkt m; es soll die Größe und Richtung der durch dieselben bestimmten Mittelkraft X angegeben werden.

Auflösung. Zieht man die drei Axen ma, mb, mc normal gegeneinander, setzt die Neigungswinkel, welche die Richtung der Kraft A mit diesen Axen bildet, $= \alpha', \alpha'', \alpha'''$ und die Seitenkräfte, in welche A auf diese Axen zerlegt werden kann, $= a', a'', a'''$, so ist nach Aufgabe 2.

$a' = A\cos\alpha'$; $a'' = A\cos\alpha''$ und $a''' = A\cos\alpha'''$.

Eben so ist, wenn B mit den drei Axen die Neigungswinkel $\beta', \beta'', \beta'''$ bildet, und die Seitenkräfte, in welche B auf diese drei Axen zerlegt werden kann, mit b', b'', b''' bezeichnet werden,

$b' = B\cos\beta'$; $b'' = B\cos\beta''$ und $b''' = B\cos\beta'''$.

Auf gleiche Weise erhält man, wenn man eine ähnliche Bezeichnung einführt, für die Seitenkräfte, in welche C zerlegt werden kann,

$c' = C\cos\gamma'$; $c'' = C\cos\gamma''$ und $c''' = C\cos\gamma'''$.

Für D wird erhalten

$d' = D\cos\delta'$; $d'' = D\cos\delta''$ und $d''' = D\cos\delta'''$

u. s. w., u. s. w.

Hiernach ist die algebraische Summe x' aller Seitenkräfte, welche in der Axe ma liegen,

$x' = a' + b' + c' + d' ... = A\cos\alpha' + B\cos\beta' + C\cos\gamma' + D\cos\delta' ...$

Die algebraische Summe x'' der Seitenkräfte in der Axe mb ist

$x'' = a'' + b'' + c'' + d'' ... = A\cos\alpha'' + B\cos\beta'' + C\cos\gamma'' + D\cos\delta'' ...$

und die algebraische Summe x''' der Kräfte in der Axe mc ist

$x''' = a''' + b''' + c''' + d''' ... = A\cos\alpha''' + B\cos\beta''' + C\cos\gamma''' + D\cos\delta''' ...$

Alle diese Kräfte sind zusammengenommen den gegebenen A, B, C, D... äquipollent.

Nun entsteht aber aus den drei normal gegeneinander wirkenden Kräften x', x'' und x''' eine Mittelkraft X, deren Größe durch die Gleichung ausgedrückt wird

$$X^2 = (x')^2 + (x'')^2 + (x''')^2$$

folglich iſt hierdurch auch der Werth der den gegebenen Kräften A, B, C, D... äquipollenten Mittelkraft X beſtimmt: nämlich es iſt

$$X = V[(x')^2 + (x'')^2 + (x''')^2] =$$
$$V[(A\cos\alpha'+B\cos\beta'+C\cos\gamma'...)^2+(A\cos\alpha''+B\cos\beta''+C\cos\gamma''...)^2$$
$$+(A\cos\alpha'''+B\cos\beta'''+C\cos\gamma'''...)^2]$$

Auch die Richtung der Mittelkraft X iſt beſtimmt: ſetzt man nämlich den Neigungswinkel derſelben gegen die Axe ma $= \varphi'$, gegen mb $= \varphi''$ und gegen mc $= \varphi'''$, ſo iſt

$$\cos\varphi' = \frac{x'}{X};\ \cos\varphi'' = \frac{x''}{X} \text{ und } \cos\varphi''' = \frac{x'''}{X}$$

wo nun bloß für x', x'', x''' und X die angegebenen Werthe geſetzt zu werden brauchen.

Uebrigens geht aus der vorigen Aufgabe hervor, daß in allen Fällen der Neigungswinkel gegen die dritte Axe durch die gegebenen Neigungswinkel gegen die beiden übrigen Axen beſtimmt iſt. Hiernach iſt alſo

α''' beſtimmt durch α' und α''
β''' » » β' » β''
γ''' » » γ' » γ'' u. ſ. w.
x''' » » x' » x''.

Aufgabe 5. Es ſind mehrere auf einen Punkt m wirkende Kräfte, deren Richtungen in verſchiedenen Ebenen liegen, unter ſich im Gleichgewicht; man ſoll die Bedingungsgleichungen für daſſelbe angeben.

Auflöſung. Werden die Bezeichnungen der vorigen Aufgabe beibehalten, ſo iſt für die Kräfte A, B, C, D... die Summe der Seitenkräfte für die drei Axen durch die Gleichungen beſtimmt

$x' = A\cos\alpha' + B\cos\beta' + C\cos\gamma' + D\cos\delta'...$
$x'' = A\cos\alpha'' + B\cos\beta'' + C\cos\gamma'' + D\cos\delta''...$
$x''' = A\cos\alpha''' + B\cos\beta''' + C\cos\gamma''' + D\cos\delta'''...$

Sollen nun die Kräfte A, B, C, D... unter ſich im Gleichgewichte ſein, ſo muß die algebraiſche Summe der Seitenkräfte für jede der drei Axen beſonders $= 0$ werden; es muß alſo $x' = 0$, $x'' = 0$ und $x''' = 0$ ſein, und daher ſind die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht

$A\cos\alpha' + B\cos\alpha' + C\cos\gamma' + D\cos\delta' \ldots = 0$
$A\cos\alpha'' + B\cos\beta'' + C\cos\gamma'' + D\cos\delta'' \ldots = 0$
und $A\cos\alpha''' + B\cos\beta''' + C\cos\gamma''' + D\cos\delta''' \ldots = 0$

Dieſe Gleichungen erhalten indeſſen nur alsdann Bedeutung, wenn 4 Kräfte wenigſtens vorkommen, weil unter weniger als 4 Kräften, die in verſchiedenen Ebenen wirken, überhaupt kein Gleichgewicht möglich iſt.

Nimmt man die Richtung der einen Kraft A ſelbſt als die erſte Axe an, ſo wird $\alpha' = 0$, $\alpha'' = 90^0$ und $\alpha''' = 90^0$; alſo $\cos\alpha' = 1$, $\cos\alpha'' = \cos\alpha''' = 0$, und die Gleichungen erhalten alsdann die etwas einfachere Form

$A + B\cos\beta' + C\cos\gamma' + D\cos\delta' \ldots = 0$
$B\cos\beta'' + C\cos\gamma'' + D\cos\delta'' \ldots = 0$
$B\cos\beta''' + C\cos\gamma''' + D\cos\delta''' \ldots = 0$

Zuſatz. So oft von n Kräften, die im Gleichgewichte ſein ſollen, n — 1 und ihre Neigungswinkel gegeben ſind, kann die nte Kraft und ihre Neigungswinkel gefunden werden. Iſt z. B. D die nte Kraft, ſo ſind D, δ', δ'', δ''' die unbekannten Größen; es iſt aber δ''' durch δ' und δ'' beſtimmt, und daher kommen auch nur drei unbekannte Größen vor, die durch die 3 Gleichungen gefunden werden müſſen.

Aufgabe 6. Mehrere auf einen Punkt wirkende Kräfte, deren Richtungen in verſchiedenen Ebenen liegen, und ihre Neigungswinkel gegen drei normal aufeinander ſtehende Axen ſind gegeben; es ſoll die Lage der durch dieſelben erzeugten Mittelkraft näher beſtimmt werden. Da nämlich durch die Axen, Fig. 18., wenn man ſie rückwärts verlängert, der ganze Raum um den Punkt m in 8 Felder getheilt wird, ſo ſoll das Feld beſtimmt werden, in welchem die Kraft X liegen muß.

Auflöſung. Bezeichnet man, wie bereits in den ſtereometriſchen Uebungen (Seite 563) geſchehen iſt, die 8 Felder mit den Zahlen 1 bis 8, ſo daß geſetzt wird

das Feld	ambc = 1	am(b)(c) = 5
	amb(c) = 2	(a)mb(c) = 6
	am(b)c = 3	(a)m(b)c = 7
	(a)mbc = 4	(a)m(b)(c) = 8

ſo läßt ſich aus den Zeichen der drei Seitenkräfte x', x'' und

x''' unmittelbar bestimmen, in welchem Felde X liegen muß. Ist nämlich

$x'+, x''+, x'''+$,	so liegt X in dem Felde	1
$x'+, x''+, x'''-$,	» »	2
$x'+, x''-, x'''+$,	» »	3
$x'-, x''+, x'''+$,	» »	4
$x'+, x''-, x'''-$,	» »	5
$x'-, x''+, x'''-$,	» »	6
$x'-, x''-, x'''+$,	» »	7
$x'-, x''-, x'''-$,	» »	8

Da nun die Zeichen der Größen x', x'', x''' durch die Gleichungen

$$x' = A\cos\alpha' + B\cos\beta' + C\cos\gamma' \ldots$$
$$x'' = A\cos\alpha'' + B\cos\beta'' + C\cos\gamma'' \ldots$$
$$x''' = A\cos\alpha''' + B\cos\beta''' + C\cos\gamma''' \ldots$$

in jedem Falle bestimmt sind, so läßt sich auch immer mit vollkommener Gewißheit angeben, in welchem Felde die äquivalente Mittelkraft liegen muß, und die Richtung derselben ist vollkommen bestimmt durch die drei Gleichungen

$$\cos\varphi' = \frac{x'}{X};\ \cos\varphi'' = \frac{x''}{X} \text{ und } \cos\varphi''' = \frac{x'''}{X}$$

Beispiel.

Auf einen Punkt m wirken 4 Kräfte, deren Größe und Lage auf folgende Art bestimmt ist:

A = 60 Pf.	im Felde 1;	$\angle\alpha' = 63°27'$;	$\angle\alpha'' = 48°36'$
B = 80 Pf.	» 3;	$\angle\beta' = 53°44'$;	$\angle\beta'' = 71°15'$
C = 50 Pf.	» 4;	$\angle\gamma' = 72°40'$;	$\angle\gamma'' = 38°20'$
D = 100 Pf.	» 7;	$\angle\delta' = 90°$;	$\angle\delta'' = 32°36'$

Es bedeutet also hier α' den spitzen Winkel, welchen die Richtung der Kraft A mit der Axe (a)a bildet, und α'' den, welchen ihre Richtung mit der Axe (b)b macht: hierdurch ist der Winkel α''', welchen die Richtung der Kraft A mit (c)c bildet, nach Aufgabe 3., durch die Formel bestimmt

$$\cos^2\alpha''' = 1 - \cos(\alpha'' - \alpha')\cos(\alpha'' + \alpha)$$

Die Seitenkräfte, in welche A in den Richtungen der Axen zerlegt wird, werden mit a', a'' und a''' bezeichnet. — Eine gleiche Bezeichnung findet bei den übrigen Kräften ebenfalls statt. — Es soll die Größe und Richtung der hierdurch

bestimmten Mittelkraft X und die Lage derselben angegeben werden. Die Seitenkräfte derselben sind x', x'' und x''' ihre Neigungswinkel gegen die drei Axen φ', φ'' und φ'''

Resultate.

1. Für die Kraft A findet man

$\cos\alpha''' = 0{,}6023924$; also $\alpha''' = 52^\circ\ 57'\ 30''$

$a' = +\ 26{,}8187160$

$a'' = +\ 39{,}6787140$

$a''' = +\ 36{,}1435440$

2. Für die Kraft B

$\cos\beta''' = 0{,}7394269$; also $\beta''' = 42^\circ\ 19'\ 3''$

$b' = +\ 47{,}3235360$

$b'' = -\ 25{,}7151600$

$b''' = +\ 77{,}5116160$

3. Für die Kraft C

$\cos\gamma''' = 0{,}5439941$; also $\gamma''' = 57^\circ\ 2'\ 30''$

$c' = -\ 14{,}8965150$

$c'' = +\ 39{,}2207850$

$c''' = +\ 27{,}1997050$

4. Für die Kraft D

$\cos\delta''' = 0{,}5387708$; also $\delta''' = 57^\circ\ 24'$

$d' = 0{,}0000000$

$d'' = -\ 84{,}2452400$

$d''' = -\ 53{,}8770800$

Aus diesen Werthen erhält man nun

5. Für die gesuchte Kraft X

$x' = +\ 59{,}2457370$

$x'' = -\ 31{,}0609010$

$x''' = +\ 194{,}7319450$

Aus diesen Größen folgt unmittelbar, daß die gesuchte Kraft in dem Felde No. 3. liegen muß, und es ist der Werth von X

$$X = V42395{,}39 = 205{,}78$$

Die Neigungswinkel derselben gegen die drei Axen sind durch die Formeln bestimmt

$$\cos\varphi' = \frac{x'}{X};\ \cos\varphi'' = \frac{x''}{X}\ \text{und}\ \cos\varphi''' = \frac{x'''}{X}$$

wobei keine Rücksicht auf die Zeichen von x', x'' und x'''

nommen zu werden braucht, weil das Feld, in welchem X liegen muß, bereits bestimmt ist, und es sind daher die Winkel φ', φ'' und φ''' alle drei kleiner als 90° zu nehmen. Daher findet man

$$\varphi' = 73° 16'; \quad \varphi'' = 81° 19' \text{ und } \varphi''' = 15° 51'$$

Anmerkung. Soll die Kraft X' angegeben werden, welche mit den 4 Kräften A, B, C und D im Gleichgewicht ist, so wird der Größe nach $X' = X$, aber die Lage ist entgegengesetzt. Da nun X in dem dritten Felde liegt, in welchem x' und x''' positiv, aber x'' negativ ist, so muß X' in dem Felde liegen, in welchem umgekehrt x'' positiv ist, x' und x''' aber negativ; daher liegt X' in dem Felde No. 6. Die Neigungswinkel von X' gegen die drei Axen aber sind die Scheitelwinkel von den gefundenen, und sie haben daher ebenfalls die für φ', φ'' und φ''' ermittelten Werthe.

§. 18.

Die Momente und das Princip der virtuellen Geschwindigkeit betreffende Aufgaben und Uebungen.

Wirken mehrere Kräfte A, B, C auf einen Punkt m, Fig. 19., und man fällt von irgend einem Punkte x eine Normale $xa = a$ auf die Richtung einer Kraft $mA = A$, so wird das Produkt $a \times A$, also das Produkt der Kraft A und des Abstandes des Punktes x von ihrer Richtung, das Moment dieser Kraft in Beziehung auf den Punkt x genannt. Eben so ist, wenn die Normale von x auf $mB = B$, also $xb = b$ gesetzt wird, $b \times B$ das Moment von B. Die Linie xm ist durch die Lage von x bestimmt, und es sind in Beziehung auf diese Linie, als gemeinschaftlichen Schenkel aller Winkel, welche die Richtungen der verschiedenen auf m wirkenden Kräfte mit derselben bilden, die Winkel negativ, die eine der angenommenen positiven Seite entgegengesetzte Lage haben. Werden also die von xm rechts liegenden Winkel xmB und xmC als positiv angenommen, so ist der Winkel xmA negativ. Da nun die Normale auf irgend eine Kraft erhalten wird, wenn man mx mit dem Sinus des Neigungswinkels dieser Kraft gegen mx multiplicirt, und der Sinus eines negativen Winkels, wobei die Winkel immer $< 180°$ sein müssen, selbst negativ ist: so folgt, daß die zu einem negativen

Winkel gehörige Normale, und daher auch das Moment, ebenfalls negativ iſt. In Beziehung auf den, Fig. 19., angenommenen Punkt x ſind alſo die Momente bB und cC poſitiv, aA aber iſt negativ; denn es iſt $b = (mx)\sin xmB$ und $c = (mx)\sin xmC$, wo beide Winkel poſitiv ſind: dagegen iſt $a = (mx)\sin xmA$ und der Winkel xmA hat eine negative Lage. Dieſes läßt ſich auch ſchon daran erkennen, daß, wenn man von xm aus alle Winkel nach einer Richtung herum nimmt, z. B. hier rechts herum, die Winkel xmB und xmC kleiner als 180° ſind, aber $\angle xmA > 180°$ iſt.

Die durch die Normale xa, auf der Richtung der Kraft A, von m aus abgeſchnittene Linie ma wird der Weg der Kraft A in paralleler Richtung in Beziehung auf x genannt, und es iſt dieſer Weg poſitiv, wenn er die Richtung der Kraft hat, und negativ, wenn er in entgegengeſetzter Richtung liegt. Demnach iſt hier für den Punkt x der Weg in paralleler Richtung ſowohl für A als für B poſitiv, für mC = C aber iſt derſelbe negativ. Auch dieſes läßt ſich unmittelbar aus den Winkeln beurtheilen, welche mx mit den Richtungen der Kräfte bildet. So iſt

$(ma)=(mx)\cos xmA$; $(mb)=(mx)\cos xmB$; $(mc)=(mx)\cos xmC$

und es iſt, wenn die Winkel nach einer Richtung herum genommen werden, xmB ein Winkel im erſten Quadranten, xmA im vierten Quadranten und xmC im dritten: daher ſind die Coſinus der beiden erſten poſitiv und der des letzten iſt negativ. Wird ma = (a) mit der dazu gehörigen Kraft A multiplicirt, ſo wird (a)A das Produkt der Kraft in ihrem Wege nach paralleler Richtung in Beziehung auf x genannt.

Aufgabe 1. Die auf den Punkt m, Fig. 19., in einer Ebene wirkenden drei Kräfte mA=A, mB=B und mC=C ſind im Gleichgewicht; es ſoll die Summe der Momente dieſer Kräfte in Beziehung auf einen beliebig angenommenen, in derſelben Ebene liegenden Punkt x angegeben werden.

Auflöſung. Für xa = a, xb = b, xc = c und die Summe der Momente = S, iſt $S = -aA + bB + cC$,

o das Moment aA negativ genommen wird, weil xa = a
egativ ist. Es ist aber

aA = 2×ΔmxA; bB = 2×ΔmxB und cC = 2×ΔmxC

olglich ist auch

$$S = 2[-\Delta mxA + \Delta mxB + \Delta mxC]$$

Vollendet man das durch AmB bestimmte Parallelogramm
AmBn, so ist ΔmxC = Δmxn, und daher wird

$$S = 2[-\Delta mxA + \Delta mxB + \Delta mxn]$$

ämlich es ist S = 2[— ΔmxA + Viereck mBxn].

Die Fläche des Vierecks mBxn aber ist der eines Dreiecks
leich, welches nB zur Grundlinie und die Summe der Ab-
stände x und m von nB zur Höhe hat: es ist also, da diese
Summe = xa = a, Viereck $mBxn = \frac{a \times (nB)}{2} = \frac{a \times A}{2}$
= ΔmxA;

folglich wird S = 2[— ΔmxA + ΔmxA]

ämlich es ist S = 0.

Stehen also drei Kräfte im Gleichgewicht, so
t die Summe ihrer Momente für jeden beliebigen
unkt x = 0.

Aufgabe 2. Die drei auf den Punkt m, Fig. 19,
irkenden Kräfte A, B und C sind im Gleichgewichte; es soll
e Summe der Produkte dieser Kräfte und ihrer Wege
ach paralleler Richtung in Beziehung auf den Punkt x gefun-
n werden.

Auflösung 1. Setzt man ma = (a), mb = (b), mc = (c)
nd die Summe der gesuchten Produkte = T, so ist, weil
) = mc negativ ist,

$$T = (a)A + (b)B - (c)C.$$

Nach Euklid's Elementen, Buch 2. Satz 12 und 13., ist
dem

1. ΔmxA, $(xA)^2 = (xm)^2 + (mA)^2 - 2(ma)(mA)$
$= (xm)^2 + A^2 - 2(a)A.$

2. ΔmxB, $(xm)^2 = (xB)^2 + (mB)^2 + 2(mB)(Bb)$
$= (xB)^2 + B^2 + 2B((b)-B)$

3. Δmxn, $(xm)^2 = (xn)^2 + (mn)^2 + 2(mn)(nc)$
$= (xn)^2 + C^2 + 2C((c)-C)$

Aus 1. folgt $2(a)A = (xm)^2 - (xA)^2 + A^2$
» 2. » $2(b)B = (xm)^2 - (xB)^2 + B^2$
» 3. » $-2(c)C = -(xm)^2 + (xn)^2 - C^2$

Werden dieſe drei Gleichungen addirt, ſo erhält man

$2T = [(xm)^2 + (xn)^2] - [(xA)^2 + (xB)^2] + A^2 + B^2 - C^2$

Da ſich nun, wenn man in dem Parallelogramm AmBn die zweite Diagonale AB = D zieht, mn und AB in g halbiren, ſo iſt

in dem Dreieck mxn, $[(xm)^2 + (xn)^2] = 2(mg)^2 + 2(xg)^2$
» AxB, $-[(xA)^2 + (xB)^2] = -2(Ag)^2 - 2(xg)^2$

folglich iſt auch

$2T = 2(mg)^2 - 2(Ag)^2 + A^2 + B^2 - C^2$

und $4T = 4(mg)^2 - 4(Ag)^2 + 2A^2 + 2B^2 - 2C^2$

und weil $4(mg)^2 = (mn)^2 = C^2$ und $4(Ag)^2 = (AB)^2 = D^2$

ſo wird $4T = C^2 - D^2 + 2A^2 + 2B^2 - 2C^2$

nämlich es iſt $4T = 2A^2 + 2B^2 - (C^2 + D^2)$

In jedem Parallelogramm iſt aber die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen ſo groß, als die Summe der Quadrate der 4 Seiten, alſo

$$C^2 + D^2 = 2A^2 + 2B^2$$

folglich iſt $4T = 0$ und daher auch $T = 0$.

Hieraus folgt alſo: wenn drei Kräfte im Gleichgewicht ſind, und man multiplicirt jede derſelben mit dem parallel zu ihrer Richtung in Beziehung auf einen Punkt x zurückgelegten Weg, ſo iſt die Summe dieſer Produkte = 0.

Auflöſung 2. Setzt man, Fig. 20., xm = m, den Winkel, den dieſe Linie mit C bildet, $= \varphi$, und die Winkel welche A und B mit der rückwärts verlängerten Kraft C machen, $= \beta$ und α, ſo iſt $\angle xmb = 180^0 - (\varphi + \alpha)$ und $\angle xma = \varphi - \beta$. Es iſt alſo hier

ma = (a) = $m\cos(\varphi - \beta)$ negativ, alſo $(a)A = -mA\cos(\varphi - \beta)$
mb = (b) = $-m\cos(\varphi + \alpha)$ poſitiv, » $(b)B = -mB\cos(\varphi + \alpha)$
mc = (c) = $m\cos\varphi$ poſitiv, « $(c)C = +mC\cos\varphi$

Die geſuchte Summe der Produkte T iſt alſo

$T = -mA\cos(\varphi - \beta) - mB\cos(\varphi + \alpha) + mC\cos\varphi$

Weil aber A, B und C im Gleichgewichte ſein ſollen, ſo iſt

$$A : B : C = \sin\alpha : \sin\beta : \sin(\alpha+\beta)$$

und daher $B = \frac{A \sin\beta}{\sin\alpha}$ und $C = \frac{A \sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$

lich ist auch

$$= \frac{mA}{\sin\alpha}[-\sin\alpha\cos(\varphi-\beta) - \sin\beta\cos(\varphi+\alpha) + \sin(\alpha+\beta)\cos\varphi].$$

n ist

$\sin\alpha\cos(\varphi-\beta) = -\sin\alpha\cos\varphi\cos\beta - \sin\alpha\sin\varphi\sin\beta$
$\sin\beta\cos(\varphi+\alpha) = +\sin\alpha\sin\varphi\sin\beta - \sin\beta\cos\varphi\cos\alpha$
$\sin(\alpha+\beta)\cos\varphi = +\sin\alpha\cos\varphi\cos\beta + \sin\beta\cos\varphi\cos\alpha$

d es ist daher die Summe dieser Größen = 0, folglich ist

ch $T = \frac{mA}{\sin\alpha} \cdot 0 = 0$, was mit dem in der ersten Auf-

ung auf geometrischem Wege gefundenen Resultate über-

stimmt.

Aufgabe 3. Auf einen Punkt m, Fig. 14., wirken hrere Kräfte A, B, C, D, E..., deren Richtungen sämmt- in derselben Ebene liegen; man soll die Summe der Mo- nte dieser Kräfte für irgend einen Punkt x, so wie auch Summe der Produkte, welche erhalten werden, wenn man e Kraft mit dem parallel zu ihrer Richtung zurückgelegten ge in Beziehung auf x multiplicirt, bestimmen.

Auflösung. Legt man die durch m normal aufeinan- gezogenen Axen M'N' und M''N'' so, daß die eine derse- durch den gezogenen Punkt x geht, setzt mx = m und hält übrigens die, §. 15. Auflösung 3., eingeführte Be- hnung bei, so ist die Normale

x auf $A = a = m\sin\alpha$, also das Moment $= mA\sin\alpha$
» $B = b = m\sin\beta$ » » $= mB\sin\beta$
» $C = c = m\sin\gamma$ » » $= mC\sin\gamma$
» $D = d = m\sin\delta$ » » $= mD\sin\delta$
» $E = e = m\sin\varepsilon$ » » $= mE\sin\varepsilon$

u. s. w.

es ist daher die algebraische Summe dieser Momente
$= m[A\sin\alpha + B\sin\beta + C\sin\gamma + D\sin\delta + E\sin\varepsilon...]$

weil aber $A \sin \alpha = (ma'') = a''$; $B \sin \beta = (mb'') = b''$ ꝛc. ſo iſt auch

$$S = m\,(a'' + b'' - c'' - d'' + e'')$$

wo c'' und d'' negativ genommen werden müſſen, weil die Winkel γ und $\delta > 180^0$ ſind.

Nun iſt aber, nach §. 15., $a'' + b'' - c'' - d'' + e'' \ldots = (mx'') = x''$ folglich iſt die geſuchte Summe der Momente

$$S = m \cdot x''$$

Zieht man die Normale von x auf A, ſo iſt das Stück, welches von m aus auf der Richtung der Kraft A abgeſchnitten wird, $= (a) = m \cos \alpha$ und daher das Produkt dieſes Stückes in der Kraft $A = (a)\,A = mA \cos \alpha$. Eben ſo iſt (b) $B = mB \cos \beta$; (c) $C = mC \cos \gamma$ ꝛc. und daher die algebraiſche Summe dieſer Produkte

$$T = m\,[A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma + D \cos \delta + E \cos \varepsilon \ldots].$$

Es iſt aber $A \cos \alpha = (ma') = a'$; $B \cos \beta = (mb') = b'$ ꝛc. folglich iſt, wenn man zugleich auf das Zeichen Rückſicht nimmt,

$$T = m\,[a' + b' + c' - d' - e'].$$

Da nun, nach §. 15., $a' + b' + c' - d' - e' = (mx') = x'$, ſo iſt $T = m \cdot x'$

Es ſind ſonach $S = m \cdot x''$ und $T = m \cdot x'$ die geſuchten Produkte.

Zuſatz. Sind nun die Kräfte A, B, C, D, E... unter ſich im Gleichgewicht, ſo iſt $x' = 0$ und auch $x'' = 0$; es iſt alſo in dieſem Falle $S = 0$ und $T = 0$.

Stehen alſo mehrere Kräfte, deren Richtungen in einer Ebene liegen, unter ſich im Gleichgewicht, ſo iſt ſowohl die Summe ihrer Momente, als auch die Summe der Produkte, welche erhalten werden, wenn man jede Kraft mit ihrem Wege in paralleler Richtung in Beziehung auf irgend einen Punkt multiplicirt, $= 0$.

Aufgabe 4. Auf einen Punkt m wirken mehrere Kräfte, deren Richtungen in verſchiedenen Ebenen liegen; es ſoll die Summe der Produkte beſtimmt werden, welche man erhält, wenn jede Kraft mit ihrem Wege in paralleler Richtung in Beziehung auf dieſen Punkt multiplicirt wird.

Auflöſung. Iſt n, Fig. 18., der gegebene Punkt, ſo lege man durch m die drei Axen a (a), b (b), c (c) normal auf-

, so daß eine derselben durch den Punkt n geht:
wenn die Kraft mx = A mit der Axe ma einen
α bildet, und man mn = m setzt, das, durch die
on n auf mx, von mx abgeschnittene Stück (a)
α; also ist das Produkt in Beziehung auf die Kraft
A = mA cos α. Eben so ist für eine zweite
s Produkt = (b) · B = mB cos β; für eine dritte
t dasselbe = (c) · C = mC cos γ ꝛc. Die ge-
me der Produkte ist also
= m [A cos α + B cos β + C cos γ...].
§. 17. Aufgabe 4. aber ist
os α = a′, B cos β = b′, C cos γ = c′...
lgebraische Summe von a′ + b′ + c′... = x′,
folglich ist auch T = m · x′
nun die Kräfte unter sich im Gleichgewichte sein,
0 und daher ist auch in diesem Falle
T = 0.
Summe dieser Produkte ist also immer = 0, wenn
n Punkt wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sind,
ieselben in einer oder in verschiedenen Ebenen liegen.
lichtigkeit dieses Satzes in Beziehung auf die Mo-
also auch S = 0 sein muß, wenn mehrere auf
t wirkende, in verschiedenen Ebenen liegende Kräfte
ewichte sind, ist nun leicht nachzuweisen.

ng 1. Fällt man von irgend einem Punkte x Normalen auf
ichtungen der Kräfte A, B, C..., welche auf einen Punkt m
, und setzt das Stück, welches die Normale auf A von die-
raft nach m zu abschneidet, = (a), das auf B abgeschnittene
= (b), das auf C abgeschnittene Stück = (c) ꝛc., so ist,
die Kräfte im Gleichgewichte sind, immer

(a) A + (b) B + (c) C... = 0

ieser Satz, welcher für die ganzen mechanischen Wissenschaf-
on bedeutender Wichtigkeit ist, wird das Princip der
ellen Geschwindigkeit genannt. Man kann in der
k von diesem Satze als von einem Grundsatze ausgehen und
s die sämmtlichen Lehren der Wissenschaft ableiten.

ung 2. Die Aufgabe 2. führt zu dem Resultate, daß die
ung

(a) A + (b) B + (c) C = 0

ei Kräften stattfindet, wenn A und B die Seiten und C die-

rückwärts verlängerte Diagonale eines Parallelogramms ist. Hieraus läßt sich nun umgekehrt folgern, daß drei Kräfte, die diese Größe und Lage haben, im Gleichgewichte sein müssen; man kann also umgekehrt aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeit das Parallelogramm der Kräfte ableiten, worauf alle in dem gegenwärtigen Abschnitte vorkommenden Sätze beruhen. Da nun, wie aus dem Folgenden sich ergeben wird, auch alle übrigen Sätze der Statik von dem Parallelogramm der Kräfte abhängen, so läßt sich hieraus erkennen, in wiefern es möglich ist, das Princip der virtuellen Geschwindigkeit als Grundlage der ganzen Statik anzunehmen.

§. 19.

Bemerkungen und Uebungen.

1. Das Parallelogramm der Kräfte ist für die sämmtlichen mechanischen Wissenschaften von der größten Wichtigkeit, da mittelst desselben das Resultat der vereinten Wirkung mehrerer Kräfte auf eine einfache Weise erklärt, und umgekehrt jede Kraft in mehrere andre zerlegt werden kann. Die Theorie dieses Satzes bildet daher die Grundlage für die ganze Statik, und die Begründung derselben ist von den Mathematikern auf verschiedene Weise versucht worden, worüber hier um so mehr Einiges mitgetheilt zu werden verdient, da diese Mittheilungen zugleich als die Grundlage sehr wichtiger Uebungen für die ganze Statik angesehen werden müssen. — Also

a. Die sämmtlichen Gesetze des Gleichgewichts beruhen, wie auch Lagrange in seiner analytischen Mechanik annimmt, auf drei Sätzen; nämlich: auf dem des Gleichgewichts bei dem Hebel, auf dem der Zusammensetzung der Bewegung (das Parallelogramm der Kräfte) und auf dem Bestreben nach Geschwindigkeit, welches das Princip der virtuellen Geschwindigkeit ist. Jeder dieser drei Sätze kann als Grundlage benutzt werden, und es lassen sich dann die beiden übrigen aus demselben ableiten. In dem Vorhergehenden ist bereits hinlänglich nachgewiesen, wie das Parallelogramm der Kräfte und das Princip der virtuellen Geschwindigkeit von einander abhängen, und in dem folgenden Abschnitte wird nun auch gezeigt werden, wie hiervon die Gesetze des Gleichgewichts bei dem Hebel sich ableiten lassen, und in wie fern es möglich ist, umgekehrt aus diesen jene herzuleiten.

b. Den Satz von dem Parallelogramm der Kräfte hat

man als Grundlage der Statik philosophisch dadurch zu beweisen gesucht, daß man von dem Grundsatze ausging: es kann keine Kraft verloren gehen, und hieraus die Regel ableitete: Wenn zwei Kräfte zu gleicher Zeit auf einen Punkt wirken, so wird dadurch derselbe Erfolg hervor gebracht, als wenn dieselben einzeln, eine nach der andern, ihre Wirkung äußern. Es ist einleuchtend, daß auf diese Weise ein Punkt am Ende seiner Bewegung an dem Endpunkte der Diagonale des Parallelogramms sich befinden muß. Besonders gründlich ist, was hierüber Kant in den metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaften, Seite 18., sagt. Kant stellt den Satz auf: Jede Bewegung als Gegenstand einer möglichen Erfahrung kann nach Belieben, als Bewegung des Körpers in einem ruhigen Raume, oder als Ruhe des Körpers bei einer Bewegung des Raumes in entgegengesetzter Richtung, mit gleicher Geschwindigkeit, angesehen werden. Demnach kann nun auch die Zusammensetzung zweier Bewegungen eines und desselben Punktes dadurch gedacht werden, daß man eine derselben dem Punkte beilegt, statt der andern aber eine Bewegung des Raumes mit gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung annimmt. Diese Vorstellung führt unmittelbar zu dem Resultate, daß der Punkt die Diagonale des Parallelogramms beschreiben muß, wenn die Richtungen beider Kräfte einen Winkel einschließen.

c. Das Parallelogramm der Kräfte als Grundlage der ganzen Statik hat auch Eytelwein in seinem Handbuche der Statik fester Körper angenommen, und der von demselben gegebene Beweis ist durch Brandes in seinem „Lehrbuche der Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung" weiter ausgeführet. Einen Versuch zu einem einfachen Beweise dieses Satzes findet man auch in einer Abhandlung von J. J. J. Hoffmann, die den Titel führt: „Die Lehre von der Zusammensetzung und Auflösung der Kräfte, unabhängig von der Theorie des Hebels ꝛc."

2. Das Verhältniß zweier Kräfte V und v, welche die Massen P und p mit den Geschwindigkeiten G und g bewegen, ist ausgedrückt durch die Proportion

$$V : v = PG : pg$$

und es iſt daher PG der Ausdruck für die verhältnißmäßige Wirkung einer Kraft, in ſo fern durch dieſelbe eine wirkliche Bewegung erfolgt. Findet aber ein bloßes Beſtreben zur Bewegung ſtatt, ſind alſo die Kräfte im Gleichgewicht, ſo kann PG noch immer beibehalten werden, wenn P die Kraft bedeutet und G das Beſtreben zur Geſchwindigkeit. Es iſt aber hier G keine beſtimmte Größe, ſondern hat nur einen relativen Werth im Verhältniß zu den Beſtrebungen der übrigen bei dem Gleichgewichte vorkommenden Kräfte. Nimmt man nun einen beliebigen Punkt x, Fig. 19., an, und fällt auf die Richtungen der im Gleichgewicht ſtehenden Kräfte die Normalen xa, xb, xc, ſo ſind hier unbedingt, in Beziehung auf den Punkt x, die von m aus auf den Richtungen der Kräfte abgeſchnittenen Stücke ma = (a), mb = (b) und mc = (c), wo dieſe letztere Größe negativ iſt, die zuſammengehörigen Werthe von G für die Kräfte A, B, C; die Summe der Wirkungen dieſer drei Kräfte wird daher ausgedrückt durch A (a) + B (b) + C (c). Da aber bei dem Gleichgewichte die Wirkungen ſich gegenſeitig vernichten, ſo muß auch dieſe Summe, wenn Gleichgewicht ſtattfinden ſoll, = 0 ſein, und dieſes iſt das Princip der virtuellen Geſchwindigkeit, aus welchem, wie bereits gezeigt worden iſt, die Theorie des Parallelogramms der Kräfte abgeleitet werden kann, ſo daß man alſo von dieſem Principe eben ſowohl, als von dem Parallelogramm der Kräfte in der Statik ausgehen kann.

3. Werden drei im Gleichgewicht ſtehende Kräfte mit A, B, C bezeichnet und die ihnen gegenüberliegenden Winkel, wie Fig. 15. zeigt, mit a, b, c, ſo findet man für beſtimmte Werthe von drei dieſer Größen für die übrigen in den hier angegebenen Fällen folgende Reſultate:

α. Gegeben A = 85 Pf.; B = 65 Pf.; ∠c = 69° 20′. Hieraus wird gefunden C = 123,89; a = 140° 3′ 54″; b = 151° 36′ 6″.

β. Gegeben A = 43 Pf.; B = 65 Pf.; C = Pf. Hieraus findet man a = 142° 52′ 45″; b = 114° 49′ 54″; c = 102° 7′ 21″.

γ. Gegeben a = 108°; b = 142°; c = 110°. Hieraus findet man A : B : C = 951 : 616 : 940.

4. Noch verdienen hier folgende Sätze angeführt zu werden:

a. Soll zwischen drei Kräften Gleichgewicht möglich sein, müssen je zwei derselben zusammen größer als die dritte sein.

b. Wirkt eine Kraft C unter einem Neigungswinkel $= \varphi$ gegen eine unverrückbare Ebene, so ist der normale Druck, welchen die Ebene hierdurch erleidet, $= C \sin \varphi$, und $C \cos \varphi$ ist eine hieraus entstehende Kraft parallel zur Ebene.

c. Zwei unverrückbare Ebenen sind unter einem Winkel $= \varphi$ miteinander verbunden, und auf die gemeinschaftliche Durchschnittslinie wirkt normal eine Kraft $= C$, so daß ihre Richtung mit der einen Ebene m einen Winkel $= \alpha$ und mit der andern einen Winkel $= \beta$ bildet, und sonach $\alpha + \beta = \varphi$ ist. Es soll der normale Druck angegeben werden, welchen jede dieser Ebenen erleidet.

Setzt man den normalen Druck auf $m = M$ und den auf $n = N$, so ist

$$M = \frac{C \cos \alpha}{\sin \varphi} \text{ und } N = \frac{C \cos \beta}{\sin \varphi}.$$

d. Wie groß ist der normale Druck auf beide Ebenen in dem Falle, wenn C gegen die Durchschnittslinie ebenfalls geneigt ist und zwar unter einem Winkel $= \psi$, und wenn α und β die Winkel sind, welche eine durch C und die Durchschnittslinie gelegte Ebene mit den unverrückbaren Ebenen bildet?

Antwort. In diesem Falle ist $M = \frac{C \sin \psi \cos \alpha}{\sin \varphi}$ und $N = \frac{C \sin \psi \cos \beta}{\sin \varphi}$ und es entsteht alsdann noch ein Druck in der Richtung der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie $= C \cos \psi$.

e. Der Satz, §. 18. Aufgabe 2., giebt für das Gleichgewicht die Gleichung

$$A\,(a) + B\,(b) + C\,(c) = 0$$

und wird nach der Bezeichnung, Fig. 20.,

$$-A \cos(\varphi - \beta) - B \cos(\varphi + \alpha) + C \cos \varphi = 0.$$

Hieraus soll unmittelbar durch Reduction der Satz, §. 18. Aufgabe 1., gefunden werden, wonach

$$Aa + Bb + Cc = 0$$

oder, nach Fig. 20., $A \sin(\varphi - \beta) - B \sin(\varphi + \alpha) + C \sin \varphi = 0$.

Zweiter Abschnitt.

Aufgaben und Uebungen, welche sich auf den Hebel und die davon abhängenden Erscheinungen beziehen.

§. 20.

Erklärungen.

1. Jede feste unbiegsame Linie, die in einem ihrer Punkte so unterstützt ist, daß sie sich frei um denselben drehen kann, wird ein **Hebel** genannt, und der Punkt, um welchen sie sich frei dreht, ist der **Unterstützungspunkt** oder **Ruhepunkt** desselben. Die Punkte des Hebels, an welchen Kräfte wirken, nennt man die **Angriffspunkte**.

2. Kräfte am Hebel sind einander entgegengesetzt, wenn sie denselben nach entgegengesetzten Richtungen um den Unterstützungspunkt zu drehen sich bestreben; wenn ihre Wirkungen auf den Hebel sich gegenseitig aufheben, so daß keine Drehung desselben erfolgen kann, so sind die Kräfte im Gleichgewicht.

3. Ist g der Unterstützungspunkt des Hebels ab, Fig. 21., und es sind auf entgegengesetzten Seiten von g an a und b die Kräfte A und B angebracht, die beide nach unten wirken, so sind diese Kräfte einander entgegengesetzt, weil durch die eine A ein Sinken des Punktes a bewirkt wird, womit notwendig ein Steigen des Punktes b verbunden ist, während durch B der Punkt b sinkt und a steigt. Sollen aber bei dem in g unterstützten Hebel zwei Kräfte entgegengesetzt sein, die wie A und C an Punkten a und c angebracht sind, welche beide auf derselben Seite von g liegen, so muß, wenn die eine in der Richtung aA nach unten wirkt, die andere in der Richtung cC nach oben wirkend angebracht werden. Man unterscheidet die Hebel gewöhnlich — nach den beiden hier angegebenen verschiedenen Arten, wie zwei Kräfte an denselben entgegengesetzt sein können — in zwei Gattungen und nennt diejenigen, bei welchen der Unterstützungspunkt g zwischen den

Angriffspunkten beider Kräfte liegt, doppelarmig, während die Hebel, wo beide Kräfte auf einer und derselben Seite von g liegen, einarmig genannt werden. Ueberhaupt versteht man unter einem Arme des Hebels den Theil desselben, welcher auf einer Seite des Ruhepunktes liegt.

4. Sieht man einen Hebel bloß als eine mathematische Linie ohne Schwere an, nimmt man also bei Betrachtung desselben auf sein Gewicht keine Rücksicht, so wird er ein mathematischer Hebel genannt: dagegen nennt man ihn einen physischen Hebel, wenn bei demselben auch sein Gewicht beachtet wird.

5. Liegen die Angriffspunkte der Kräfte bei einem Hebel mit dem Unterstützungspunkte in einer geraden Linie, so wird er geradlinig genannt, und man nennt ihn einen gebrochenen Hebel, wenn dieses nicht der Fall ist. Doch wird hierbei immer, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird, vorausgesetzt, daß die Angriffspunkte mit dem Unterstützungspunkte in derselben Ebene liegen, und daß auch die Richtungen der an dem Hebel wirkenden Kräfte in derselben Ebene sich befinden.

§. 21.

Aufgabe.

An dem geradlinigen, in h unterstützten Hebel ab, Fig. 22., sind die beiden an a und b normal gegen den Hebel wirkenden Kräfte A und B im Gleichgewicht; es soll angegeben werden, wie beide Kräfte zu einander sich verhalten, und welchen Druck der Unterstützungspunkt h erleidet.

Auflösung. Man beschreibe über ab, als den Abstand der Angriffspunkte beider Kräfte von einander, einen Halbkreis, errichte in h die Normale, welche denselben in X schneidet, und ziehe von X an a und b die Linien Xa, Xb; nehme nun auf Xh die Xx = X von beliebiger Größe, vollende das Rechteck Xyxz, mache die Verlängerung ay′ = Xy und bz′ = Xz und entwerfe die hierdurch bestimmten Rechtecke aAy′α und bBz′β, so ist

das Dreieck aαy′ ähnlich dem Dreieck xXy
und » bβz′ » » xzX.

Daher ist $ay' : a\alpha = Xx : xy$
und $bz' : b\beta = Xx : xz$.

Nun ist aber vermöge der Construction
$ay' = Xy = xz$ und $xy = Xz = bz'$
folglich sind von der ersten Proportion die äußern Glieder, einzeln genommen, den äußern Gliedern der zweiten gleich, und da nun überdies beide Proportionen das dritte Glied gemein haben, so muß auch das zweite Glied der ersten Proportion dem der zweiten gleich sein; hiernach ist

$$a\alpha = b\beta.$$

Die Richtung der Kraft $Xx = X$ geht durch den Unterstützungspunkt h und wird also, weil dieser unverrückbar ist, durch denselben im Gleichgewicht erhalten, der hiernach mit der Kraft $X' = X$ in der Richtung hX widersteht. Nun ist aber

X äquipollent den Kräften $Xy = y$ und $Xz = z$,
folglich sind y und z ebenfalls mit X' im Gleichgewicht.

Ferner ist $y = ay'$ äquipollent $a\alpha = \alpha$ und $aA = A$
und $z = bz'$ « $b\beta = \beta$ » $bB = B$,

also müssen auch die vier Kräfte α, β, A und B mit X' im Gleichgewichte sein. Nun ist aber $\alpha = \beta$ und beide wirken nach entgegengesetzten Richtungen, sie sind also unter sich im Gleichgewicht: folglich sind auch, wenn man α und β wegläßt, A und B noch immer mit X' im Gleichgewicht. Das Verhältniß der beiden Kräfte A und B, welche bei dem in h unterstützten Hebel im Gleichgewichte sein sollen, ist also durch die Linien $aA = A$ und $bB = B$ bestimmt, und die Kraft $X' = xX$ giebt die Größe des Druckes, welchen h erleidet.

Nun ist das Dreieck aAy' ähnlich dem Dreieck Xha
und » bBz' » » Xhb,
folglich ist $y'A : Aa = ah : hX$
und $z'B : Bb = bh : hX$,

nämlich es ist

$$\alpha : A = ah : hX$$
$$\text{und } \beta : B = bh : hX.$$

Da nun $\alpha = \beta$, so folgt aus den beiden Proportionen

$$A : B = bh : ah.$$

Die beiden am Hebel im Gleichgewicht stehenden, norma

gegen den Hebel wirkenden Kräfte A und B verhalten ſich alſo zu einander umgekehrt wie die Hebelarme bh und ah, an welchen ſie wirken.

Die Größe des Druckes $X = Xx$, welchen h erleidet, läßt ſich auf folgende Art beſtimmen: Es iſt

$$X^2 = (Xy)^2 + (yz)^2 = y^2 + z^2$$

$y^2 = (ay')^2 = A^2 + \alpha^2$ und $z^2 = (bz')^2 = B^2 + \beta^2$

folglich iſt auch $X^2 = A^2 + B^2 + \alpha^2 + \beta^2$

und weil $\alpha = \beta$, ſo iſt

$$X^2 = A^2 + B^2 + 2\alpha^2$$

Nun iſt aber $a\alpha : \alpha y' = bB : Bz'$

nämlich $\alpha : A = B : \beta$

und daher $\alpha\beta = AB$, folglich iſt auch

$$X^2 = A^2 + B^2 + 2AB = (A + B)^2$$

und hiernach $X = A + B$

Der Druck, welchen h erleidet, iſt alſo der Summe der beiden Kräfte A und B gleich.

Sollen alſo bei einem doppelarmigen Hebel zwei in normaler Richtung gegen denſelben wirkende Kräfte im Gleichgewichte ſein, ſo müſſen dieſe ſich umgekehrt zu einander verhalten, wie die Hebelarme, und der Ruhepunkt erleidet in dieſem Falle einen Druck parallel zu der Richtung der Kräfte, welcher der Summe beider Kräfte gleich iſt.

§. 22.

Aufgaben und Uebungen.

Aufgabe 1. An einem Hebel ab, Fig. 21., wirken normal die beiden Kräfte A und B; es ſoll die Größe und Lage einer dritten Kraft C gefunden werden, welche mit A und B im Gleichgewicht iſt, ſo daß C zugleich die Stelle des Unterſtützungspunktes vertritt.

Auflöſung. Es ſei c der Punkt, in welchem der Hebel unterſtützt werden müßte, wenn A und B unter ſich im Gleichgewichte ſein ſollten; man ſetze $ab = m$ und $ac = x$, ſo iſt $bc = m - x$, und es muß nun ſein

$$A : B = (bc) : (ac)$$

alſo $A : B = m - x : x$

folglich $A + B : B = m : x$

und hieraus folgt

$$x = \frac{Bm}{A + B}$$

wodurch die Lage des Punktes c bestimmt ist.

Der Druck, welchen c erleidet, ist = A + B, und eben so groß muß also die dritte Kraft C sein, welche an c in der Richtung cC angebracht, die Stelle des Unterstützungspunktes vertreten soll.

Aufgabe 2. An dem Hebel ah, Fig. 21., wirken an den Punkten b und c die Kräfte B und C normal nach entgegengesetzten Richtungen, und es ist a der Unterstützungspunkt, der Hebel also einarmig; es sollen die Bedingungen des Gleichgewichts angegeben werden.

Auflösung. Wenn die drei Kräfte A, B und C im Gleichgewichte sind, so verhindert A bloß das Steigen des Punktes a, und da dieses auch alsdann verhindert wird, wenn man a befestigt, also als Drehungspunkt annimmt, so folgt, daß bei dem einarmigen Hebel die Kräfte C und B ihrer Größe und Lage nach dieselben sein müssen, als wenn sie mit einer dritten Kraft A im Gleichgewichte wären, und es ist daher noch immer

$$A : B = bc : ac$$

und daher $A + B : B = ah : ac$

und weil $A + B = C$, so folgt

$$C : B = ab : ac$$

Kräfte, die am einarmigen Hebel im Gleichgewichte sind, verhalten sich also ebenfalls zu einander umgekehrt wie die Hebelarme, an welchen sie wirken.

Da statt des Unterstützungspunktes bei a eine Kraft = A = C — B in der Richtung aA angebracht werden könnte, so folgt, daß C — B der Druck ist, welchen der Unterstützungspunkt a in der Richtung Aa erleidet.

Aufgabe 3. Es sollen die Bedingungsgleichungen für drei, normal am Hebel angebrachte, im Gleichgewicht stehende Kräfte angegeben werden.

Auflösung. Es sei für irgend einen im Hebel oder dessen Verlängerung angenommenen Punkt m, Fig. 21., der Abstand des Angriffspunktes a der Kraft A von demselben, also ma = a

r Abstand des Angriffspunktes b der zweiten Kraft B, also
b = b, und der von C, also mc = c; so ist (ca) = c − a
nd (cb) = b − c.

Da nun A : B = (cb) : (ca) sein muß,

so ist auch A : B = b − c : c − a

und daher A(c − a) = B(b − c)

nämlich es ist (A + B)c = Aa + Bb

nd weil A + B = C, so wird Cc = Aa + Bb. Die bei-
den Bedingungsgleichungen sind also

A + B = C und cC = aA + bB

Weil aber (ohne Rücksicht auf einen Drehungspunkt) C nach einer
ntgegengesetzten Richtung von A und B wirkt, so ist eigent-
ich in Beziehung auf A und B die Richtung von C negativ,
nd es wird sonach, wenn man hierauf Rücksicht nimmt,

A + B = − C und − cC = aA + bB

Daher sind die beiden Bedingungsgleichungen für normal an
inem Hebel wirkende Kräfte, mit Rücksicht auf positive und
egative Richtung derselben,

A + B + C = 0 und aA + bB + cC = 0

ämlich es ist, wenn die Kräfte im Gleichgewichte sein sollen,
ie algebraische Summe derselben sowohl, als die algebraische
Summe ihrer Momente in Beziehung auf den Punkt m = 0.

Aufgabe 4. Es sind die Punkte a, b, c und die eine
Kraft C gegeben; man soll hieraus die beiden übrigen Kräfte
A und B berechnen.

Auflösung. Da A + B + C = 0, und auch
aA + bB + cC = 0,

so folgt $B = -A - C$ und $B = \frac{-aA - cC}{b}$

enn die Bezeichnung beibehalten wird ma = a, mb = b und
mc = c. Es ist also auch

$$A + C = \frac{aA + cC}{b}$$

nd hieraus findet man

$$A = \frac{(c - b)C}{b - a}$$

und eben so $B = \frac{(a-c)C}{b-a}$

nämlich es ist $A = -\frac{(bc)C}{(ab)}$ und $B = -\frac{(ac)C}{(ab)}$

Zusatz 1. Ist die Linie ab in a und b unterstützt und in c mit einer Last = C beschwert, so geben die so eben gefundenen Formeln den Druck, welchen die Unterlagen in a und b von dieser Last erleiden.

Zusatz 2. So wie in der gegenwärtigen Aufgabe aus a, b, c und C die beiden Größen A und B gefunden worden sind, so lassen sich überhaupt je zwei der 6 Größen a, b, c, A, B und C, wenn die vier übrigen gegeben sind, mit Hülfe der beiden Formeln finden

$$A + B + C = 0 \text{ und } aA + bB + cC = 0$$

wobei nur auf positive und negative Richtung der Kraft Rücksicht genommen werden muß.

Aufgabe 5. An einem grablinigen Hebel $\alpha\beta$, Fig. 23, der in c unterstützt ist, wirken in a und b die Kräfte aA=A und bB = B unter beliebigen Neigungswinkeln maA = φ und mbB = ψ; es sollen die Bedingungen für das Gleichgewicht dieser Kräfte angegeben werden, so wie auch der Druck, welchen der Unterstützungspunkt erleidet.

Auflösung. Zerlegt man A und B in Seitenkräfte normal gegen den Hebel und in der Richtung desselben, also

$$aA = A \text{ in } aA' = A' \text{ und } a\alpha = \alpha \text{ und}$$
$$bB = B \text{ in } bB' = B' \text{ und } b\beta = \beta$$

so können die Seitenkräfte α und β keine Bewegung erzeugen, weil der Punkt c das Verrücken des Hebels hindert, und es müssen daher die Theilkräfte A' und B' für sich im Gleichgewichte sein; mithin muß die Proportion statt finden

$$(ca) : (cb) = B' : A'$$

und, weil $A' = A \sin\varphi$ und $B' = B \sin\psi$,

$$(ca) : (cb) = A \sin\varphi : B \sin\psi$$

Die Kräfte mit den Sinus ihrer Neigungswinkel multiplicirt müssen sich also umgekehrt verhalten wie die Abstände ihrer Angriffspunkte von dem Unterstützungspunkte.

Der Unterstützungspunkt c erleidet einen Druck = $\alpha - \beta$ in der Richtung des Hebels und A' + B' normal gegen den

selben. Zieht man aber an c parallel zu aA und bB Linien, die den Kräften A und B gleich sind, und zerlegt sie eben so, wie sie an a und b zerlegt sind, so erhält man ebenfalls die Kräfte $\alpha - \beta$ in der Richtung des Hebels und $A' + B'$ normal gegen denselben. Der Punkt c erleidet also denselben Druck, als wenn die beiden Kräfte A und B parallel zu ihren Richtungen unmittelbar an denselben angebracht wären.

Aufgabe 6. Drei Kräfte, deren Richtungen in derselben Ebene liegen, wirken unter beliebigen Neigungswinkeln auf einen Hebel; es sollen die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht angegeben werden.

Auflösung. Die Kraft A wirke an dem Punkte a, Fig. 24., unter dem Neigungswinkel $maA = \alpha$, und es sei $ma = a$; B wirke an b unter dem Winkel $mbB = \beta$, und es sei $mb = b$; eben so sei $mc = c$, und der Winkel, unter welchem C wirkt, also $mcC = \gamma$, wobei die Winkel alle nach einer und derselben Richtung herum genommen werden, und also hier γ ein Winkel $> 180°$ ist: so läßt sich nun jede der 3 Kräfte A, B, C in zwei Seitenkräfte zerlegen, von welchen die eine normal gegen den Hebel ist, und die andere mit der Richtung desselben zusammenfällt. Demnach ist, wenn in Beziehung auf A die erstere $= A'$ und die andere $= A''$ gesetzt wird,

$$A' = A\sin\alpha \text{ und } A'' = A\cos\alpha$$

und eben so ist, wenn man die Seitenkräfte in Beziehung auf B mit B' und B'', und in Beziehung auf C mit C' und C'' bezeichnet,

$$B' = B\sin\beta \text{ und } B'' = B\cos\beta$$
$$C' = C\sin\gamma \text{ und } C'' = C\cos\gamma$$

Für die normal gegen den Hebel wirkenden Kräfte hat man nun, nach Aufgabe 3., die beiden Gleichungen

$$A' + B' + C' = 0$$
$$\text{und } aA' + bB' + cC' = 0$$

und weil auch die algebraische Summe der Theilkräfte, deren Richtungen mit dem Hebel zusammenfallen, $= 0$ sein muß, wenn nicht eine Bewegung in der Richtung des Hebels statt finden soll, so muß auch sein

$$A'' + B'' + C'' = 0$$

Daher ſind die Bedingungsgleichungen

1. $A\sin\alpha + B\sin\beta + C\sin\gamma = 0$
2. $aA\sin\alpha + bB\sin\beta + cC\sin\gamma = 0$

und 3. $A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0$

Zuſatz 1. Dieſe Gleichungen haben auch für normal wirkende Kräfte Gültigkeit, mit daß in dieſem Falle die dritte Gleichung wegfällt, indem alsdann $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 0$ iſt.

Zuſatz 2. Sind A, B, α und β gegeben, ſo laſſen ſich mit Hülfe dieſer Gleichungen die Werthe von C, c und γ berechnen. Es giebt nämlich die erſte Gleichung

$$-C\sin\gamma = A\sin\alpha + B\sin\beta$$

und die zweite $-C\sin\gamma = \dfrac{aA\sin\alpha + bB\sin\beta}{c}$

und durch Gleichſetzung beider erhält man

$$c = \frac{aA\sin\alpha + bB\sin\beta}{A\sin\alpha + B\sin\beta}$$

wodurch der Angriffspunkt der dritten Kraft beſtimmt iſt. Da ferner

nach Gleichung 1) $-C\sin\gamma = A\sin\alpha + B\sin\beta$

und » 3) $-C\cos\gamma = A\cos\alpha + B\cos\beta$

ſo erhält man hieraus durch Diviſion

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{A\sin\alpha + B\sin\beta}{A\cos\alpha + B\cos\beta}$$

für die Richtung der dritten Kraft, und ſetzt man zur Abkürzung

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{x'}{x''}$$

ſo iſt nun auch leicht anzugeben, in welchem Quadranten der Werth von γ genommen werden muß. Iſt nämlich $x' = A\sin\alpha + B\sin\beta$ und auch $x'' = A\cos\alpha + B\cos\beta$ poſitiv, ſo muß $\gamma < 90°$ genommen werden.

Iſt x' poſitiv und x'' negativ, ſo wird $\gamma > 90°$ und $< 180°$

» x' negativ » x'' negativ, » $\gamma > 180°$ und $< 270°$

» x' negativ » x'' poſitiv, » $\gamma > 270°$ und $< 360°$

Der Werth von C endlich iſt durch die Gleichung beſtimmt

$$-C\sin\gamma = A\sin\alpha + B\sin\beta = x'$$

Weil aber $\operatorname{tg}\gamma = \frac{x'}{x''}$ und $\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)}}$

so ist $\sin\gamma = \frac{\frac{x'}{x''}}{\sqrt{\left(1+\frac{(x')^2}{(x'')^2}\right)}} = \frac{x'}{\sqrt{[(x')^2+(x'')^2]}}$

und daher auch $\frac{-Cx'}{\sqrt{[(x')^2+(x'')^2]}} = x'$

folglich ist $-C = \sqrt{[(x')^2+(x'')^2]}$

$= \sqrt{[(A\sin\alpha + B\sin\beta)^2 + (A\cos\alpha + B\cos\beta)^2]}$.

Aufgabe 7. Es ist acb, Fig. 25., ein in c unterstützter gebrochener Hebel, so daß ac und cb eine unveränderliche Lage gegen einander haben; an den Punkten a und b sind die Kräfte A und B in den Richtungen aA und bB angebracht. Es soll angegeben werden, unter welchen Umständen sich dieselben im Gleichgewicht erhalten.

Auflösung. Die Wirkung einer Kraft ist unabhängig von ihrem Angriffspunkte, und kann daher in jedem Punkte ihrer Richtung wirkend gedacht werden; legt man also durch c eine grade Linie, welche die Richtungen der Kräfte in α und β schneidet, so kann man auch A als an α und B als an β wirkend sich vorstellen: da nun $\alpha c\beta$ ein gradliniger Hebel ist, so muß A zu B sich umgekehrt verhalten, wie der normale Abstand der Richtungen beider Kräfte von c, und es gelten daher für den gebrochenen Hebel dieselben Gesetze wie für den gradlinigen. Auch ist der Druck, welchen c erleidet, eben so groß, als wenn die Kräfte A und B parallel zu ihren Richtungen unmittelbar in c angebracht würden. Zugleich geht hieraus hervor, daß die, Aufgabe 6., gefundenen Gleichungen für alle Hebel ohne Ausnahme Gültigkeit haben, indem man durch eine gezogene grade Linie, welche die Richtungen der Kräfte schneidet, den gebrochenen Hebel immer auf einen gradlinigen zurückführen kann.

Zusatz. Es sei der Winkel acb, welchen die Hebelarme einander bilden, $= c'$; der Winkel, welchen A mit ca bildet, also $Aac = a'$, und der von B mit cb, also $Bbc = b'$; ferner sei durch c die Linie $m\beta$ so gezogen, daß $\angle m\alpha A = \alpha$, und hierdurch $\angle m\beta B = \beta$ bestimmt. Denn es ist

$$\beta = b' + \angle bc\beta$$
$$\angle bc\beta = 180° - (c' + acx)$$
alſo $\beta = b' + 180° - c' - \angle acx$
und $\angle acx = 180° - (a' + \alpha)$
folglich iſt auch
$$\beta = b' + 180° - c' - 180° + (a' + \alpha)$$
nämlich es iſt
$$\beta = a' + b' + \alpha' - c'$$

§. 23.

Die Theorie des Hebels betreffende Uebungen.

Die Unterſuchung über die Theorie des Hebels ſtützt ſich auf den beiden Sätzen:

1. Die algebraiſche Summe der drei Kräfte, welche bei einem Hebel normal wirkend im Gleichgewichte ſind, iſt = 0, und es kann jede dieſer Kräfte hinweggelaſſen werden, wenn man ſtatt derſelben einen unverrückbaren Unterſtützungspunkt anbringt, und

2. Je zwei der drei normal auf den Hebel wirkenden Kräfte verhalten ſich zu einander, wenn Gleichgewicht ſtatt findet, umgekehrt wie ihr Abſtand von dem Angriffspunkte der dritten Kraft.

Dieſe beiden Sätze, aus welchen alle übrigen, wie §. 2[illegible] geſchehen iſt, abgeleitet werden können, ſind, §. 21., mit Hilfe der Theorie des Parallelogramms der Kräfte gefunden worden. Es ſoll hier nun unterſucht werden, in wie fern es möglich iſt, dieſe beiden Sätze unabhängig vom Parallelogramm zu finden, und daraus umgekehrt die Theorie deſſelben abzuleiten.

1. Iſt der Hebel, Fig. 26., in x unterſtützt, ſind die Arme xa und xb deſſelben gleich groß, und ſind an denſelben zwei gleich große normal wirkende Kräfte A und B angebracht, ſo findet Gleichgewicht ſtatt, weil für das Gleichgewicht beider Angriffspunkte a und b gleiche Gründe vorhanden ſind, und daher entweder ein Biegen des Hebels erfolgen, oder Gleichgewicht ſtatt finden muß. Der Unterſtützungspunkt x erleidet normal einen Druck = A + B = 2A, und es kann derſelbe daher weggelaſſen werden, wenn man ſtatt deſſen

in entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft X = 2A anbringt.

2. Die Kraft A an a verhindert bloß das Steigen des Punktes a, und da dieses auch verhindert wird, wenn man bei a eine Widerlage anbringt, so kann bei einer solchen Vorrichtung die Kraft A weggelassen werden, wodurch der Hebel in einen einarmigen verwandelt wird, an welchem die Kraft X = 2A, in der Entfernung ax vom Unterstützungspunkt a, mit der Kraft B = A in der Entfernung ab = 2(ax) im Gleichgewicht ist. Am einarmigen Hebel ist also die zweifache Kraft, in einfacher Entfernung von dem Unterstützungspunkte, mit der einfachen Kraft in der zweifachen Entfernung im Gleichgewicht, und die Widerlage an a erleidet einen Druck=A.

3. Nimmt man az = ax, bringt an z und x die gleichen Kräfte Z = X′ nach unten wirkend an, und an a eine Kraft V=Z+X′=2X′ nach oben, so sind diese drei Kräfte unter sich im Gleichgewicht, und das vorher bereits vorhandene Gleichgewicht zwischen A, B und X wird also hierdurch nicht gestört. Für X′ = X können nun diese beiden, an x nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte weggelassen werden, und es ist alsdann V = 2X′ = 2X = 4A; folglich ist die Summe der an a wirkenden Kräfte = V — A = 3A nach oben wirkend. Hiernach findet jetzt Gleichgewicht statt zwischen den drei Kräften B = A an b, Z = 2A an z, die nach unten wirken, und V — A = 3A an a nach oben wirkend. Nimmt man nun a als Unterstützungspunkt an, so steht Z mit B im Gleichgewicht, und es ist Z = 2B und der Hebelarm ab = 2 (az). Also auch am doppelarmigen Hebel ist die einfache Kraft in der zweifachen Entfernung von dem Unterstützungspunkte, mit der zweifachen Kraft in der einfachen Entfernung von demselben im Gleichgewicht. Wird aber z als Unterstützungspunkt angenommen, so besteht das Gleichgewicht an dem einarmigen Hebel zb zwischen V — A = 3A an a und B = A an b, und es ist zb=3(za). An dem einarmigen Hebel findet also Gleichgewicht statt zwischen der einfachen Kraft in dreifacher Entfernung mit einer dreifachen Kraft in der einfachen Entfernung.

4. Es sei A = nB, xb = n(xa) und X = A + B

$= (n + 1)B$, und es finde unter dieſen Umſtänden Gleichgewicht ſtatt. Nimmt man nun $az = ax$, $Z = X'$ und $V = Z + X' = 2X'$, ſo wird hierdurch das Gleichgewicht nicht aufgehoben, und man kann für $X' = Z = X$ die Kräfte X' und X weglaſſen, wo alsdann $V = Z + X' = 2X = 2(n + 1)B$ wird. Hiernach iſt jetzt Gleichgewicht zwiſchen $Z = X = (n+1)B$ an z, B an b und $V - A = (2n + 1)B$ an a. Wird nun a als Unterſtützungspunkt angenommen, ſo verhalten ſich die Kräfte

$$B : Z = 1 : n + 1$$

und $az : ab = ax : ab = ax : (ax + xb) = (ax) : (n+1)(ax) = 1 : n+1$

Hieraus folgt alſo, daß, wenn bei einem Hebel die Kräfte B und nB an den Hebelarmen $n(ax)$ und (ax) im Gleichgewichte ſind, daſſelbe auch ſtatt finden muß zwiſchen den Kräften B und $(n + 1)B$ an den Armen $(n + 1)(ax)$ und ax. Dieſes Geſetz hat für jede ganze Zahl $= n$ Gültigkeit, weil es, nach No. 3., für $n = 2$ gilt.

5. Iſt nun, Fig. 26., g der Unterſtützungspunkt des Hebels $gz = k$, $ga = pk$ und $Z = pA$, ſo iſt, für jede beliebige ganze Zahl $= p$, Z und A im Gleichgewicht. Eben ſo iſt für $gx = k$ und $gb = qk$, wenn $X = qB$ iſt, auch X mit B im Gleichgewicht. Nimmt man $X = Z$, ſo ſind dieſe beiden Kräfte unter ſich im Gleichgewicht und können weggelaſſen werden, folglich muß alsdann auch Gleichgewicht ſtatt finden zwiſchen A und B an den Hebelarmen ga und gb, und es iſt

$$ga : gb = pk : qk = p : q$$

Weil aber $Z = pA$, $X = qB$ und $Z = X$, ſo folgt $pA = qB$, und daher auch

$$B : A = p : q$$

folglich iſt $B : A = ga : gb$

Die am Hebel im Gleichgewicht ſtehenden Kräfte B und A verhalten ſich alſo umgekehrt wie die Hebelarme, an welchen ſie wirken.

6. Durch dieſe Sätze iſt nun die Theorie des Hebels ganz unabhängig begründet, und es ergeben ſich hieraus auch die Sätze, §. 22., als unmittelbare Folgerungen: demnach iſt auch die Richtigkeit dieſer Sätze für den gebrochenen Hebel nachgewieſen.

7. Die Theorie des Parallelogramms der Kräfte läßt sich nun aus der des Hebels auf folgende Art ableiten: Wirken, Fig. 27., auf den Punkt m die drei Kräfte A, B und C in den Richtungen mA, mB und mC, so kann C in jedem Punkte ihrer Richtung wirkend gedacht werden, und man kann also auch, wenn Cm rückwärts verlängert wird, C als in dem Punkte x wirkend sich vorstellen. Bei dem Gleichgewichte verhindert C die Bewegung in der Richtung xm; diese Bewegung wird aber auch verhindert, wenn man m mit x durch die Linie mx verbindet und x ein unverrückbarer Punkt ist; die Kraft C wird also durch einen solchen festen Punkt x vertreten. Zieht man nun von x Normalen auf die Richtungen der beiden Kräfte A und B, so entsteht ein gebrochener Hebel axb, auf welchen die Kräfte A und B in normaler Richtung wirken, und es muß jetzt A mit B im Gleichgewichte sein, wenn solches vorher zwischen A, B und C statt fand. Daher muß

$$A : B = xb : xa \text{ sein.}$$

Es ist aber $xb = (xm)\sin\alpha$ und $(xa) = (xm)\sin\beta$, also wird $A : B = \sin\alpha : \sin\beta$.

Dieses führt zu dem Resultate: sind die drei auf den Punkt m wirkenden Kräfte A, B und C im Gleichgewicht, so muß die Kraft C, rückwärts verlängert, den Winkel AmB, welchen die beiden übrigen Kräfte mit einander bilden, so theilen, daß sich die Sinus dieser Winkel zu einander verhalten, umgekehrt wie die Kräfte, an welchen sie anliegen.

Wird der der Kraft A gegenüberliegende Winkel, also der Winkel, welchen die beiden übrigen Kräfte einschließen, $BmC = a$ gesetzt, und eben so $AmC = b$, so ist $a = 180^0 - \alpha$ und $b = 180^0 - \beta$, und es ist daher auch bei dem Gleichgewichte

$$A : B = \sin a : \sin b.$$

Statt daß man Cm verlängert und in x einen festen Punkt anbringt, kann auch Am verlängert werden, und man kann in der Verlängerung der Richtung dieser Kraft einen festen Punkt z anbringen: alsdann erhält man für die Bedingung des Gleichgewichts, wenn $\angle AmB = c$ gesetzt wird, die Proportion

$$B : C = \sin b : \sin c$$

Sollen alſo die drei Kräfte A, B und C im Gleichgewichte ſein, ſo muß die Proportion ſtatt finden

$$A : B : C = \sin a : \sin b : \sin c$$

oder für $C = 180^0 - \gamma$, weil auch $a = 180^0 - \alpha$ und $B = 180^0 - \beta$,

$$A : B : C = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

und es ſind hiernach α, β und γ die drei Winkel eines Dreiecks, die den Seiten A, B und C gegenüberliegen. Hieraus folgt nun unmittelbar, daß C die Größe der Diagonale des Parallelogramms haben muß, in welchem A und B die Seiten ſind, und $AmB = c$ der Winkel, und daß die Richtung von C der dieſer Diagonale gerade entgegengeſetzt ſein muß.

§. 24.

Aufgaben von mehreren am Hebel wirkenden Kräften.

Aufgabe 1. Es wirken zwei Kräfte A und B an dem Hebel, Fig. 24., unter den Neigungswinkeln $maA = \alpha$ und $mbB = \beta$; es ſoll die Größe und Lage einer Kraft X angegeben werden, die denſelben äquipollent iſt.

Auflöſung. Iſt die unter dem Winkel γ wirkende Kraft C mit A und B im Gleichgewicht, ſo muß dieſelbe Kraft, in entgegengeſetzter Richtung angebracht, den Kräften A und B äquipollent ſein, und es iſt daher $X = C$ die Größe der geſuchten Kraft, c der Angriffspunkt derſelben und $\varphi = \gamma - 180^0$ der Neigungswinkel ihrer Richtung.

Nun ſind für die drei im Gleichgewicht ſtehenden Kräfte A, B und C die Bedingungsgleichungen, nach §. 22. Aufgabe 6., für $ma = a$, $mb = b$ und $mc = c$,

$$A\sin\alpha + B\sin\beta + C\sin\gamma = 0$$
$$aA\sin\alpha + bB\sin\beta + cC\sin\gamma = 0$$
$$\text{und } A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0$$

ferner $\sin\gamma = \sin(180^0 + \varphi) = -\sin\varphi$, $\cos\gamma = -\cos\varphi$, und $C = X$; alſo iſt, wenn X äquipollent ſein ſoll A und B, die Größe und Lage von X durch die drei Gleichungen beſtimmt

$$X\sin\varphi = A\sin\alpha + B\sin\beta$$
$$cX\sin\varphi = aA\sin\alpha + bB\sin\beta$$
$$\text{und } X\cos\varphi = A\cos\alpha + B\cos\beta$$

Aufgabe 2. Die Kräfte A, B, C, D, deren Richtun-

ken in derſelben Ebene liegen, wirken an einem Hebel, Fig. 28., unter den Neigungswinkeln α, β, γ, δ; es ſoll die Größe und Lage einer ihnen äquipollenten Kraft am Hebel angegeben werden.

Auflöſung. Es ſei ma = a, mb = b, mc = c, md = d; eine Kraft X′ äquipollent A und B wirke unter einem Neigungswinkel $= \varphi'$, und der Abſtand ihrer Angriffspunkte von m ſei = x′; ferner ſei X″ äquipollent C und X′ der Lage nach beſtimmt durch φ'' und x″, und die Kraft X‴, welche D und X″ äquipollent ſein ſoll, habe eine durch φ''' und x‴ beſtimmte Lage: ſo iſt, nach Aufgabe 1., die Größe und Lage beſtimmt

1) von X′ durch die Gleichungen

$X' \sin\varphi' = A\sin\alpha + B\sin\beta$; $X' \cos\varphi' = A\cos\alpha + B\cos\beta$

und $x'X' \sin\varphi' = aA\sin\alpha + bB\sin\beta$

2) die von X″ durch die Gleichungen

$X'' \sin\varphi'' = X'\sin\varphi' + C\sin\gamma$; $X'' \cos\varphi'' = X'\cos\varphi' + C\cos\gamma$

und $x''X'' \sin\varphi'' = x'X' \sin\varphi' + cC\sin\gamma$ und

3) die von X‴ iſt beſtimmt durch die Gleichungen

$X''' \sin\varphi''' = X''\sin\varphi'' + D\sin\delta$; $X''' \cos\varphi''' = X''\cos\varphi'' + D\cos\delta$

und $x'''X''' \sin\varphi''' = x''X'' \sin\varphi'' + dD\sin\delta$

Werden nun hier die Werthe aus No. 2. ſubſtituirt, und in den hierdurch erhaltenen Ausdrücken die aus No. 1., ſo erhält man die drei Gleichungen

$X''' \sin\varphi''' = A\sin\alpha + B\sin\beta + C\sin\gamma + D\sin\delta$

$X''' \cos\varphi''' = A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma + D\cos\delta$

$x'''X''' \sin\varphi''' = aA\cos\alpha + bB\cos\beta + cC\cos\gamma + dD\cos\delta$

Demnach iſt X‴ äquipollent den Kräften A, B, C und D, und die Lage dieſer Kraft iſt beſtimmt durch φ''' und x‴. Dieſe drei Gleichungen ſind alſo hinreichend, um die geſuchte äquipollente Kraft ihrer Größe und Lage nach zu berechnen. Uebrigens iſt leicht einzuſehen, daß mit Hülfe dieſer Gleichungen die äquipollente Kraft ihrer Größe und Lage nach immer gefunden werden kann, wie groß auch die Anzahl der gegebenen Kräfte ſein mag.

Aufgabe 3. Mehrere Kräfte, deren Richtungen in derſelben Ebene liegen, ſind an einem Hebel im Gleichgewichte; es ſollen die entſprechenden Bedingungsgleichungen angegeben werden.

Auflöſung. Sind die Kräfte A, B, C, D... im Gleichgewichte, ſo iſt die denſelben äquipollente Kraft $X = 0$, und es ſind daher die Bedingungsgleichungen nach Aufgabe 2.

1. $A\sin\alpha + B\sin\beta + C\sin\gamma + D\sin\delta \ldots = 0$
2. $A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma + D\cos\delta \ldots = 0$
3. $aA\sin\alpha + bB\sin\beta + cC\sin\gamma + dD\sin\delta \ldots = 0$

Aufgabe 4. Auf einen Hebel wirken mehrere Kräfte, deren Richtungen in verſchiedenen Ebenen liegen; es ſollen die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht dieſer Kräfte angegeben werden.

Auflöſung. Wirkt an a, Fig. 25., eine Kraft A unter einem Neigungswinkel $= \alpha$, ſo läßt ſich dieſelbe in zwei Kräfte zerlegen $A' = A\cos\alpha$ in der Richtung des Hebels und $M = A\sin\alpha$ normal auf demſelben. Bildet nun die durch die Lage von M und den Hebel zb beſtimmte Ebene mit der Ebene bzZ einen Neigungswinkel $= \alpha'$, ſo kann M wiederum in zwei Kräfte zerlegt werden $A'' = M\cos\alpha'$, deren Richtung in der Ebene bzZ liegt, und $A''' = M\sin\alpha'$ normal gegen dieſe Ebene. Hierdurch wird alſo A in drei Kräfte A′, A″ und A‴ zerlegt. Eine zweite Kraft B kann auf gleiche Weiſe zerlegt werden in B′, B″ und B‴; eine dritte Kraft C in C′, C″ und C‴; eine vierte Kraft D in D′, D″ und D‴ ꝛc.

Die Richtungen der Kräfte A′, B′, C′, D′... fallen mit der des Hebels zuſammen, und es muß daher, wenn keine Bewegung in der Richtung des Hebels ſtatt finden ſoll, die algebraiſche Summe derſelben $= 0$ ſein; dieſes giebt die erſte Bedingungsgleichung

$$A' + B' + C' + D' \ldots = 0$$

Die Kräfte A″, B″, C″, D″... liegen in der Ebene bzZ und ſind normal gegen den Hebel; ſie führen daher zu den beiden Bedingungsgleichungen

$$A'' + B'' + C'' + D'' \ldots = 0$$

und $aA'' + bB'' + cC'' + dD'' \ldots = 0$

Endlich ſind die Kräfte A‴, B‴, C‴, D‴... ebenfalls normal gegen den Hebel und liegen in einer Ebene, welche die Ebene bzZ normal ſchneidet, und dieſes führt alſo noch zu den Gleichungen

$$A''' + B''' + C''' + D''' \ldots = 0$$

und $aA''' + bB''' + cC''' + dD''' \ldots = 0.$

§. 25.

Aufgaben von der festen Axe.

Sind Linien oder Ebenen mit einer geraden Linie ab, Fig. 29., so verbunden, daß sie weder ihre Lage gegeneinander, noch die gegen ab verändern können, und ist ab in a und b so befestigt, daß sich diese Linie nicht verrücken, wohl aber um die festen Punkte a und b frei drehen kann, so wird die gerade Linie ab eine feste Axe oder auch eine Drehungsaxe genannt. Wirkt auf irgend eine Weise auf diese Axe eine Kraft, so kann dadurch, wenn die Punkte a und b einen hinreichenden Widerstand leisten, keine Bewegung erfolgen, und es kann also die Kraft sich bloß durch einen Druck äußern, den die Punkte a und b abzuhalten haben. Hiernach muß sich nun auch für jeden Fall besonders die Größe des Druckes bestimmen lassen, den jeder dieser beiden Punkte a und b erleidet, und nach welcher Richtung derselbe wirkt. Dieses führt zu folgenden Aufgaben:

Aufgabe 1. An dem Punkte c der festen Axe ab, Fig. 29., wirkt eine Kraft C normal gegen ab; es soll die Größe und Richtung des Druckes bestimmt werden, welchen hierdurch die Punkte a und b erleiden.

Auflösung. Setzt man den Druck, welchen a erleidet, = A und den von b = B, so kann ab als ein Hebel angesehen werden, an welchem die drei Kräfte A, B und C im Gleichgewichte sind, und wo A und B parallel zu C wirken. Die Punkte a und b leisten also in einer der Richtung von C entgegengesetzten Richtung Widerstand, und es ist also hierdurch die Richtung des Druckes auf a und b bestimmt. Die Größe desselben aber ist durch die Gleichungen bestimmt

$$A + B = C \text{ und } (ca)\,A = (cb)\,B$$

und hieraus erhält man, wenn ca = a und cb = b gesetzt wird,

$$A = \frac{bC}{a + b} \text{ und } B = \frac{aC}{a + b}$$

Zusatz. In so fern A, B und C als an einem Hebel im Gleichgewichte gedacht werden, müssen A und B in entgegengesetzten Richtungen von C wirken, und daher wird durch A und B nicht der Druck angegeben, welchen die Punkte

a und b erleiden, sondern die Kräfte, mit welchen a und b diesem Drucke widerstehen; der Druck aber unterscheidet sich von diesem Widerstande bloß durch das entgegengesetzte Zeichen, worauf in den angegebenen Formeln bereits Rücksicht genommen ist.

Aufgabe 2. In der Verlängerung der festen Axe ab, Fig. 29., wirkt eine Kraft C an dem Punkte γ normal gegen die Axe; es soll der Druck bestimmt werden, welchen die Punkte a und b hierdurch erleiden.

Auflösung. Wird der parallel zu C wirkende Widerstand des Punktes $a = A$ und der von $b = B$ gesetzt, und γ als der Unterstützungspunkt eines einarmigen Hebels angesehen, so sind für $\gamma a = a$ und $\gamma b = b$ die Bedingungsgleichungen

$$A + B + C = 0 \text{ und } aA + bB = 0$$

und daher wird

$$A = \frac{+bC}{a-b} \text{ und } B = \frac{-aA}{a-b}$$

es ist also der Druck auf $a = \frac{-bC}{a-b}$ und auf $b = \frac{+aA}{a-b}$

nämlich es erleidet der Punkt b, welcher γ näher liegt, einen Druck in derselben Richtung, in welcher die Kraft C wirkt; der Punkt a aber, welcher entfernter liegt, erleidet einen Druck in entgegengesetzter Richtung.

Aufgabe 3. An dem Punkte c der festen Axe ab, Fig. 30., wirkt eine Kraft C in der Richtung cC, welche mit der Axe einen Winkel $acC = \varphi$ bildet; es soll der Druck bestimmt werden, welchen hierdurch die Punkte a und b erleiden.

Auflösung. Nimmt man die Richtung des Druckes auf $a = A$ und auf $b = B$ parallel zu cC, und setzt $ca = a$ und $cb = b$, so ist hier aus demselben Grunde, wie bei Aufgabe 1.,

$$A = \frac{bC}{a+b} \text{ und } B = \frac{aC}{a+b}$$

Nun kann A in die beiden Kräfte zerlegt werden $ac' = \alpha'$ und $ac'' = \alpha''$, von welcher die erste normal gegen die Axe ist, und die andere in der Richtung derselben liegt; alsdann wird

$$\alpha' = A \sin \varphi = \frac{bC \sin \varphi}{a+b}$$

$$\text{und } \alpha'' = A \cos \varphi = \frac{bC \cos \varphi}{a+b}$$

Eben so findet man, wenn β' und β'' in Beziehung
uf B dieselbe Bedeutung haben, wie α' und α'' in Bezie-
ung auf A,

$$\beta' = B \sin \varphi = \frac{aC \sin \varphi}{a+b} \text{ und } \beta'' = B \cos \varphi = \frac{aC \cos \varphi}{a+b}$$

odurch der Druck, welchen die beiden Punkte a und b er-
iden, vollkommen bestimmt ist.

Zusatz 1. Die hier gefundenen Resultate geben an, wie
r durch C entstehende Druck auf a und b sich vertheilt,
nd es ist der normal wirkende Theil desselben α' und β'
llkommen bestimmt. Die Theile α'' und β'' aber wirken
ide in der Richtung der Axe, und es ist daher keineswegs
thwendig, daß die Vertheilung auf a und b in der Art ge-
ieht, wie es durch die Formeln für α'' und β'' ausgedrückt
rd. Nur so viel ist gewiß, daß die Summe des Druckes
dieser Richtung $= \alpha'' + \beta''$ sein muß. Die Summe
ses Druckes ist also

$$= \alpha'' + \beta'' = \frac{bC \cos \varphi}{a+b} + \frac{aC \cos \varphi}{a+b} = C \cos \varphi$$

d man kann diesen Druck entweder auf a allein, oder auf
allein, oder auch auf beide vertheilt wirkend sich vorstellen.
n Mehreres über die mögliche Vertheilung eines solchen
uckes findet man §. 28. No. 8.

Zusatz 2. Zerlegt man C unmittelbar in zwei Kräfte, C'
rmal gegen die Axe und C'' in der Richtung derselben,
wird

$$C' = C \sin \varphi \text{ und } C'' = C \cos \varphi.$$

C' giebt nun nach der Aufgabe den normalen Druck gegen
ie Punkte a und b

$$\alpha' = \frac{bC'}{a+b} = \frac{bC \sin \varphi}{a+b} \text{ und } \beta' = \frac{aC'}{a+b} = \frac{aC \sin \varphi}{a+b}$$

nd $C'' = C \cos \varphi$ ist die Summe des Druckes, welchen
ie Punkte a und b in der Richtung der Axe erleiden.

Aufgabe 4. An dem Punkte c der festen Axe ab,

Fig. 31., iſt normal ein Arm cd befeſtigt, und an dem Punkte d deſſelben wirkt eine Kraft C in der Richtung dC parallel zu der Axe; es ſoll der Druck angegeben werden, welchen hierdurch die Punkte a und b erleiden.

Auflöſung. Zieht man von a die aγ parallel zu cd und ſchneidet die Richtung der Kraft C dieſe Linie in γ, ſo kann C als auf dem Punkte γ wirkend angeſehen werden, und man kann nun baγ als einen rechtwinklig gebrochenen, in a unterſtützten Hebel betrachten, an welchem die an den Armen ab und aγ normal wirkenden Kräfte γC = C und bB′ = B im Gleichgewichte ſind. Für ca = a, cb = b und cd = aγ = c findet daher die Gleichung ſtatt

$$(a + b)\, B' = cC$$

und hieraus folgt unmittelbar $B' = \frac{cC}{a+b}$

Dieſer Ausdruck gilt auch für den Widerſtand, den b in der Richtung bB′ leiſten muß, und eben ſo groß iſt auch der Druck auf b in der Richtung bB.

Da a hierbei den Unterſtützungspunkt des Hebels bildet, ſo erleidet dieſer Punkt denſelben Druck, als wenn die beiden am Hebel im Gleichgewicht ſtehenden Kräfte B′ und C parallel zu ihren Richtungen in a angebracht wären. Hiernach iſt der Druck an a in der verlängerten Richtung der γa

$$= a' = B' = \frac{cC}{a+b}$$

und in der verlängerten Richtung der bc iſt derſelbe

$$= a'' = C.$$

Es drückt alſo die ganze Kraft C eben ſo auf a, als wenn ſie unmittelbar an dieſem Punkte in der Richtung der Axe angebracht wäre. Außerdem erleiden a und b noch in den entgegengeſetzten Richtungen ac′ und bB einen gleichen Druck $= \frac{cC}{a+b}$. Uebrigens kann auch hier der Druck = C, welchen a in der Richtung der Axe erleidet, als auf a wirkend, oder auch auf a und b vertheilt gedacht werden.

Zuſatz. Gewöhnlich wird der, durch die an d normal zur Axe wirkende Kraft C auf a und b erzeugte Druck dadurch beſtimmt, daß man C als aus zwei Kräften

esetzt ansieht, die nach den Richtungen da und db wir-
welche durch die Punkte a und b gehen, und daher als
ttelbar in diesen Punkten angebracht betrachtet werden
en. Diese Ableitung ist aber weitläufiger als die gege-
, weil hierbei die Winkel cda und cdb mit berücksichtigt
en müssen: doch kommt man auf diese Weise, wie sich
selbst versteht, zu denselben Resultaten.

Aufgabe 5. An dem Punkte d des mit der Axe ab,
31., verbundenen Armes cd wirkt eine Kraft D in der
tung df, welche mit abd in derselben Ebene liegt und
Axe unter einem Winkel aef = φ schneidet; es soll die
ße des hierdurch auf a und b erzeugten Druckes bestimmt
en.

Auflösung. Die Wirkung ist hier ganz dieselbe, als
n die Kraft an dem Punkte e der Axe in der Richtung
ngebracht wird, und es läßt sich daher die Größe des
ckes auf a und b mittelst der Formeln, Aufgabe 3.,
mmen.

§. 26.

gaben über die Bedingungen des Gleichgewichts mehrerer Kräfte, die auf eine Ebene wirken.

Ist ab, Fig. 31., eine feste Axe, die ihre Unterstützungs-
te in a und b hat, und ist mit derselben eine Linie cd
nden, so ist hierdurch die Lage einer Ebene bestimmt, zu
er ab ebenfalls als Axe gehört, und welche sich frei
diese Axe drehen kann. Wirkt irgend eine Kraft C
al gegen diese Ebene in dem Punkte d, so muß hier-
ein Drehen der Axe erzeugt werden, und es kann also
iesem Falle durch a und b kein Gleichgewicht stattfinden:
aber ist ein solches denkbar, wenn zwei Kräfte zugleich auf
Ebene wirken, und dieses führt zu folgenden Aufgaben:

Aufgabe 1. Auf die Ebene MN, Fig. 32., die durch
feste Axe ab unterstützt ist, wirken in den Punkten c und
e Kräfte C und D normal gegen die Ebene; es sollen
Bedingungen des Gleichgewichts angegeben werden.

Auflösung. Zieht man die Linie cd, welche die Axe
schneidet, so kann cd als ein in e unterstützter doppel-

armiger Hebel angeſehen werden, und es ſind daher die Kr
C und D im Gleichgewicht, wenn die Gleichung ſtattfi
(ec) · C = (ed) · D, wenn alſo

$$ec : ed = D : C.$$

Zieht man aber von c und d die Normalen $c\gamma$ und $d\delta$
die Axe, ſo iſt

$$ec : ed = c\gamma : d\delta,$$

folglich iſt auch, wenn C und D im Gleichgewichte ſein ſol
und man $c\gamma = c$ und $d\delta = d$ ſetzt,

$$c : d = D : C$$

und daher $cC = dD$.

Die Kräfte ſind alſo im Gleichgewicht, wenn ſie ſich
gekehrt verhalten wie ihre normalen Abſtände von der
oder, was daſſelbe iſt, wenn die Momente der Kräfte in
ziehung auf dieſe Axe gleich groß ſind.

Zuſatz 1. Der Ruhepunkt e des Hebels cd erl
einen Druck = C + D normal gegen die Ebene, und
läßt ſich daher der Druck, welchen die Punkte a und b e
den, durch die Formeln, §. 25. Aufgabe 1., beſtimmen.

Zuſatz 2. Die Kräfte C und D haben gegen die El
dieſelbe Richtung, und ſie ſind daher beide poſitiv: dag
iſt die Lage derſelben in Beziehung auf die feſte Axe ab en
gengeſetzt, und es iſt daher, wenn man $\gamma c = c$ poſitiv
nimmt, der Werth von $d\delta = d$ negativ; man erhält
wenn hierauf Rückſicht genommen wird, die Gleichung

$$cC = dD \text{ und daher } cC + dD = 0.$$

Sind alſo die Kräfte C und D im Gleichgewicht, ſo
die algebraiſche Summe dieſer Momente = 0.

Zuſatz 3. Da $ce : de = \gamma c : \delta e$, ſo finden dieſel
Bedingungen des Gleichgewichts auch in dem Falle ſt
wenn C in γ und D in δ an einem Hebel ab angebr
ſind, und es erleidet auch alsdann c einen Druck = C+
Hieraus geht alſo hervor, daß e und mithin auch a und b d
die in c und d angebrachten Kräfte C und D eben ſo
drückt werden, als wenn dieſe Kräfte parallel zu ihrer R
tung in den Punkten γ und δ der Axe ſelbſt angebracht wär

Zuſatz 4. Denkt man C in γ und D in δ angebra
ſo iſt, nach §. 25. Aufgabe 1., der Druck, welchen b erleidet,

$$B = \frac{(a\gamma)\ C}{(ab)} + \frac{(a\delta)\ D}{(ab)}$$
$$= \frac{(ac + c\gamma)\ C + (ac - c\delta)\ D}{(ab)}$$
$$= \frac{(ac)\ (C + D)}{(ab)} + \frac{(c\gamma)\ C - (c\delta)\ D}{(ab)}$$

eil aber $C : D = c\delta : c\gamma$, so iſt $(c\gamma)\ C - (c\delta)\ D = 0$,

folglich iſt $B = \frac{(ac)\ (C + D)}{(ab)}$

ß dieſe Formel wird für den Druck auf b auch alsdann jalten, wenn man C + D als auf c drückend annimmt.

Aufgabe 2. In den Punkten c′ und d, Fig. 32., elche beide auf derſelben Seite der Axe liegen, wirken zwei äfte C′ und D normal gegen die Ebene MN; es ſollen : Bedingungen des Gleichgewichts angegeben werden.

Auflöſung. Zieht man die Normale $c'\gamma = c$, verngert dieſelbe, macht $\gamma c = c'\gamma$, ſo iſt eine Kraft $C = C'$, c mit C nach derſelben Richtung angebracht, im Gleichwicht, und es iſt derſelben daher eine Kraft C an c in ntgegengeſetzter Richtung äquipollent, alſo im Gleichgeichte mit D, wenn C′ mit D im Gleichgewichte ſein ſoll. a nun eine Kraft C an c, die mit D an d im Gleichgeichte ſein ſoll, mit dieſer nach einerlei Richtung wirken muß, folgt, daß C′ eine entgegengeſetzte Richtung von D haen muß. Die Bedingung für das Gleichgewicht zwiſchen und D an c und d iſt, für $c\gamma = c$ und $d\delta = d$, mit lückſicht auf die Lage der Ordinaten,

$$cC + dD = 0;$$

n nun $C' = -C$ und $\gamma c' = -\gamma c = -c$, ſo iſt die leichung zwiſchen C′ und D an c′ und d ebenfalls

$$cC + dD = 0.$$

Die Kräfte ſind alſo auch in dieſem Fall im Gleichgeicht, wenn die algebraiſche Summe ihrer Momente = 0 iſt.

Zuſatz 1. Verbindet man c′ mit d und verlängert die nie, bis ſie die Axe in e′ ſchneidet, ſo kann e′d als n einarmiger Hebel, deſſen Ruhepunkt in e′ iſt, angeſehen rden, und es läßt ſich durch dieſe Betrachtung ebenfalls e ſo eben gefundene Gleichung ableiten.

Zuſatz 2. Die Axe erleidet durch C′ und D einen Druck, als wenn C′ — D in e′ angebracht wird, und es iſt hier durch der Druck, welchen die beiden Unterſtützungspunkte a und b erleiden, beſtimmt.

Zuſatz 3. Auch in dieſem Falle läßt ſich leicht nachweiſen, daß die Axe durch C′ und D eben ſo gedrückt wird, als wenn C′ in γ und D in δ, jede parallel zu ihrer Richtung angebracht wäre.

Aufgabe 3. An d, Fig. 32., wirkt eine Kraft D gegen die Ebene MN unter einem Neigungswinkel = ψ, welche durch eine normal auf MN wirkende Kraft C im Gleichgewicht erhalten wird; es ſoll die entſprechende Bedingungsgleichung angegeben werden.

Auflöſung. Wird durch die Richtung der Kraft D eine Ebene gelegt, welche MN in dc normal ſchneidet, ſo iſt, wenn irgend ein Punkt oberhalb MN in der Richtung von D mit d′ bezeichnet wird, ∠d′dc = ψ. Nun kann D in zwei Kräfte zerlegt werden, von welchen die eine D′ normal an d auf MN wirkt und die andere D″ in der Richtung dc liegt, und es iſt

$$D' = D \sin \psi \text{ und } D'' = D \cos \psi.$$

Die Theilkraft D″ kann keine Bewegung erzeugen, weil ihre Richtung unmittelbar die Axe trifft, und D′ wirkt normal gegen die Ebene; es wird daher, wenn C in c wirkt und man cγ = c und dδ = d ſetzt, die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht

$$dD' + cC = 0$$

und alſo auch $dD \sin \psi + cC = 0$.

Zuſatz 1. Der Druck, welchen die Axe erleidet, iſt hier = D′ + C = D sin ψ + C in e normal gegen die Ebene und D″ in der Richtung ce. Hieraus läßt ſich leicht abnehmen, daß auch in dieſem Falle derſelbe Druck erzeugt wird, als wenn die Kräfte parallel zu ihren Richtungen in δ und γ angebracht werden.

Zuſatz 2. Wirkt an d, Fig. 32., eine Kraft D in einer Richtung, die mit der Ebene MN einen Neigungswinkel = ψ bildet, ſo läßt ſich dieſelbe immer in zwei Kräfte zerlegen, von welchen die eine D′ = D sin ψ in d normal gegen die Ebene

l, und die andere X = D cos ψ die Richtung de hat, enn de die Linie iſt, in welcher MN von der Ebene ge- hnitten wird, die durch die Richtung der Kraft normal ge- en MN gelegt werden kann. Setzt man nun ∠ deδ = φ, o läßt ſich X in zwei Kräfte zerlegen, D″ = X sin φ und)‴ = X cos φ, von welchen die erſtere normal gegen die Axe ab iſt, und die andere parallel zu derſelben. Die Kräfte D″ und D‴ äußern alſo bloß einen Druck gegen die Axe, welchem die feſten Punkte a und b widerſtehen, und es iſt daher zur Herſtellung des Gleichgewichts nur nöthig, daß eine Kraft C den Theil D′ von D im Gleichgewicht erhalte.

Zuſatz 3. Mehrere Kräfte A, B, C, D..., die gegen eine, von einer feſten Axe unterſtützte Ebene, unter den Nei- gungswinkeln α, β, γ, δ... wirken, ſind im Gleichgewicht, wenn die Theile derſelben A sin α, B sin β, C sin γ, D sin δ..., welche eine normale Richtung gegen die Ebene haben, unter ſich im Gleichgewichte ſind. Sind alſo die normalen Abſtände der Punkte der Ebene, an welcher die Kräfte wirken, von der Axe, = a, b, c, d..., ſo muß, wenn Gleichgewicht ſtattfinden ſoll, die algebraiſche Summe der Momente ſein

$$aA \sin\alpha + bB \sin\beta + cC \sin\gamma + dD \sin\delta \ldots = 0.$$

Zuſatz 4. Wird eine ſchräg gegen die Ebene wirkende Kraft D in die drei Kräfte zerlegt:

D′ normal gegen die Ebene,
D″ normal gegen die Axe derſelben
und D‴ parallel zu der Axe,

ſo läßt ſich für jede dieſer Theilkräfte der Druck beſtimmen, welchen die Unterſtützungspunkte der Axe von derſelben erlei- den, und es iſt alſo hierdurch auch der ganze Druck beſtimmt, welchen a und b von der Kraft D abzuhalten haben.

Aufgabe 4. An den Punkten c und d der in ab un- terſtützten Ebene MN, Fig. 33., wirken zwei Kräfte C und D normal gegen die Ebene; es ſoll eine Kraft X ihrer Größe und Lage nach angegeben werden, die beiden zuſammen äqui- vollent iſt.

Auflöſung. Verbindet man c mit d durch die Linie cd und theilt dieſelbe in x, ſo daß cx : xd = D : C, ſo iſt x der Punkt, an welchem eine normal wirkende Kraft X = C + D

diesen Kräften äquipollent sein muß, wie unmittelbar aus der Theorie des Hebels sich ergiebt. In Beziehung auf die Axe ab ist hier nur noch zu beweisen, daß die Punkte a und b durch die Kraft $X = C + D$, welche in x angebracht ist, eben so gedrückt werden, als durch die in c und d angebrachten Kräfte C und D zusammen; dieses ergiebt sich wie folgt: Man ziehe die Normalen $c\gamma$, xz und $d\delta$, so drücken im Zustande des Gleichgewichts die Kräfte eben so auf die Axe, als wenn sie parallel zu ihrer Richtung in den Punkten y, z und δ angebracht wären. Daher ist der Druck auf a

$$\text{von } C = \frac{(b\gamma)\ C}{(ab)} = \frac{(bz + z\gamma)\ C}{(ab)}$$

$$\text{„ } D = \frac{(b\delta)\ D}{(ab)} = \frac{(bz - z\delta)\ D}{(ab)}$$

also ist der Druck, welchen a von C und D zusammengenommen erleidet, =

$$\frac{(bz)\ [C + D] + (z\gamma)\ C - (z\delta)\ D}{(ab)}$$

Weil aber $C : D = dx : xc = dz : z\gamma$,

so ist $(\gamma z)\ C = (\delta z)\ D$

und es ist daher der durch C und D zusammengenommen bewirkte Druck auf a

$$= \frac{(bz)\ [C + D]}{(ab)} = \frac{(bz)\ X}{(ab)}$$

eben so groß als der Druck, welchen X auf a erzeugt.

Zusatz. Zieht man cm und xn parallel zur Axe ab, so ist, in Beziehung auf diese Axe, das Moment

$$\text{von } C = (c\gamma)\ C = (zx)\ C - (mx)\ C$$

$$\text{und von } D = (d\delta)\ D = (zx)\ D + (nd)\ D;$$

die Momente von C und D zusammen sind also

$$(zx)\ [C + D] + (nd)\ D - (mx)\ C;$$

die Summe der beiden letzten Glieder aber ist = 0 und daher das ganze Moment =

$$(zx)\ [C + D] = (zx)\ X$$

eben so groß als das Moment von X.

§. 27.

Uebungen.

Aufgabe 1. Zwei Ebenen aM und aN, Fig. 34., sind unter einem unveränderlichen Winkel miteinander verbunden, und es ist ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie ab eine in a und b unterstützte Axe, um welche die Ebenen, ohne ihren Neigungswinkel zu ändern, sich frei drehen. Auf diese Ebenen wirken zwei Kräfte C und D an den Punkten c und d und sind im Gleichgewicht; es soll die Bedingungsgleichung angegeben werden.

Auflösung. Setzt man den Neigungswinkel der Richtung der Kraft C gegen die Ebene $aM = \gamma'$, so läßt sich C in die beiden Kräfte zerlegen $C' = C \sin \gamma'$ und $C'' = C \cos \gamma'$ von welchen die erste normal gegen die Ebene wirkt, während die Richtung der andern in der Ebene liegt. Eben so läßt sich D in zwei Kräfte zerlegen $D' = D \sin \delta'$ und $D'' = D \cos \delta'$, wenn der Neigungswinkel der Kraft D gegen $aN = \delta'$ gesetzt wird. Die Theilkräfte C'' und D'' können keine Bewegung hervorbringen, weil ihre Richtungen entweder die Axe schneiden oder parallel zu derselben sind; ihre Wirkung äußert sich daher bloß durch einen Druck auf ab, den die festen Punkte a und b derselben abzuhalten haben. Es findet also Gleichgewicht statt, sobald C' und D', deren Richtungen normal gegen die Ebenen sind, im Gleichgewichte stehen. Zieht man von c und d die Normalen $c\gamma = c$ und $d\delta = d$ an die Axe und in der Ebene aN die $\gamma c' = \gamma c$ parallel zu $d\delta$, so ist eine normal in c' wirkende Kraft $X = C$ mit C' an dem gleicharmigen gebrochenen Hebel $c\gamma c'$ im Gleichgewicht, und es muß daher, wenn D' mit C' im Gleichgewichte sein soll, X an c' der D' an d äquipollent sein: daher muß die Gleichung stattfinden $cX = dD'$; also für die Kräfte C' und D' muß $cC' = dD'$ sein, oder mit Rücksicht auf das Zeichen der Ordinaten $cC' + dD' = 0$. Die Kräfte C und D stehen also im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe der Momente ihrer normal wirkenden Theile in Beziehung auf die Axe $= 0$ ist.

Zusatz 1. Es ist leicht einzusehen, daß diese Regel

auch in dem Falle Gültigkeit haben muß, wenn mehr als zwei Kräfte vorkommen.

Zusatz 2. Durch C′ und D′ wird die Axe eben so gedrückt, als wenn diese Kräfte parallel zu ihren Richtungen an den Punkten γ und δ angebracht wären; da sich nun mit Hülfe der Formeln, §. 25., auch der Druck berechnen läßt, welchen die Axe durch C″ und D″ erleidet, so ist es auch in jedem Falle möglich, den Druck zu bestimmen, welchen a und b von den im Gleichgewicht stehenden Kräften C und D abzuhalten haben.

Aufgabe 2. Irgend ein Körper wird in zwei Punkten a und b, Fig. 34., festgehalten, so daß er sich nicht verrücken, wohl aber frei um die Axe ab drehen kann, und auf mehrere Punkte dieses Körpers wirken Kräfte nach beliebigen Richtungen; es sollen die Bedingungen angegeben werden, unter welchen diese Kräfte im Gleichgewichte sind.

Auflösung. Eine dieser Kräfte = C wirke an c so, daß, wenn man durch diesen Punkt und die Axe ab eine Ebene aM legt, die Richtung der Kraft C mit dieser Ebene einen Neigungswinkel = γ bildet; so läßt sich C in zwei Kräfte zerlegen $C' = C \sin \gamma$ normal gegen die Ebene und $C'' = C \cos \gamma$, deren Richtung in der Ebene liegt und daher nur einen Druck auf die Axe ab erzeugt, ohne das Gleichgewicht zu stören: das Moment von C′ ist, wenn die Normale $c\gamma = c$ gesetzt wird, $= cC' = cC \sin \gamma$. Auf gleiche Weise kann das Moment einer zweiten Kraft $A = aA' = aA \sin \alpha$, das einer dritten $B = bB' = bB \sin \beta$ ꝛc. gesetzt werden. Soll nun Gleichgewicht stattfinden, so muß die algebraische Summe aller dieser Momente = 0 sein, und es ist daher die Bedingungsgleichung

$$aA \sin \alpha + bB \sin \beta + cC \sin \gamma \ldots = 0.$$

Zusatz 1. Um das Zeichen der einzelnen Produkte, ob dieselben positiv oder negativ zu nehmen sind, auf eine einfache Weise zu bestimmen, braucht man nur auf die Richtung Rücksicht zu nehmen, nach welcher die Kraft ein Drehen um die Axe zu bewirken strebt; demnach erhalten die Momente $aA \sin \alpha$ und $bB \sin \beta$ entgegengesetzte Zeichen, wenn A′ und B′ ein Drehen in entgegengesetzten Richtungen bewirken.

Nimmt man also A′ positiv, so sind die Momente cC′, dD′ ꝛc. ebenfalls positiv, wenn C′ und D′ ein Drehen nach derselben Richtung wie A′ bewirken, und sie sind negativ, wenn sie ein Drehen in entgegengesetzter Richtung erzeugen. Jedes Moment wie bB sin β = bB′ hat nun mit dem Factor B′ das Zeichen gemein.

Aufgabe 3. Die Ebene abc, Fig. 35., ist in den Punkten a, b, c unterstützt, und auf einen Punkt p derselben wirkt normal eine Kraft = P; es soll angegeben werden, wie sich der hierdurch erzeugte Druck auf die unterstützten Punkte vertheilt.

Auflösung. Nimmt man bc als eine feste Axe an, so wird die Kraft P an p durch eine Kraft A′ an A im Gleichgewicht erhalten, wenn die Gleichung stattfindet

$$(pn) \cdot P + (am)\, A' = 0$$

und es ist daher $A' = -\frac{(pn)\, P}{(am)}$

wo am und pn normal auf bc sind, und weil sonach

$$am : pn = \Delta abc : \Delta pbc,$$

so ist $\frac{pn}{am} = \frac{\Delta pbc}{\Delta abc}$ und es ist daher auch

$$A = -\frac{\Delta pbc}{\Delta abc} \cdot P$$

Setzt man nun den Druck, welchen a erleidet, = A, so ist A = — A′, und daher ist der Druck auf a =

$$A = \frac{\Delta pbc}{\Delta abc} \cdot P$$

Auf gleiche Art findet man, wenn einmal ac und alsdann ab als Axe angenommen wird, und man den Druck auf b = B und auf c = C setzt,

$$B = \frac{\Delta pac}{\Delta abc} \cdot P \text{ und } C = \frac{\Delta pab}{\Delta abc} \cdot P$$

Zugleich ist A + B + C = P, wie sich von selbst versteht.

Hieraus geht also hervor, daß der Druck, welchen die drei unterstützten Punkte erleiden, in demselben Verhältnisse einander steht, wie die denselben gegenüber liegenden Dreiecke, die ihre Spitze gemeinschaftlich in p haben und von welchen die Seiten des Dreiecks abc die Grundlinien sind. Nämlich es ist

$$A : B : C = \Delta pbc : \Delta pac : \Delta pab.$$

Zuſatz 1. Zieht man von a aus eine Linie, die l halbirt, und von b aus eine, durch welche ac halbirt wi ſo iſt der Durchſchnittspunkt dieſer beiden Linien der Punk auf welchen P wirken muß, wenn die drei unterſtützten Punk einen gleichen Druck erleiden ſollen.

Zuſatz 2. Wirkt P auf p′, ſo iſt der Druck

$$\text{auf } a = A = \frac{\Delta p'bc}{\Delta abc} \cdot P; \text{ auf } c = C = \frac{\Delta p'ab}{\Delta abc} \cdot P$$

$$\text{und auf } b = B = -\frac{\Delta p'ac}{\Delta abc} \cdot P$$

es erleidet alſo in dieſem Falle b einen Druck in entgegen geſetzter Richtung.

Aufgabe 4. Eine Ebene, Fig. 35., iſt in den drei Punk ten a, b und c unterſtützt; es ſoll die Lage des Punktes p ſ beſtimmt werden, daß, wenn an dieſem Punkte eine Kraft P die normal gegen die Ebene wirkt, angebracht wird, der Drud auf a, b und c nach dem gegebenen Verhältniſſe $\alpha : \beta : \gamma$ vertheilt wird.

Auflöſung. Vermöge der Bedingungen der Aufgabe muß ſein

$$\Delta pbc : \Delta pac : \Delta pab = \alpha : \beta : \gamma$$

$$\text{alſo } \Delta pbc : \Delta abc = \alpha : \alpha + \beta + \gamma$$

$$\text{und daher auch } pn : am = \alpha : \alpha + \beta + \gamma$$

$$\text{folglich iſt } pn = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \cdot (am).$$

Theilt man alſo die Normale am in x ſo, daß

$$xm = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \cdot (am) \text{ oder daß } \alpha + \beta + \gamma : \alpha = am : xm,$$

und zieht durch x eine Parallele zu bc, ſo muß in dieſer der Punkt p liegen. Eben ſo muß derſelbe in einer Parallele zu ac liegen, deren Lage auf gleiche Weiſe ſich angeben läßt: beide Parallelen nun ſchneiden ſich in dem geſuchten Punkte p.

Aufgabe 5. Die Ebene abc, Fig. 35., wird in dem gegebenen Punkte p durch eine Kraft P normal gedrückt: die Ebene iſt in b und c unterſtützt, und es erleiden dieſe Punkte durch P einen Druck B und C; es ſoll die Lage des dritten Unterſtützungspunktes a beſtimmt werden.

Auflöſung. Da $A + B + C = P$ ſein muß, ſo iſt die Größe des Druckes, welchen a erleidet, $= A = P - (B + C)$ beſtimmt. Es iſt aber auch $A = \frac{\Delta pbc}{\Delta abc} \cdot P$ und daher $\Delta abc = \frac{P}{A} \cdot \Delta pbc$. Da nun Δpbc gegeben iſt, ſo kennt man auch die Größe des Dreiecks abc; aber auch die Grundlinie bc deſſelben iſt gegeben, folglich auch die Höhe. Iſt ma die Höhe, ſo muß der geſuchte Punkt in der durch a zu bc gezogenen Parallele liegen.

Ferner iſt $B = \frac{\Delta pac}{\Delta abc} \cdot P = \frac{\Delta pac}{\Delta pbc} \cdot A$

und daher $\Delta pac = \frac{B}{A} \cdot \Delta pbc$ bekannt. Man kennt aber von dem Dreieck pac die eine Seite pc, alſo iſt auch, wenn man dieſe als Grundlinie annimmt, die Höhe des Dreiecks bekannt. Wird nun in der durch dieſe Höhe beſtimmten Entfernung von pc eine Parallele zu derſelben gezogen, ſo iſt der Punkt, in welchem dieſe die Parallele zu bc ſchneidet, die geſuchte Lage von a.

Aufgabe 6. Die in a, b und c unterſtützte Ebene, Fig. 36., wird normal gedrückt in p durch eine Kraft P und in q durch Q; es ſoll der Druck beſtimmt werden, welchen a hierdurch erleidet.

Auflöſung. Setzt man den Druck auf a $= A$, ſo iſt, weil der von P herrührende Druck auf a $= \frac{\Delta pbc}{\Delta abc} \cdot P$ und der von $Q = \frac{\Delta qbc}{\Delta abc} \cdot Q$ iſt,

$$A = \frac{\Delta pbc \cdot P + \Delta qbc \cdot Q}{\Delta abc}$$

Theilt man aber die Linie pq in x ſo, daß die Proportion ſtattfindet $px : xq = Q : P$, ſo iſt den Kräften P und Q in p und q eine Kraft in $x = P + Q$ äquipollent; folglich läßt ſich der Druck auf a auch durch die Formel ausdrücken

$$A = \frac{\Delta xbc \cdot (P + Q)}{\Delta abc}$$

aus geht zugleich hervor, daß

$$\Delta pbc \cdot P + \Delta qbc \cdot Q = \Delta xbc \cdot (P + Q)$$

ein Satz, deſſen Richtigkeit auch unmittelbar geometriſch bewieſen werden kann.

Aufgabe 7. Auf die Ebene des rechten Winkels pmq, Fig. 37., wirken mehrere Kräfte A, B, C, D... normal; es ſollen die Bedingungsgleichungen für den Fall angegeben werden, daß dieſe Kräfte ſich im Gleichgewicht erhalten.

Auflöſung. Wirken die Kräfte A und B an den Punkten a und b, ſo muß die ihnen äquipollente Kraft X in der Linie ab liegen, und wenn dieſelbe auf x wirkt, ſo muß

$$A + B = X \text{ und } A : B = bx : ax \text{ ſein.}$$

Zieht man aber von a, x und b die Normalen aa′, xx′ und bb′ auf mq, ſo iſt

$$bx : ax = b'x' : a'x'$$

und es muß daher auch ſein, wenn man ma′ = a′, mb′ = b′ und mx′ = x′ ſetzt,

$$A : B = b' - x' : x' - a'$$

$$\text{alſo } (A + B)x' = a'A + b'B$$

und weil A + B = X, ſo erhält man

$$x'X = a'A + b'B$$

Wirkt nun eine dritte Kraft C auf c, und ſoll die den Kräften C und X äquipollente Z auf z wirken, ſo muß ſein, wenn man die Normalen cc′ und zz′ zieht, und mc′ = c′, mz′ = z′ ſetzt,

$$C + X = Z \text{ und } c'C + x'X = z'Z$$

Es iſt alſo, wenn für X und x′X die Werthe geſetzt werden

$$A + B + C = Z \text{ und } a'A + b'B + c'C = z'Z$$

Kommt noch eine neue Kraft D hinzu und wird die D und Z äquipollente Kraft = Y geſetzt, ſo erhält man die Gleichungen

$$A + B + C + D = Y \text{ und } a'A + b'B + c'C + d'D = y'$$

und man findet, daß dieſe Gleichungen, wenn ſie für n Kräfte richtig ſind, auch für (n + 1) Kräfte gelten müſſen. Sind daher für irgend eine Zahl = n Kräfte, die denſelben äquipollente Kraft = V, ſo finden die Gleichungen ſtatt

$$A + B + C \ldots + P = V \text{ und } a'A + b'B + c'C \ldots + p'P = v'$$

Die Lage der Abſciſſenlinie mq iſt hier ganz beliebig

der Ebene pmq, und man kann daher ſtatt derſelben auch mp, welche normal auf mq iſt, als ſolche annehmen; wird nun $ma'' = a''$, $mb'' = b''$, $mc'' = c''$, ꝛc. geſetzt, ſo muß auch ſein

$$a''A + b''B + c''C\ldots + p''P = v''V.$$

Sollen die Kräfte A, B, C..., P unter ſich im Gleichgewichte ſein, ſo muß die ihnen äquipollente Kraft $V = 0$ werden, und dieſes führt zu den Bedingungsgleichungen für mehrere normal auf eine Ebene wirkende Kräfte

1. $A + B + C\ldots + P = 0$
2. $a'A + b'B + c'C\ldots + p'P = 0$
3. $a''A + b''B + c''C\ldots + p''P = 0$

Zuſatz 1. Wirken bloß zwei Kräfte A und B auf die Ebene, ſo erhält man

$$A + B = 0, \text{ alſo } B = -A$$
$$a'A + b'B = 0, \quad a' = b'$$
$$a''A + b''B = 0, \quad a'' = b''$$

Hieraus geht hervor, daß zwei Kräfte nur alsdann im Gleichgewichte ſein können, wenn ſie gleich groß ſind und auf denſelben Punkt in entgegengeſetzten Richtungen wirken.

Zuſatz 2. Wirken drei Kräfte auf die Ebene, ſo ſind die Gleichungen für das Gleichgewicht

$$A + B + C = 0;\ a'A + b'B + c'C = 0$$
$$\text{und } a''A + b''B + c''C = 0$$

Die erſte Gleichung giebt

$$C = -(A + B)$$

und daher werden die beiden andern

$a'A + b'B = c'(A + B)$ und $a''A + b''B = c''(A + B)$

Hieraus folgt

$(b' - c')B = (c' - a')A$ und $(b'' - c'')B = (c'' - a'')A$

es iſt alſo

$$b' - c' : c' - a' = b'' - c'' : c'' - a''$$

eine Proportion, woraus unmittelbar folgt, daß in dieſem Falle die Punkte a, b, c, an welchen die drei Kräfte A, B und C wirken, in gerader Linie liegen müſſen. Es können alſo drei Kräfte überhaupt nur in dem Falle im Gleichgewicht ſein, wenn ſie in einer geraden Linie liegen.

Aufgabe 8. An mehreren Punkten a, b, c... der

Ebene des rechten Winkels pmq, Fig. 37., wirken die Kräfte A, B, C..., deren Richtungen sämmtlich in dieser Ebene liegen; es sollen die Bedingungsgleichungen für den Fall angegeben werden, daß diese Kräfte unter sich im Gleichgewichte sind.

Auflösung. Wirkt die Kraft A an a in der Richtung $a\alpha$, und es ist, wenn man von a die Normalen aa' und aa'' auf mq und mp zieht, $\angle \alpha a a' = \alpha$, so läßt sich A in zwei Kräfte A' und A'' zerlegen, von welchen die eine auf mq und die andere auf mp normal ist, und man erhält

$$A' = A\cos\alpha \text{ und } A'' = A\sin\alpha$$

Eben so kann B zerlegt werden in zwei auf mp und mq normale Richtungen $B' = B\cos\beta$ und $B'' = B\sin\beta$. Für C erhält man auf gleiche Weise $C' = C\cos\gamma$ und $C'' = C\sin\gamma$ ꝛc.

Die Theilkräfte A', B', C'..., welche normal auf mq wirken, sind einer Kraft V' äquipollent, deren Größe und Lage durch die beiden Gleichungen bestimmt ist

$$A' + B' + C' \ldots = V'$$
$$\text{und } a'A' + b'B' + c'C' \ldots = v'V'$$

Auf gleiche Weise erhält man für die Theilkräfte A'', B'', C''..., die normal auf mp sind, wenn die ihnen äquipollente Kraft $= V''$ gesetzt wird, die Gleichungen

$$A'' + B'' + C'' \ldots = V''$$
$$\text{und } a''A'' + b''B'' + c''C'' \ldots = v''V''$$

Sollen nun die Kräfte unter sich im Gleichgewichte sein, so muß sowohl V' als $V'' = 0$ werden, und man erhält daher die gesuchten Bedingungsgleichungen

$$A' + B' + C' \ldots = 0;\quad a'A' + b'B' + c'C' \ldots = 0$$
$$A'' + B'' + C'' \ldots = 0;\quad a''A'' + b''B'' + c''C'' \ldots = 0$$

Aufgabe 9. Es wirken mehrere Kräfte auf beliebige Punkte im Raume, oder was dasselbe ist, an verschiedenen Punkten eines Körpers; man soll die Bedingungen für das Gleichgewicht angeben.

Auflösung. Man lege irgend eine Ebene pmq, Fig. 37., und durch die Richtung einer Kraft eine zweite Ebene, welche normal auf pmq ist. Nun sei $a\alpha$ die gemeinschaftliche Durchschnittslinie beider Ebenen, und der Winkel, unter welchem die

ichtung von A gegen pmq, also auch A gegen aα geneigt
, = α, so läßt sich A in zwei Kräfte zerlegen

$A''' = A\sin\alpha'$ normal auf pmq, und

$A^{IV} = A\cos\alpha'$ in der Richtung aα

nd auf gleiche Weise kann jede der übrigen Kräfte ebenfalls
u zwei Theilkräfte zerlegt werden. Die Kräfte sind also sämmt-
ich unter sich im Gleichgewichte, wenn dieses bei allen Theil-
räften der Fall ist. Die Bedingungsgleichungen für die Theil-
räfte A''', B''', C'''... sind bereits in Aufgabe 7., und die für
ie Kräfte A^{IV}, B^{IV}, C^{IV}... in Aufgabe 8. angegeben; es sind
lso hierdurch die sämmtlichen Bedingungsgleichungen bestimmt.

Zusatz. Diese Aufgabe läßt sich auch dadurch lösen,
aß man in m eine dritte Abscissenlinie auf pqm errichtet,
nd nun jede Kraft sogleich in drei Theilkräfte zerlegt, die parallel
u den drei Abscissenaxen sind. Hierdurch wird jede Kraft in
rei Theilkräfte zerlegt, deren Richtungen normal sind auf den
rei durch die drei Axen bestimmten Ebenen, und es lassen
ch hiernach die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht
ittelst der Formeln in Aufgabe 7. ableiten.

10. In Beziehung auf den Hebel verdienen hier noch
lgende Sätze angeführt zu werden, deren nähere Bestimmung
r eigenen Uebung überlassen bleiben mag.

a. Wenn drei Kräfte an einem Hebel im Gleichgewichte
nd, so treffen ihre Richtungen in einen Punkt zusammen.

b. Sind umgekehrt drei Kräfte an einem Punkte im
leichgewicht, und man zieht eine Linie in der Ebene der
ichtungen dieser Kräfte, und verlängert diese Richtungen vor-
der rückwärts, bis sie diese Linie schneiden, so sind die Kräfte
n dieser Linie unter den Winkeln, unter welchen sie dieselbe schnei-
en, als an einem Hebel, ebenfalls im Gleichgewicht.

c. Sind drei Kräfte an einem Hebel im Gleichgewichte,
nd man schneidet die Richtungen dieser Kräfte durch irgend
ne Linie, so sind sie an dieser, als an einem Hebel, ebenfalls
n Gleichgewicht.

d. Sind drei Kräfte, von denen je zwei zusammenge-
en größer sind als die dritte, ihrer Größe nach ge-
nnd sind in einer geraden Linie zwei Punkte bestimmt,
n sich die Kräfte an diesen Punkten immer so anbrin-

gen, daß sie sich im Gleichgewicht erhalten, und man kann die entsprechenden Neigungswinkel sowohl geometrisch als algebraisch leicht bestimmen.

e. Sind 4 Kräfte, deren Richtungen in einer Ebene liegen, an einem Hebel im Gleichgewichte, und man substituirt statt zwei derselben eine äquipollente Kraft, so muß die Richtung dieser mit den Richtungen der beiden übrigen in einen Punkt zusammentreffen.

f. Welche, den angeführten analoge Sätze finden in dem Falle statt, wenn vier auf eine Ebene wirkende Kräfte im Gleichgewichte sind?

§. 28.

Bemerkungen über die Vertheilung des Druckes.

1. Ist die in a, b und c unterstützte Ebene, Fig. 35., in p mit P belastet, so findet man den Druck, den jeder der drei unterstützten Punkte zu leiden hat, nach §. 27. Aufgabe 3.; nämlich es ist

$$\text{der Druck auf } a = A = \frac{\Delta pbc}{\Delta abc}.P$$

$$\text{» } b = B = \frac{\Delta pac}{\Delta abc}.P$$

$$\text{» } c = C = \frac{\Delta pab}{\Delta abc}.P$$

Liegen nun die Punkte a und p mit bc in gerader Linie, so wird $\Delta pbc = \Delta pac = \Delta pab = \Delta abc = 0$, und man erhält daher in diesem Falle

$$A = \frac{0}{0};\ B = \frac{0}{0} \text{ und } C = \frac{0}{0}$$

Die obigen Formeln sind also unter diesen Umständen, wenigstens in der hier angegebenen Form, nicht brauchbar.

2. Betrachtet man den hier angeführten Fall genauer, so findet sich, daß derselbe die Aufgabe enthält: Ein geradliniger Hebel ist in drei Punkten a, b, c, Fig. 38., belastet, und man kennt die Lage dieser Punkte gegen den Unterstützungspunkt p, so wie den Druck = P, welchen derselbe erleidet; es soll die Größe der Kräfte A, B und C bestimmt werden.

Setzt man $pa = a$, $pb = b$ und $pc = c$, so erhält man die beiden Bedingungsgleichungen

$$A + B + C = P \text{ und } aA + bB = cC$$

Da nun aber drei unbekannte Größen A, B und C vorkommen, so ist die Aufgabe unbestimmt, und es kann daher für die eine der drei Größen ein beliebiger Werth angenommen werden, wodurch alsdann der der beiden übrigen vollkommen bestimmt wird. Nimmt man z. B. A als gegeben an, so wird aus den beiden Gleichungen gefunden

$$B = \frac{cP - (a + c)A}{b + c} \text{ und } C = \frac{bP - (b - a)A}{b + c}$$

3. Die Aufgabe läßt hiernach mehrere Auflösungen zu, und es ist daher der Druck, welchen jeder der drei Punkte besonders erleidet, nicht bestimmt: nur beschränkt ist derselbe, in so fern keine negativen Werthe für A, B und C statthaft sind. Die Gränzen, innerhalb welcher die Werthe liegen müssen, ergeben sich aus den beiden gefundenen Formeln; es erhält nämlich unbedingt sowohl B als C den größten Werth, wenn man A, welches hier als zwischen B und C liegend angenommen wird, $= 0$ setzt. Dagegen wird, weil B und A auf derselben Seite von p liegen sollen, der Werth von A am größten, wenn $B = 0$ ist. Hiernach ist also von A der kleinste Werth $= 0$, und der größte Werth, welcher für $B = 0$ erhalten wird, ist $A = \frac{cP}{a + c}$

Für B ist ebenfalls der kleinste Werth $= 0$ und der größte, welcher für $A = 0$ erhalten wird, ist $B = \frac{cP}{b + c}$

Nimmt man $A = 0$, so wird $C = \frac{bP}{b + c}$ und für $B = 0$ erhält man $C = \frac{aP}{a + c}$, welches die Gränzen sind, innerhalb welcher der Werth von C liegen muß. Es ist aber $\frac{bP}{b + c} = \frac{aP}{a + \frac{a}{b} \cdot c} > \frac{aP}{a + c}$, weil hier $b > a$ vorausgesetzt wird; folglich ist

$C = \frac{bP}{b + c}$ der größte und

$C = \frac{aP}{a + c}$ der kleinste Werth, welchen C erhalten kann.

4. Die Formeln, welche für A, B und C in dem Falle erhalten werden, wenn die Punkte a, b, c und p nicht in gerader Linie liegen, wenn sie also die Lage, Fig. 35., haben, führen zu dem Ausdrucke $\frac{0}{0}$, sobald sie als in gerader Linie liegend angenommen werden. Da nun in der Analysis gezeigt wird, wie es möglich ist, den Werth einer Function für den Fall zu bestimmen, wo sie $=\frac{0}{0}$ wird, so müssen sich auch hier die Werthe von $\frac{0}{0}$ ermitteln lassen, und man erhält auf diese Weise auch allerdings bestimmte und richtige Werthe von A, B und C; doch sind diese nicht die allein möglichen, vielmehr geben sie nur für jede dieser Größen einen von den vielen Werthen, die hier möglich sind, und die alle den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

5. Die besondern Werthe, welche hier den Gleichungen $A = \frac{0}{0}$, $B = \frac{0}{0}$ und $C = \frac{0}{0}$ zugehören, lassen sich, ohne daß es nöthig ist, die höhere Analysis in Anspruch zu nehmen, auf folgende Art bestimmen:

Es ist, Fig. 35.,

$$A = \frac{\Delta pbc}{\Delta abc} \cdot P;\ B = \frac{\Delta pac}{\Delta abc} \cdot P;\ C = \frac{\Delta pab}{\Delta abc} \cdot P$$

Setzt man nun $pa = a$, $pb = b$, $pc = c$, $\angle bpc = \alpha$, $\angle apc = \beta$ und $\angle apb = \gamma$, so ist

$$\Delta pbc = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha;\ \Delta pac = \tfrac{1}{2}ac\sin\beta;\ \Delta pab = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma$$

und also $\Delta abc = \frac{1}{2}[bc\sin\alpha + ac\sin\beta + ab\sin\gamma]$

folglich ist auch

$$A = \frac{bcP\sin\alpha}{bc\sin\alpha + ac\sin\beta + ab\sin\gamma}$$

$$B = \frac{acP\sin\beta}{bc\sin\alpha + ac\sin\beta + ab\sin\gamma}$$

$$C = \frac{abP\sin\gamma}{bc\sin\alpha + ac\sin\beta + ab\sin\gamma}$$

Diese Ausdrücke nun sind für alle Werthe der Winkel α, β, γ richtig, nur daß $\alpha + \beta + \gamma = 360°$ sein muß, und es ist daher $\sin\gamma = \sin[360° - (\alpha + \beta)] = -\sin(\alpha + \beta)$. Wird dieser Werth gesetzt, und dabei zugleich $\alpha = \beta$ angenommen, so erhalten die zuletzt gefundenen Werthe die Form

$$A = \frac{bcP\sin\alpha}{(bc + ac)\sin\alpha - ab\sin 2\alpha}$$

$$B = \frac{acP\sin\alpha}{(bc+ac)\sin\alpha - ab\sin 2\alpha}$$

$$C = \frac{-abP\sin 2\alpha}{(bc+ac)\sin\alpha - ab\sin 2\alpha}$$

Weil $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, ſo iſt $\sin\alpha$ gemeinſchaftlicher Factor des Zählers und Nenners eines jeden dieſer Brüche, und es iſt daher für $\alpha = \beta$

$$A = \frac{bcP}{(bc+ac) - 2ab\cos\alpha}$$

$$B = \frac{acP}{(bc+ac) - 2ab\cos\alpha}$$

$$C = \frac{-2abP\cos\alpha}{(bc+ac) - 2ab\cos\alpha}$$

Sollen nun die Punkte a, b, c und p in gerader Linie liegen, wie Fig. 38., ſo wird $\alpha = \beta = 180°$, und daher $\cos\alpha = -1$, folglich iſt alsdann

$$A = \frac{bcP}{bc+ac+2ab};\ B = \frac{acP}{bc+ac+2ab} \text{ und } C = \frac{2abP}{bc+ac+2ab}$$

und dieſes ſind richtige Werthe für den Druck, den die drei Punkte a, b und c erleiden: nur daß ſie nicht die allein richtigen ſind, ſondern daß noch mehrere andere ebenfalls den Bedingungen entſprechen.

6. Daß die hier gefundenen Werthe wirklich den Bedingungen entſprechen, ergiebt ſich unmittelbar daraus, daß aus denſelben folgt

$$A + B + C = P \text{ und } aA + bB = cC$$

und hieraus folgt auch, daß dieſe Werthe nothwendig innerhalb der, in No. 3., angegebenen Gränzen liegen müſſen. Es läßt ſich dieſes aber auch unmittelbar nachweiſen, nämlich: Die Gränzen, innerhalb welcher A liegen muß, ſind, nach No. 3., $A = 0$ und $A = \frac{cP}{a+c}$ und der in No. 5. für A gefundene Werth iſt

$$A = \frac{bcP}{ac+bc+2ab} = \frac{cP}{2a+c+\frac{ac}{b}} < \frac{cP}{a+c}$$

er liegt alſo wirklich innerhalb jener Gränzen; daſſelbe gilt auch von B und C.

7. Man hat auf verschiedene Weise eine vollständige Auflösung des Problems von der Vertheilung des Druckes auf drei in einer geraden Linie liegende Punkte versucht, und da, wie aus dem Vorhergehenden sich ergiebt, die Aufgabe unbestimmt ist, so hat man zu einer Hypothese seine Zuflucht genommen, um dadurch die fehlende Gleichung zu erhalten. Was sich hier zunächst darbietet, ist die Annahme, daß die in zwei Punkten unterstützte belastete Linie sich immer etwas biegt, und bei dieser Voraussetzung lassen sich allerdings bestimmte Formeln für den Druck auf die drei Punkte finden, doch ist alsdann die Aufgabe von der hier zu untersuchenden verschieden. Eine andere Hypothese, durch welche man die erforderlichen drei Gleichungen zu erhalten sucht, ist die Annahme, daß die Vertheilung des Druckes möglichst gleichförmig geschehen müsse, und daß daher die Summe der Differenzen des Druckes, den die drei Punkte erleiden, oder vielmehr, um die Zweideutigkeit der Zeichen zu vermeiden, die Summe der Quadrate dieser Differenzen ein Minimum sein muß. Dieses führt zu der Bedingung: es ist

$$(B - A)^2 + (B - C)^2 + (A - C)^2$$

ein Minimum. Differenzirt man diesen Ausdruck, setzt das Differential $= 0$, und berücksichtigt, daß, weil $A+B+C=P$ constant ist, auch $dA + dB + dC = 0$ sein muß, so erhält man, indem die hier sich ergebenden Resultate mit den obigen Gleichungen verbunden werden, für A den Werth

$$A = \frac{P(b^2 + ab - ac + c^2)}{2(a^2 + b^2 + ab + bc - ac + c^2)}$$

woraus nun der Druck auf b und c, also B und C, leicht gefunden werden kann.

8. In der Aufgabe 3. §. 25. kommt es darauf an, zu bestimmen, wie der Druck, Fig. 30., auf die beiden Punkte a und b einer geraden Linie sich vertheilt, wenn eine Kraft in der Richtung dieser Linie wirkt; es ist leicht einzusehen, daß diese Aufgabe der hier behandelten ähnlich ist, und daß daher auch diese Aufgabe als unbestimmt angesehen werden muß, weßwegen auch die dort gefundenen Resultate zwar als den Bedingungen entsprechend angesehen werden können, aber keineswegs die allein richtigen sind. Die Gränzen sind hier

für a und b dieſelben, indem auf jedem dieſer Punkte der Druck, als zwiſchen 0 und der ganzen Laſt liegend, angenommen werden kann. Iſt die Summe des Druckes in der Richtung der Linie ab = C, und man ſetzt für $x < C$ den Druck auf a = x, ſo iſt der auf b = C − x.

Zuſatz 1. In dem Journal der reinen und angewandten Mathematik von Crelle, Bd. I. S. 37, giebt der Bau-Conducteur Koſſack eine Auflöſung der Aufgabe über die Wirkung einer Kraft auf drei Punkte, und kommt für den Fall, daß dieſe Punkte in gerader Linie liegen, ebenfalls auf die, No. 5., angegebenen Formeln, die er jedoch für die allein richtigen zu halten ſcheint. Daß dieſes nicht in der That ſein kann, ſondern daß die Aufgabe für dieſen Fall unbeſtimmt ſein muß, wird in dem erſten Bande des genannten Journals S. 117 ff. mit wenigen Worten von Abel und in einer ausführlichen Abhandlung von Crelle nachgewieſen: eine Abhandlung, die um ſo mehr nachgeleſen zu werden verdient, da ſie ſehr intereſſante Anſichten über dieſes Problem enthält, und insbeſondere auch nachweiſet, wie durch eine zweckmäßige Subſtitution für die Winkel α und β Formeln erhalten werden können, die allen innerhalb der angegebenen Gränzen liegenden Werthen entſprechen. Auch wird hier die Aufgabe über die Vertheilung des Druckes, wenn die Ebene in mehr als in drei Punkten unterſtützt iſt, näher beleuchtet.

Zuſatz 2. Brandes in ſeinem „Lehrbuche der Geſetze des Gleichgewichts und der Bewegung feſter und flüſſiger Körper" ſagt §. 131: „Wenn eine Ebene von Kräften, deren Richtungen in die Ebene ſelbſt fallen, gedrückt wird, ſo braucht man nur zwei Punkte unverrückt feſt zu halten, und von dem Drucke, den ein dritter Punkt erleidet, kann keine Rede ſein." Dieſe Bemerkung giebt zu erkennen, daß derſelbe dieſes Problem ſich keineswegs deutlich gedacht habe.

Anmerkung. Ueber das hier behandelte Problem verdient noch nachgeleſen zu werden: „Syſtem der reinen und angewandten Mechanik" von Ide. Kap. 4. des 1ſten Theils.

Dritter Abſchnitt.

Der Schwerpunkt und die davon abhängenden Erſcheinungen.

§. 29.

Einleitung.

1. Wenn mehrere Kräfte A, B, C... an verſchiedenen Punkten im Raume unter parallelen Richtungen wirken, ſo iſt durch dieſelben immer eine einzige Kraft V ihrer Größe und Richtung nach beſtimmt, die allen zuſammen äquipollent iſt. Von der Richtigkeit dieſes Satzes kann man ſich auf folgende Art überzeugen: Da die Richtungen ſämmtlicher Kräfte parallel ſein ſollen, ſo kann eine Ebene ſo gelegt werden, daß alle dieſe Richtungen normal auf derſelben ſind: treffen dieſelben die Ebene in den Punkten a, b, c..., Fig. 37., ſo läßt ſich die Lage eines Punktes z in dieſer Ebene beſtimmen, in welchem eine Kraft $Z = A + B + C...$ allen Kräften äquipollent iſt. Zieht man nun die Abſciſſenaxen mp, mq und ſetzt $ma' = a'$, $mb' = b'$, $mc' = c'...$, $mz' = z'$, und eben ſo $ma'' = a''$, $mb'' = b''$, $mc'' = c''...$, $mz'' = z''$, ſo iſt nach §. 27.

$$z' = \frac{a'A + b'B + c'C...}{A + B + C...}$$

$$\text{und } z'' = \frac{a''A + b''B + c''C...}{A + B + C...}$$

Durch dieſe beiden Gleichungen iſt alſo der Punkt z beſtimmt, in welchem die Richtung der äquipollenten Kraft Z die angenommene Ebene ſchneidet; die Richtung derſelben iſt parallel zu der aller übrigen Kräfte, und der Größe nach iſt ſie der Summe aller dieſer Kräfte gleich.

Nun kann zwar Z in jedem Punkte der Linie, welche die angenommene Ebene in z ſchneidet, wirkend gedacht werden; ſind aber die Kräfte A, B, C... nicht bloß ihrer Größe und Richtung nach gegeben, ſondern kennt man auch den

Punkt

Punkt, an welchem jede derſelben wirkt, ſo iſt hierdurch auch der Punkt beſtimmt, an welchem Z wirkend gedacht werden muß, und es läßt ſich die Lage deſſelben mit Hülfe einer dritten Axe, welche in m normal auf pmq gezogen wird, auf folgende Art ermitteln:

Man lege durch ab eine Ebene, welche die pmq normal ſchneidet, ſo müſſen die Punkte A und B in dieſer Ebene normal über a und b liegen, und es iſt nun, wenn, Fig. 37ª, xX parallel zu aA und bB gezogen wird,

$$AX : XB = ax : xb$$

Die in m errichtete dritte Axe, welche, Fig. 37ª, durch die Linie mr dargeſtellt wird, iſt parallel zu der Ebene abBA und werden von den Punkten A, B und X Parallelen zu der Grundebene an dieſe Axe gezogen, welche dieſe Axe in den Punkten a''', b''' und x''' ſchneiden, ſo iſt $ma''' = aA$, $mb''' = bB$ und $mx''' = xX$; es iſt daher auch

$$AX : XB = a'''x''' : x'''b'''$$

und für $ma''' = a'''$, $mb''' = b'''$ und $mx''' = x'''$ wird

$$AX : XB = a''' - x''' : x''' - b'''$$

Soll nun $X = A + B$ den Kräften A und B äquipollent ſein, ſo muß die Proportion ſtatt finden

$$AX : XB = B : A$$

und es iſt daher

$$B : A = a''' - x''' : x''' - b'''$$

woraus folgt $x''' = \frac{a'''A + b'''B}{A + B}$

Es iſt leicht einzuſehen, daß dieſe Formel auf jede beliebige Anzahl von Kräften ſich ausdehnen läßt, und es iſt daher auch die Lage der Kraft Z in Beziehung auf die Axe mr durch die Formel beſtimmt

$$mz''' = z''' = \frac{a'''A + b'''B + c'''C\ldots}{A + B + C\ldots}$$

Hierdurch iſt alſo ermittelt, wie hoch der Punkt über der Ebene pmq liegt, an welchem die den Kräften A, B, C... äquipollente Z wirkend gedacht werden muß. Da nun außerdem auch der Punkt z, Fig. 37., bekannt iſt, in welchem die Richtung von Z die Ebene pmq ſchneidet, ſo iſt die Lage von Z vollkommen beſtimmt.

2. Wirken also mehrere Kräfte parallel und ist in Beziehung auf die rechtwinklig sich schneidenden Axen die Lage des Punktes bestimmt, an welchem wirkt

die Kraft A, durch die Coordinaten a' a'' a'''
» B » » b' b'' b'''
» C » » c' c'' c'''
u. s. w., u. s. w.

so wird für dieselben Coordinatenaxen, die Lage, in welcher die äquipollente Kraft Z wirkt, durch die Gleichungen ausgedrückt

$$z' = \frac{a'A + b'B + c'C\ldots}{A + B + C\ldots}$$

$$z'' = \frac{a''A + b''B + c''C\ldots}{A + B + C\ldots}$$

$$z''' = \frac{a'''A + b'''B + c'''C\ldots}{A + B + C\ldots}$$

die Richtung von Z ist parallel zu denen der Kräfte A, B, C... und die Größe derselben ist $Z = A + B + C\ldots$

3. Sind mehrere Punkte im Raume so miteinander verbunden, daß sie ihre gegenseitige Lage nicht ändern können, und ist jeder dieser Punkte mit einem Gewichte belastet, so ist dies dasselbe, als wenn parallel wirkende Kräfte an diesen Punkten angebracht wären, da diese Gewichte alle einen senkrechten Druck gegen den Horizont erzeugen. Daher giebt es auch für alle diese Gewichte eine äquipollente Kraft, und es läßt sich die Größe und Lage derselben mit Hülfe der obigen Formeln bestimmen.

4. Da der Punkt bekannt ist, an welchem die den Gewichten A, B, C..., welche an miteinander verbundenen Punkten angebracht sind, äquipollente Kraft Z wirkt, so läßt sich für diese Gewichte auch immer das Gleichgewicht herstellen, wenn man an diesem Punkte eine nach entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft anbringt. Die Richtung des Druckes der Gewichte aber ist senkrecht gegen den Horizont, folglich wird das Gleichgewicht hergestellt, wenn man jenen Punkt senkrecht unterstützt.

5. Sind mehrere miteinander verbundene Punkte durch Gewichte belastet, so nennt man den Punkt, welcher senkrecht

unterſtützt werden muß, wenn alle Bewegung durch die Gewichte verhindert werden ſoll, den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt. Die Stütze deſſelben hat eine Laſt zu tragen, welche der Summe aller in den belaſteten Punkten angebrachten Gewichte gleich iſt, und es kann daher das ganze Gewicht aller belaſteten Punkte als in dem Schwerpunkte vereint gedacht werden. Iſt der Schwerpunkt nicht unterſtützt, ſo erfolgt eine Bewegung der ſämmtlichen zuſammenhängenden Punkte in derſelben Richtung, in welcher der Schwerpunkt unterſtützt werden müßte, alſo ſenkrecht gegen den Horizont, und es kann daher eine ſolche Bewegung immer als eine ſenkrechte Bewegung des Schwerpunktes angeſehen werden.

6. Die Materie eines jeden Körpers kann, als aus einzeln miteinander verbundenen ſchweren Theilen beſtehend, gedacht werden, und man kann daher jeden Körper, als aus unendlich vielen mit einander verbundenen, mit Gewichten belaſteten Punkten zuſammengeſetzt, anſehen: demnach muß jeder Körper nothwendigerweiſe einen Schwerpunkt haben, durch deſſen Unterſtützung das Fallen des Körpers verhindert wird. Ein nicht unterſtützter Körper fällt, wobei der Schwerpunkt deſſelben eine Linie durchläuft, die ſenkrecht gegen den Horizont iſt.

7. Jede gerade Linie, welche durch den Schwerpunkt eines Körpers geht, wird ein Durchmeſſer der Schwere deſſelben genannt. Hängt man einen Körper an einem Faden auf, ſo wird dieſer ſenkrecht geſpannt, und da durch denſelben das Fallen des Körpers verhindert wird, ſo geht die Linie dieſes Fadens durch den Schwerpunkt und iſt daher ein Durchmeſſer der Schwere.

8. Iſt die Lage zweier Durchmeſſer der Schwere eines Körpers gegeben, ſo iſt dadurch die Lage des Schwerpunktes ſelbſt beſtimmt, indem derſelbe der gemeinſchaftliche Durchſchnittspunkt beider Linien ſein muß.

9. Jede Ebene, welche durch den Schwerpunkt eines Körpers geht, nennt man eine Ebene der Schwere. Die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie zweier Ebenen der Schwere iſt daher ein Durchmeſſer der Schwere. Zugleich folgt hieraus auch, daß eine Ebene der Schwere und ein Durchmeſſer

der Schwere, der nicht in dieser Ebene liegt, sich immer in dem Schwerpunkte des Körpers schneiden müssen.

10. Läßt sich ein Körper in mehrere Theile so theilen, daß die Schwerpunkte dieser Theile in einer und derselben geraden Linie liegen, so nennt man diese Linie eine Axe der Schwere, und es muß in derselben auch nothwendigerweise der Schwerpunkt des Körpers selbst liegen. Jede Axe der Schwere ist daher auch immer ein Durchmesser der Schwere, aber nicht umgekehrt.

§. 30.

Allgemeine Aufgaben.

Aufgabe 1. Mehrere Körper sind so miteinander verbunden, daß sie ihre gegenseitige Lage nicht ändern können, und man sie daher als gemeinschaftliche Theile eines und desselben Körpers ansehen kann; von jedem dieser Körper ist die Lage des Schwerpunktes in Beziehung auf drei rechtwinklige Coordinatenaxen bestimmt: so ist z. B. die Lage des Schwerpunktes des Körpers A gegeben durch die Coordinaten, Fig. 37. und 37^a, $ma' = a'$, $ma'' = a''$ und $ma''' = a'''$, die des Schwerpunktes von B durch $mb' = b'$, $mb'' = b''$ und $mb''' = b'''$ ꝛc. Es soll in Beziehung auf eben diese Axen die Lage des gemeinschaftlichen Schwerpunktes bestimmt werden.

Auflösung. Wird das Gewicht des Körpers $A = A$, das von $B = B$, von $C = C$ ꝛc. gesetzt, und sind für den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der miteinander verbundenen Körper A, B, C... die Coordinaten $mz' = z'$, $mz'' = z''$ und $mz''' = z'''$, so ist, nach §. 29. No. 2,

$$z' = \frac{a'A + b'B + c'C...}{A + B + C...}$$

$$z'' = \frac{a''A + b''B + c''C...}{A + B + C...}$$

$$z''' = \frac{a'''A + b'''B + c'''C...}{A + B + C...}$$

und hierdurch ist die Lage des gemeinschaftlichen Schwerpunkts vollkommen bestimmt.

Aufgabe 2. Der Körper Z besteht aus den Theilen

A, B, C... und es ist in Beziehung auf drei rechtwinklige Coordinatenaxen die Lage des Schwerpunktes von

Z durch die Coordinaten z', z'', z'''
B » » b', b'', b'''
C » » c', c'', c'''
u. s. w.

gegeben; es soll hieraus die Lage des Schwerpunktes von A bestimmt werden.

Auflösung. Drücken Z, A, B, C... zugleich die Gewichte des ganzen Körpers und seiner Theile aus, und sind a', a'', a''' die gesuchten Coordinaten für den Schwerpunkt des Körpers A, so lassen sich die Werthe dieser Größen unmittelbar aus den Formeln, Aufgabe 1., durch eine einfache Reduction ableiten. Es ist also, weil $A + B + C... = Z$,

$$a' = \frac{z'Z - [b'B + c'C...]}{A}$$

$$a'' = \frac{z''Z - [b''B + c''C...]}{A} \text{ und } a''' = \frac{z'''Z - [b'''B + c'''C...]}{A}$$

wo für A der Werth gesetzt werden kann $A = Z - (B + C...)$.

Zusatz 1. Haben die Theile A, B, C... des Körpers Z eine solche Lage, daß die Schwerpunkte derselben alle in einer und derselben Ebene liegen, also z. B. in der Ebene pmq, Fig. 37., so liegt auch der Schwerpunkt von Z in derselben Ebene, und es wird für diesen Fall in den Formeln, Aufgabe 1., zwar der Werth von z' und z'' nicht geändert, aber der von z''' wird $= 0$. Eben so wird in den Formeln, Aufgabe 2., in diesem Falle $a''' = 0$.

Zusatz 2. Haben die Theile A, B, C... eines Körpers Z eine solche Lage, daß die Schwerpunkte derselben alle in einer und derselben geraden Linie liegen, die also eine Axe der Schwere von Z ist, so wird in den allgemeinen Formeln der obigen Aufgabe 1.

$$a'' = b'' = c'' ... = 0$$

und auch $a''' = b''' = c''' ... = 0$

und es ist daher die Lage des Schwerpunktes des ganzen Körpers durch die eine Gleichung bestimmt

$$z' = \frac{a'A + b'B + c'C...}{A + B + C...}$$

dagegen ist nun $z'' = 0$ und $z''' = 0$.

Eben ſo iſt in dieſem Falle für Aufgabe 2.

$$a' = \frac{z'Z - [b'B + c'C \ldots]}{A}$$

$$a'' = 0 \text{ und } a''' = 0.$$

§. 31.

Uebungsaufgaben zur Beſtimmung des Schwerpunktes der Linien.

Eine phyſiſche Linie beſteht aus einer ununterbrochen zuſammenhängenden Reihe von materiellen Punkten, welche ſämmtlich gleiches Gewicht haben, und es ſind daher auch gleiche Theile einer ſolchen Linie gleich ſchwer. Iſt die Linie gerade, ſo liegt hiernach auch der Schwerpunkt derſelben in ihrem Halbirungspunkte, da von dieſem Punkte aus auf beiden Seiten der Linie in je gleichen Entfernungen gleiche Belaſtungen ſtattfinden: man kann dieſelbe daher, wenn ihr Halbirungspunkt unterſtützt iſt, als einen gleicharmigen Hebel anſehen, bei welchem überall an den gleichen Armen gleiche Kräfte wirken. Zugleich folgt, daß von ungleichen Theilen einer ſchweren geraden Linie die Gewichte wie ihre Längen ſich verhalten müſſen, und daß auch von Theilen einer krummen Linie die Gewichte ihren wahren Längen proportionirt ſind.

Hiernach laſſen ſich nun folgende, den Schwerpunkt phyſiſcher Linien betreffende Aufgaben löſen:

Aufgabe 1. Zwei Linien Am und Bm, Fig. 39., ſind ihrer Größe und Lage nach gegeben; man ſoll den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt derſelben beſtimmen.

Auflöſung. Wird die Linie Am in a und Bm in b halbirt, ſo ſind a und b die Schwerpunkte dieſer Linien, und es verhält ſich, wenn ab gezogen wird, die Belaſtung des Punktes a zu der von b wie mA = A zu mB = B. Soll nun x der Unterſtützungspunkt des Hebels ab ſein, ſo muß die Proportion ſtattfinden

$$ax : bx = B : A = (mB) : (mA),$$

wodurch die Lage des Punktes x, welcher zugleich der gemeinſchaftliche Schwerpunkt der Linien mA und mB ſein beſtimmt iſt.

Zuſatz 1. Schneiden ſich die beiden Linien Am

Bm in m, und halbirt man den Winkel durch mn, durch welche Linie die ab, welche die Halbirungspunkte der Schenkel verbindet, in e geschnitten wird, so ist, wenn man ax = be nimmt, der hierdurch bestimmte Punkt x der gesuchte Schwerpunkt der Schenkel des Winkels m. Denn da me den Winkel m halbirt, so ist

$$ma : mb = ae : eb$$

und daher auch $mA : mB = ae : eb$

und folglich $mA : mB = bx : ax$.

Zusatz 2. Zieht man an m auf mA die Normale mp und nimmt mA und mp als die beiden Coordinatenaxen an, so ist für $mA = A$ und $mB = B$, wenn die Schwerpunkte dieser Linien in a und b liegen, $ma = \frac{1}{2}A$, $mb = \frac{1}{2}B$ und daher, für $\angle AmB = \varphi$,

$a' = \frac{1}{2}A$, $a'' = 0$, $b' = mb' = \frac{1}{2}B\cos\varphi$ und $mb'' = b'' = \frac{1}{2}B\sin\varphi$. Sind nun für den gemeinschaftlichen Schwerpunkt x die Coordinaten $mx' = x'$ und $mx'' = x''$, so ist

$$x' = \frac{a'A + b'B}{A + B} = \frac{A^2 + B^2\cos\varphi}{2(A + B)}$$

$$\text{und } x'' = \frac{a''A + b''B}{A + B} = \frac{B^2\sin\varphi}{2(A + B)}$$

Für $\varphi = 90^\circ$ folgt hieraus

$$x' = \frac{A^2}{2(A + B)} \text{ und } x'' = \frac{B^2}{2(A + B)}$$

Aufgabe 2. Es soll der Schwerpunkt des Umfanges irgend einer geradlinigen Figur gefunden werden.

Auflösung. Halbirt man die Seiten der Figur, Fig. 40., deren Längen durch A, B, C, D und E bezeichnet werden sollen, in a, b, c, d und e, so sind diese Halbirungspunkte die Schwerpunkte der einzelnen Seiten. Zieht man nun ab und theilt diese Linie in x so, daß

$$ax : xb = B : A,$$

so ist x der gemeinschaftliche Schwerpunkt von A und B. Ferner ziehe man xc und theile diese Linie in y so, daß

$$xy : yc = C : A + B,$$

so ist y der gemeinschaftliche Schwerpunkt der Linien A, B

und C. Eben so ist, wenn man ye zieht und in dieser Linie z so annimmt, daß

$$yz : ze = E : A + B + C,$$

der Punkt z der Schwerpunkt von den Seiten A, B, C und E. Wird nun endlich zd gezogen und in v so getheilt, daß

$$zv : vd = D : A + B + C + E,$$

so ist v der gemeinschaftliche Schwerpunkt von A, B, C, D und E, und also der gesuchte Schwerpunkt des Umfangs der ganzen Figur.

Es ist übrigens leicht einzusehen, daß dieses Verfahren immer angewendet werden kann, wie groß auch die Anzahl der Seiten sein mag, welche den Umfang der Figur bilden.

Zusatz. Sind überhaupt mehrere gerade Linien gegeben, es mögen diese den Umfang einer Figur bilden oder nicht, so läßt sich immer der gemeinschaftliche Schwerpunkt derselben mittelst des so eben angegebenen Verfahrens bestimmen.

Aufgabe 3. Man soll den Schwerpunkt des Umfangs einer regelmäßigen Figur angeben.

Auflösung. Beschreibt man um die regelmäßige Figur ABCDE, Fig. 41., einen Kreis und zieht von einer Ecke derselben A einen Durchmesser AM, so ist dieser ein Durchmesser der Schwere; denn werden die Seiten in a, b, c, d, e halbirt und man verbindet je zwei dieser Punkte, die in beiden Halbkreisen eine gleiche Lage haben, mit einander, wie z. B. a mit b und c mit e, so müssen diese Linien wieder halbirt werden, um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt von zwei verbundenen Linien zu erhalten: es ist hiernach x der gemeinschaftliche Schwerpunkt von AB und AE, und y ist der von BC und DE. Die Punkte x und y aber liegen in dem Durchmesser AM, und dasselbe gilt von allen übrigen auf gleiche Weise bestimmten Punkten. Ist die Anzahl der Seiten des Vielecks ungerade, so wird die zuletzt unten übrig bleibende Linie von dem Durchmesser halbirt, und es liegt folglich auch der Schwerpunkt dieser Linie in dem Durchmesser, der daher nothwendigerweise in allen Fällen ein Durchmesser der Schwere sein muß. Dasselbe gilt aber auch von einem zweiten Durchmesser, der durch eine andere Ecke

der Figur geht, und da die Durchmesser nur den Mittelpunkt des Kreises gemein haben, so folgt, daß der Mittelpunkt des zu einem regelmäßigen Vieleck gehörigen Kreises der Schwerpunkt des Umfangs desselben sein muß.

Zusatz. Der Schwerpunkt des Kreises liegt in dem Mittelpunkte desselben.

Aufgabe 4. Die drei Seiten eines Dreiecks sind gegeben; man soll die Lage des Schwerpunktes von dem Umfange desselben durch Rechnung bestimmen.

Auflösung. Setzt man in dem Dreieck abc, Fig. 42., die Seite bc = A, ac = B, ab = C, die Höhe cd = h, die Theile der Grundlinie bd = α und ad = β und halbirt die Seiten in a″, b″, c″, so sind diese Punkte die Schwerpunkte der drei Seiten, und es ist nun in Beziehung auf die Axe ba

$$ba' = a' = \tfrac{1}{2}\alpha,\ bb' = b' = C - \tfrac{1}{2}\beta,\ bc' = c' = \tfrac{1}{2}C$$

und in Beziehung auf die zweite Axe bp, welche in b auf ba normal steht, ist

$$a'a'' = a'' = \tfrac{1}{2}h,\ b'b'' = b'' = \tfrac{1}{2}h \text{ und } c'' = 0.$$

Liegt nun der Schwerpunkt des Umfanges des Dreiecks in x″, so ist

$$bx' = x' = \frac{a'A + b'B + c'C}{A+B+C} \text{ und } x'x'' = x'' = \frac{a''A + b''B + c''C}{A+B+C}$$

folglich ist auch, wenn man hier die obigen Werthe substituirt und die Summe der drei Seiten mit S bezeichnet,

$$x' = \frac{\frac{1}{2}\alpha A + (C - \frac{1}{2}\beta)B + \frac{1}{2}C \cdot C}{S} \text{ und } x'' = \frac{\frac{1}{2}hA + \frac{1}{2}hB}{S}$$

nämlich es ist, weil $\beta = C - \alpha$,

$$x' = \frac{\alpha A + (C+\alpha)B + C^2}{2S} = \frac{\alpha(A+B) + C(B+C)}{2S}$$

$$= \frac{\alpha(S-C) + C(S-A)}{2S} = \frac{C+\alpha}{2} - \frac{C(A+\alpha)}{2S}$$

$$\text{und } x'' = \frac{h(A+B)}{2S}$$

Die Werthe von h und von α aber sind durch die gegebenen drei Seiten des Dreiecks vollkommen bestimmt.

Zusatz. Für A = B = C findet man für die Lage

des Schwerpunktes eines gleichſeitigen Dreiecks, da in dieſem Falle $\alpha = \frac{1}{3}C$ iſt,

$$x' = \frac{C + \frac{1}{3}C}{2} - \frac{C(C + \frac{1}{3}C)}{6C} = \frac{2}{4}C - \frac{1}{4}C = \frac{1}{3}C$$

und $x'' = \frac{h \cdot 2C}{6C} = \frac{1}{3}h$.

Aufgabe 5. Es ſoll der Schwerpunkt eines Kreisbogens angegeben werden.

Auflöſung. Wird, Fig. 43., der Kreisbogen in m halbirt und man zieht den Radius mc, ſo iſt dieſer ein Durchmeſſer der Schwere; denn ziehe man für ma = mb die Sehne ab, ſo iſt dieſe in a und b von den kleinen an dieſen Punkten anliegenden Bogen gleich belaſtet, und der Schwerpunkt beider Bogen liegt daher in der Mitte p der Sehne, alſo in dem Radius mc. Daſſelbe gilt von jedem andern Paare gegenüberliegender Punkte des Bogens.

Werden für am = mb die Sehnen ab und bm gezogen und man ſetzt $\angle mba = \varphi$, ſo iſt $am = bm = 2\varphi$, und für cm = R iſt daher die Sehne $bm = 2R \sin \varphi$. Da nun

$$bm : mp = 1 : \sin \varphi,$$

ſo iſt $mp = 2R \sin^2 \varphi = R(1 - \cos 2\varphi)$.

Iſt nun der Punkt a von den beiden kleinen Bogen $a\alpha' = a\alpha'' = \alpha$ belaſtet und eben ſo auch b, ſo erleidet p einen Druck $= 4\alpha$. Es iſt alſo für die Axe mc und den Anfangspunkt m das Moment der Laſt auf p =

$$(mp) \times 4\alpha = 4\alpha R(1 - \cos 2\varphi)$$

ein Ausdruck, in welchem nur der Winkel φ veränderlich iſt.

Setzt man die Länge des Bogens $m\alpha'' = 2n\alpha$, ſo iſt $ma = (2n - 1)\alpha = 2\varphi$, und es wird, wenn man jeden Punkt wie a durch 2α belaſtet denkt und die entſprechenden Ordinaten zieht, mq in n Theile getheilt. Der allgemeine Ausdruck für das Moment eines Theils des Kreisbogens $= 2\alpha$, auf beiden Seiten in gleichen Entfernungen von m, iſt wie bereits bemerkt worden,

$$(mp) \times 4\alpha = 4\alpha R(1 - \cos 2\varphi)$$
$$= 4\alpha R(1 - \cos(2n - 1)\alpha)$$

Werden hier nach und nach für n die Werthe 1, 2, 3.. bis n geſetzt, ſo erhält dieſer Ausdruck die Werthe

$\alpha R(1 - \cos\alpha)$; $4\alpha R(1 - \cos 3\alpha)$; $4\alpha R(1 - \cos 5\alpha)$...; $4\alpha R(1 - \cos(2n-1)\alpha$

Werden dieſe Werthe ſämmtlich addirt, ſo erhält man die Summe aller Momente des Bogens $\alpha''m\beta''$, von welchem jede Hälfte $\alpha''m = m\beta''$ in n gleiche Theile getheilt iſt, und die Größe eines jeden dieſer Theile iſt $= 2\alpha$. Für die Summe aller dieſer Momente $= S$ und $mx = z$ iſt alſo, wenn x der Schwerpunkt des ganzen Bogens ſein ſoll,

$$z = \frac{S}{4n\alpha} = \frac{S}{A}$$

wenn die Länge des Bogens $\alpha''m\beta'' = A$ geſetzt wird.

Hier iſt nun

$$S = 4\alpha R(1-\cos\alpha) + 4\alpha R(1-\cos 3\alpha) + 4\alpha R(1-\cos 5\alpha) \ldots + 4\alpha R(1-\cos(2n-1)\alpha)$$

nämlich es iſt

$$S = 4\alpha R \cdot n - 4\alpha R[\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha \ldots + \cos(2n-1)\alpha]$$
$$= RA - 4\alpha R[\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha \ldots + \cos(2n-1)\alpha]$$

Nun iſt aber ganz allgemein

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cos(\alpha+3\beta) \ldots + \cos(\alpha+m\beta)$$
$$= \frac{\cos(\alpha + \frac{1}{2}m\beta)\ \sin\frac{1}{2}(m+1)\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}$$

wie in dem erſten Bande meiner praktiſchen Uebungen für angehende Mathematiker, Seite 442 ff., bewieſen wird; es iſt alſo auch hier, für $\beta = 2\alpha$ und $m = n-1$,

$$\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha \ldots + \cos(2n-1)\alpha$$
$$= \frac{\cos\left[\alpha + \left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot 2\alpha\right]\ \sin n\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cos n\alpha\ \sin n\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{\sin \mathrm{Arc}(m\alpha'')}{2\sin\alpha} = \frac{\sin\frac{1}{2}A}{2\sin\alpha}$$

folglich iſt $S = RA - 4\alpha R \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}A}{2\sin\alpha} = RA - \frac{2\alpha R\ \sin\frac{1}{2}A}{\sin\alpha}$

Hier aber iſt nach der Vorausſetzung α ein ſehr kleiner Bogen und man kann daher $\sin\alpha = \alpha$ ſetzen,

alſo iſt $S = RA - 2R\ \sin\frac{1}{2}A$.

Da nun $z = \frac{S}{A}$, ſo iſt auch

$$z = \frac{RA - 2R\ \sin\frac{1}{2}A}{A} = R - \frac{2R\ \sin\frac{1}{2}A}{A}.$$

Wird der Mittelpunkt c des Kreiſes als der An-

fangspunkt der Abſciſſen angenommen und cx = x geſetzt, ſo iſt

$$x = R - z = \frac{2R \sin \frac{1}{2}A}{A}$$

Es iſt aber $2 \sin \frac{1}{2}A = 2 \sin (\alpha''m) = 2(\alpha''q) = \alpha''\beta''$ die Sehne des Bogens $\alpha''m\beta''$, und daher iſt, wenn man die Sehne mit C bezeichnet,

$$x = \frac{RC}{A}$$

wodurch die Proportion erhalten wird

$$A : C = R : x.$$

Es verhält ſich alſo die Länge eines Kreisbogens zu der dazu gehörigen Sehne, wie der Radius des Kreiſes zu dem Abſtande des Schwerpunktes des Bogens von dem Mittelpunkte des Kreiſes.

Zuſatz 1. Iſt der Kreisbogen = 180°, ſo wird $A = R\pi$ und $C = 2R$, und es iſt daher in dieſem Falle

$$x = \frac{R \cdot 2R}{R\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot R.$$

Zuſatz 2. Hält der Kreisbogen 90°, ſo wird $A = \frac{1}{2}R\pi$ und $C = R\sqrt{2}$, alſo iſt in dieſem Falle

$$x = \frac{R \cdot R\sqrt{2}}{\frac{1}{2}R\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot R.$$

Wenn der Kreisbogen 60° hält, ſo iſt $A = \frac{1}{3}R\pi$ und $C = R$,

$$\text{folglich } x = \frac{R \cdot R}{\frac{1}{3}R\pi} = \frac{3}{\pi} \cdot R.$$

Hieraus folgt zugleich, daß die Quadrate der Abſtände des Schwerpunktes der Bogen von 90° und von 60° von dem Mittelpunkte des Kreiſes zu einander ſich verhalten, wie 8 : 9.

§. 32.

Uebungsaufgaben zur Beſtimmung des Schwerpunktes der Flächen.

Die geometriſche Fläche iſt zwar von Linien begränzt, es kann dieſelbe aber nie als aus Linien zuſammengeſetzt angeſehen werden. Anders verhält es ſich mit der phyſiſchen Fläche, die nur in ſo fern gedacht werden kann, in wiefern

physische Linien denkbar sind, und die man daher immer als aus materiellen Linien bestehend sich vorstellen kann. Eine solche Fläche ist in allen ihren Theilen gleich belastet, und es ist daher das Gewicht einzelner Theile derselben dem Flächeninhalte dieser Theile proportionirt. Wird eine materielle Fläche durch parallele Linien in mehrere Theile zerlegt, und läßt sich nun eine gerade Linie so ziehen, daß alle Parallelen von derselben halbirt werden, wie groß auch die Anzahl derselben sein mag, so ist diese Linie ein Durchmesser der Schwere der Fläche. Denn denkt man sich die Parallelen unendlich nahe nebeneinander, so wird die Fläche durch dieselben in materielle Linien zerlegt, und der Schwerpunkt einer jeden dieser Linien liegt in ihrem Mittelpunkte; da nun nach der Voraussetzung die gezogene gerade Linie alle Parallelen halbiren soll, so geht sie durch den Schwerpunkt aller materiellen Linien, aus welchen die Fläche besteht, und daher auch durch den Schwerpunkt der Fläche selbst.

In Beziehung auf materielle Flächen können nun folgende Aufgaben gelöst werden:

Aufgabe 1. Es soll der Schwerpunkt eines Dreiecks angegeben werden.

Auflösung. Halbirt man in dem Dreieck abc, Fig. 44., die Seite ac in β und zieht bβ, so halbirt diese Linie auch alle Parallelen zu ac und ist daher ein Durchmesser der Schwere. Aus demselben Grunde ist aber auch aα ein Durchmesser der Schwere, wenn bc in α halbirt ist; da nun bβ und aα sich in x schneiden, so ist x der gesuchte Schwerpunkt der Fläche des Dreiecks.

Zusatz 1. Verlängert man bβ und zieht durch c die cd parallel zu aα, so ist, weil bα = αc, auch bx = xd; aber wegen der Congruenz der Dreiecke aβx und cβd ist xβ = βd, folglich ist auch $x\beta = \frac{1}{2}(bx) = \frac{1}{3}(b\beta)$. Der Abstand des Schwerpunktes eines Dreiecks von der Spitze desselben ist daher $\frac{2}{3}$ der Linie bβ, welche die gegenüberliegende Seite halbirt. Zugleich geht hieraus hervor, daß der normale Abstand des Schwerpunktes von der Grundlinie = $\frac{1}{3}$ der Höhe des Dreiecks sein muß.

Zusatz 2. Wird in der Ebene des Dreiecks abc, Fig. 45.,

irgend eine gerade Linie mn gezogen, ſo läßt ſich der Abſtand des Schwerpunktes x von dieſer Linie auf folgende Art beſtimmen:

Man ziehe auf mn die Normalen $aa' = a'$, $bb' = b'$, $cc' = c'$ und $xx' = x'$ und durch a eine Parallele zu mn, ſo iſt $bb'' = b' - a'$ und $cc'' = c' - a'$. Da nun bc in α halbirt iſt, ſo muß ſein

$$bb'' + cc'' = 2\,(\alpha\alpha'),$$

folglich iſt $\alpha\alpha'' = \dfrac{b' - a' + c' - a'}{2} = \dfrac{b' + c' - 2a'}{2}$

und da $\alpha\alpha'' : xx'' = a\alpha : ax = 3 : 2$,

ſo wird $xx'' = \frac{2}{3}(\alpha\alpha'') = \dfrac{b' + c' - 2a'}{3}$

hierzu $x''x' = aa' = a$

giebt $xx' = \dfrac{a' + b' + c'}{3}$

Der Abſtand des Schwerpunktes x von der Linie mn iſt alſo dem dritten Theile der Summe der Abſtände der drei Spitzen des Dreiecks von dieſer Linie gleich.

Aufgabe 2. Der Schwerpunkt irgend einer gradlinigen Figur ſoll beſtimmt werden.

Auflöſung. Wird die Figur durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, ſo läßt ſich der Schwerpunkt eines jeden dieſer Dreiecke angeben. Verbindet man nun die Schwerpunkte von zwei Dreiecken und theilt die Verbindungslinie in dem umgekehrten Verhältniſſe dieſer Dreiecke, ſo giebt der Theilpunkt den Schwerpunkt von beiden zuſammen, und wird dieſer mit dem Schwerpunkte eines dritten Dreiecks verbunden, und die Verbindungslinie wieder in dem umgekehrten Verhältniſſe der Fläche der Figuren getheilt, zu welchen die verbundenen Schwerpunkte gehören, ſo bekommt man den Schwerpunkt von drei Dreiecken u. ſ. w.

Zuſatz. Der Schwerpunkt eines Vierecks abcd, Fig. 46., läßt ſich auch auf folgende Art beſtimmen: Man verbinde die Schwerpunkte der beiden Dreiecke abc und acd, ſo muß der Schwerpunkt des Vierecks in dieſer Linie liegen, und eben muß er auch in der Linie liegen, welche die Schwerpunkte beiden Dreiecke bcd und abd verbindet. Der Durchſchni

punkt dieser beiden Verbindungslinien ist daher der gesuchte Schwerpunkt des Vierecks.

Ein Fünfeck abcde, Fig. 46., kann durch die Linie ad in ein Viereck und in ein Dreieck zerlegt werden, und es muß daher der Schwerpunkt des Fünfecks in der Linie liegen, welche die Schwerpunkte von abcd und ade verbindet. Man kann das Fünfeck aber auch durch die Linie ac in ein Viereck und ein Dreieck zerlegen, und auf diese Weise eine zweite Linie finden, in welcher der Schwerpunkt der ganzen Figur liegen muß. Es sind also beide Linien Durchmesser der Schwere, und ihr Durchschnittspunkt ist daher der gesuchte Schwerpunkt des Fünfecks.

Da jedes Sechseck auf mehrere verschiedene Arten in ein Dreieck und ein Fünfeck, oder auch in zwei Vierecke zerlegt werden kann, und der Schwerpunkt einer jeden dieser Figuren nach dem Vorhergehenden sich finden läßt, so kann man auch leicht zwei Durchmesser der Schwere in einem Sechseck ziehen und hierdurch den Schwerpunkt desselben angeben. Es ist leicht einzusehen, daß dieses Verfahren bei einer jeden geradlinigen Figur sich anwenden läßt, wie groß auch die Anzahl der Seiten derselben sein mag.

Aufgabe 3. Der Schwerpunkt einer regelmäßigen Figur soll angegeben werden.

Auflösung. Jeder in einer solchen Figur durch eine Spitze derselben gezogener Durchmesser ist, wie leicht einzusehen, ein Durchmesser der Schwere. Der Schwerpunkt der ganzen Figur liegt daher in dem Mittelpunkte des dazu gehörigen Kreises.

Zusatz. Der Schwerpunkt eines Kreises liegt in dem Mittelpunkte desselben, und der Schwerpunkt eines jeden Parallelogramms in dem Durchschnittspunkte der beiden Diagonalen.

Aufgabe 4. Der Schwerpunkt eines Paralleltrapez abcd, Fig. 47., soll angegeben werden.

Auflösung. Verlängert man ad und bc, bis sie sich e schneiden, und zieht von e an den Halbirungspunkt g [illegible] Grundlinie ab die eg, welche zugleich die cd in f halbirt, ist eg ein Durchmesser der Schwere sowohl des ganzen

Dreiecks abe, als auch des kleineren cde, und daher auch von dem Trapez. Es ſei

z der Schwerpunkt des Dreiecks abe,
y » » » » cde,
x » » » Trapezes abcd

ſo iſt $gz = \frac{1}{3}(eg)$ und $fy = \frac{1}{3}(fe)$.

Setzt man nun $ab = a$, $cd = \alpha$, gf (welche die Halbirungspunkte beider Parallelen verbindet) $= d$, $gx = x$, $gz = z$, $gy = y$ und $ge = v$, die Fläche $abcd = A$, $cde = B$ und $abe = C = A + B$, ſo iſt

$$ab : cd = eg : ef$$

$$\text{alſo } a : \alpha = v : v - d$$

$$\text{und daher } v = \frac{ad}{a - \alpha} \text{ und } v - d = \frac{\alpha d}{a - \alpha}$$

Ferner iſt

$$z = \tfrac{1}{3}(eg) = \tfrac{1}{3}v = \frac{ad}{3(a - \alpha)}$$

$$\text{und } y = d + \tfrac{1}{3}(ef) = d + \tfrac{1}{3}(v - d) = \frac{\alpha d}{3(a - \alpha)} + d$$

Da übrigens $\Delta abe : \Delta cde = ab \times eg : cd \times ef$

ſo iſt auch $C : B = av : \alpha(v - d)$

oder $A + B : B = av : \alpha(v - d)$

und es iſt daher

$$B = \frac{A\alpha(v - d)}{(a - \alpha)v + \alpha d}$$

$$= \frac{A\alpha\left(\frac{\alpha d}{a - \alpha}\right)}{ad + \alpha d} = \frac{A\alpha^2}{a^2 - \alpha^2}$$

$$\text{und } C = A + B = \frac{Aa^2}{a^2 - \alpha^2}$$

Nimmt man nun ge als Abſciſſenaxe an, ſo iſt

$$(gx)\,A + (gy)\,B = (gz)\,C$$

es iſt alſo auch

$$xA + yB = zC$$

$$\text{alſo } xA = zC - yB$$

und hiernach, wenn für z, y, B und C die gefundenen Werthe geſetzt werden,

$$xA = \frac{ad}{3(a - \alpha)} \cdot \frac{Aa^2}{a^2 - \alpha^2} - \left(\frac{\alpha d}{3(a - \alpha)} + d\right)\frac{A\alpha^2}{a^2 - \alpha^2}$$

alſo

$$\text{also } x = \frac{da^3}{3(a-\alpha)(a^2-\alpha^2)} - \frac{d(3a-2\alpha)\alpha^3}{3(a-\alpha)(a^2-\alpha^2)}$$

$$= \frac{d(a^3-3a\alpha^2+2\alpha^3)}{3(a-\alpha)(a^2-\alpha^2)} = \frac{d(a-\alpha)^2(a+2\alpha)}{3(a-\alpha)^2(a+\alpha)}$$

$$\text{und es ist daher } x = \frac{(a+2\alpha)\,d}{3(a+\alpha)}$$

Zusatz. Da, wenn man von f eine Normale auf ab fällt und durch den Schwerpunkt x des Trapezes eine Parallele zu ab zieht, diese die Normale nach demselben Verhältnisse theilt, nach welchem fg in x getheilt ist, so erhält man für den normalen Abstand des Schwerpunktes von ab, wenn die Höhe des Trapezes mit h bezeichnet wird, die Formel

$$x'' = \frac{(a+2\alpha)\,h}{3(a+\alpha)}$$

Aufgabe 5. Der Schwerpunkt eines Kreisausschnitts soll angegeben werden.

Auflösung. Ein Kreisausschnitt mcn, Fig. 48., dessen Basis mn ein sehr kleiner Bogen ist, kann als ein geradliniges Dreieck betrachtet werden; wird daher mn in d halbirt, cd gezogen und $cz = \frac{2}{3}(cd)$ genommen, so ist z der Schwerpunkt des schmalen Ausschnittes mcn. Nun läßt sich der ganze Kreisbogen ab in lauter kleine Theile = mn zertheilen, und die Schwerpunkte aller hierdurch bestimmten Ausschnitte liegen in einer gleichen Entfernung von c, also in dem Bogen $\alpha z \beta$, welcher aus c mit einem Radius $cz = \frac{2}{3}(cd)$ beschrieben werden kann. Der Bogen $\alpha\beta$ kann daher als in allen Punkten gleich belastet angesehen werden, und der Schwerpunkt dieses Bogens ist zugleich der des ganzen Kreisausschnitts. Nun ist aber, nach §. 31. Aufgabe 5., wenn x der gesuchte Schwerpunkt des Bogens $\alpha\beta$ ist,

$$\text{Bogen } \alpha z \beta : \text{Sehne } \alpha\beta = cz : cx$$

und weil Bogen $\alpha\beta z$: Sehne $\alpha\beta$ = Bogen adb : Sehne ab, so ist auch, wenn der Bogen adb = A, die Sehne ab = C, der Radius cd = R und cx = x gesetzt wird,

$$A : C = \tfrac{2}{3}R : x$$

$$\text{und daher ist } x = \frac{2CR}{3A}$$

Zuſatz. Iſt der Bogen ab ein Halbkreis, ſo w
$A = R\pi$ und $C = 2R$, alſo iſt in dieſem Falle

$$x = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4R}{3 \cdot 3{,}1416} = \frac{10000}{22562} R$$

nämlich es iſt ziemlich genau $x = \frac{39}{88} R$

Eben ſo iſt für einen Viertelskreis = ab der Werth von

$$x = \frac{56568}{94248} \cdot R$$

alſo nau $x = \frac{8}{5} R$.

Iſt ab ein Bogen vo wird

$$x = \frac{2 \cdot}{3} \cdot \frac{2R}{\pi} = \frac{10000}{15708} R$$

und daher zu genau $x = \frac{9}{14} R$.

Aufgabe 6. Der Schwerpunkt eines Kreisabſchni amb, Fig. 49., ſoll beſtimmt werden.

Auflöſung. Man ſetze die Fläche des Abſchnit amb = S, des Dreiecks cab = F und des Ausſchnittes ach = S + F = Q. Ferner den Abſtand des Schwerpunktes des Kreisabſchnitts von dem Mittelpunkte des Kreiſes = cx = den des Schwerpunktes z des Dreiecks cab von dem Mitt punkte des Kreiſes = cz = z, und den Abſtand des Schw punktes y des Kreisausſchnittes acbm von dem Mittelpun c = cy = y, ſo iſt

$$(cx) \cdot abmd + (cz) \cdot acb = (cy) \cdot acbm,$$

nämlich es iſt

$$xS + zF = yQ$$

und daher $xS = yQ - zF$

Nun iſt, wenn der Bogen amb = A, der Radius = die Sehne ab = C und die Normale cd = D geſetzt wi $Q = \frac{AR}{2}$ und $F = \frac{CD}{2}$, folglich iſt auch

$$xS = y \cdot \frac{AR}{2} - z \cdot \frac{CD}{2}$$

Es iſt, nach Aufgabe 5., der Abſtand des Schwerp eines Kreisausſchnitts von dem Mittelpunkte des Kre $y = \frac{2CR}{3A}$ und die Lage des Schwerpunktes z von d

Dreieck abc wird durch die Gleichung ausgedrückt $cz = z = \frac{2}{3}(cd) = \frac{2}{3}D$, also ist auch, wenn man diese Werthe setzt,

$$xS = \frac{2CR}{3A} \cdot \frac{AR}{2} - \frac{2D}{3} \cdot \frac{CD}{2}$$

und dieses giebt $xS = \frac{CR^2}{3} - \frac{CD^2}{3} = \frac{C(R^2 - D^2)}{3}$

Da nun $R^2 - D^2 = (ad)^2 = \left(\frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{4}$, so folgt

$$xS = \frac{C^3}{12}$$

und daher endlich $x = \frac{C^3}{12S}$.

Man erhält also den Abstand des Schwerpunktes eines Kreisabschnitts von dem Mittelpunkte des Kreises, wenn man die dritte Potenz der Sehne des Abschnittes durch den zwölffachen Flächeninhalt desselben theilt.

Zusatz. Daß der Schwerpunkt x des Kreisabschnittes amb in dem Radius cm liegen muß, welcher den Bogen ab halbirt, ist leicht einzusehen.

Aufgabe 7. Es soll der Schwerpunkt eines zwischen zwei Sehnen ab und $\alpha\beta$, Fig. 50., liegenden Kreisstückes angegeben werden.

Auflösung. Wird der Bogen ab in m halbirt und der Radius cm gezogen, so ist, für $ab = c$ und die Fläche amb $= s$, der Schwerpunkt x des Abschnittes amb durch die Gleichung bestimmt $cx = x = \frac{c^3}{12s}$. Eben so ist, wenn man den Bogen $\alpha\beta$ in μ halbirt und den Radius $c\mu$ zieht, für $\alpha\beta = C$ und die Fläche $c\mu\beta = S$, der Schwerpunkt y dieses Abschnittes durch die Gleichung bestimmt

$$cy = y = \frac{C^3}{12S}$$

Da nun S aus den beiden Theilen besteht s und $ab\beta\alpha = T$, so muß, wenn man xy zieht, der Schwerpunkt z von T in der Verlängerung dieser Linie liegen, und es muß nun sein

$$(yz) \cdot T = (yx) \cdot s$$

$$\text{folglich } (yz) = \frac{(yx) \cdot s}{T} = \frac{(yx) \cdot s}{S - s}$$

Der Werth von yz iſt alſo durch den von yx vollkommen beſtimmt, und da man in dem Dreieck xcy die beiden Seiten $cx = x = \frac{c^2}{12s}$ und $cy = y = \frac{C^2}{12S}$ und den von denſelben eingeſchloſſenen Winkel $xcy = \varphi$, welcher durch die Lage der Sehnen $\alpha\beta$ und ab beſtimmt iſt, kennt, ſo iſt auch der Werth von yx gegeben, nämlich es iſt

$$(yx) = \sqrt{(x^2 \quad - 2xy \cos \varphi)}.$$

Zuſatz. Der φ iſt dem Winkel gleich, unter welchem die beiden Sehnen ab und $\alpha\beta$ verlängert ſich ſchneiden, und es hat daher φ die Größe der Differenz der beiden Bogen $b\beta$ und $a\alpha$ zu ſeinem Maaße.

Beiſpiel. Es iſt die Sehne ab = c = 18,4; der Sehne $\alpha\beta$ = C = 23,4; der Radius des Kreiſes R = 14 und der Bogen $\alpha a = 8^\circ 4' 56''$; es ſoll der Schwerpunkt der Fläche ab$\beta\alpha$ angegeben werden.

1. Setzt man den Bogen amb, in Grade ausgedrückt, = 2a und den Bogen $\alpha m\beta$ = 2A, ſo iſt

$\frac{1}{2}c = R \sin a$ und $\frac{1}{2}C = R \sin A$

folglich iſt $\sin a = \frac{c}{2R} = \frac{18,4}{28} = 0,6571428$

und $\sin A = \frac{C}{2R} = \frac{23,4}{28} = 0,8357143$

und daher iſt $a = 41^\circ 4' 57''$ und $A = 56^\circ 41' 25''$

alſo $amb = 2a = 82^\circ 9' 54''$ und $\alpha m\beta = 2A = 113^\circ 22' 50''$

Da nun $\alpha a = 8^\circ 4' 56''$ und

$b\beta = \alpha m\beta - (\alpha a + amb)$

ſo iſt $b\beta = 113^\circ 22' 50'' - (8^\circ 4' 56'' + 82^\circ 9' 54'')$

$= 113^\circ 22' 50'' - 90^\circ 14' 50'' = 23^\circ 8'$

und daher $\angle xcy = \varphi = \frac{b\beta - a\alpha}{2} = \frac{23^\circ 8' - 8^\circ 4' 56''}{2}$

$= \frac{15^\circ 3' 4''}{2} = 7^\circ 31' 32''$

2. Die Fläche des Abſchnittes amb = s wird ausgedrückt durch die Formel

$$s = \frac{2a}{360} \cdot R^2\pi - \tfrac{1}{2}R^2 \sin 2a$$

und es ist eben so die Fläche $\alpha m \beta =$

$$S = \frac{2A}{360} \cdot R^2\pi - \tfrac{1}{2}R^2 \sin 2A$$

folglich ist $s = \left[\frac{16433}{72000} \cdot \pi - \frac{1}{2} \sin 82° 9' 54''\right] R^2$

und $S = \left[\frac{40817}{129600} \cdot \pi - \frac{1}{2} \sin 66° 37' 10''\right] R^2$

Es ist also $s = (0{,}7170250 - 0{,}4953323)\ R^2$
$= 0{,}2216927 \cdot R^2$
und $S = (0{,}9894320 - 0{,}4589446)\ R^2$
$= 0{,}5304874 \cdot R^2$
und hiernach $S - s = T = 0{,}3087947 \cdot R^2$

3. Da $cx = x = \frac{c^3}{12s}$ und $cy = y = \frac{C^3}{12S}$

so ist $x = \frac{18{,}4^3}{2{,}6003124 \cdot R^2}$ und $y = \frac{23{,}4^3}{6{,}3658488 \cdot R^2}$

und man findet hieraus

$\log x = 1{,}0772651$ und $\log y = 1{,}0115352$

also $x = 11{,}9472$ und $y = 10{,}2692$

4. Nun ist $(xy) = \sqrt{[x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi]}$
$= \sqrt{[x^2 + y^2 - 2xy \cos 7° 31' 32'']}$

und man findet $x^2 = 142{,}735$
$y^2 = 105{,}456$
$248{,}191$
$2xy \cos \varphi = 243{,}261$

folglich ist $(xy) = \sqrt{4{,}930}$
und daher $(xy) = 2{,}22$

5. Endlich ist

$$(yz)\ T = (xy)\ s$$

$$\text{also } (yz) = \frac{(xy)\ S}{T} = \frac{(xy)\ S}{S - s}$$

nlich es ist, wenn man die Werthe setzt,

$$(yz) = \frac{2{,}22 \times 0{,}2216927 \cdot R^2}{0{,}3087947 \cdot R^2}$$

und daher $(yz) = 1{,}593$

durch also die Lage des Schwerpunktes der Fläche $ab\beta\alpha$ kommen bestimmt ist.

§. 33.

Aufgaben den Schwerpunkt der Körper betreffend.

Jeder Körper wird bei der Bestimmung des Schwerpun
tes desselben als durchgehends von gleicher Dichtigkeit ang
nommen, und es ist daher das Gewicht einzelner Theile i
mer dem Kubikinhalte derselben proportionirt: hiernach ka
man, wenn die Kub[illegible] zugleich als Gewichtseinh
angenommen wird, den K[illegible]inhalt für das Gewicht
nutzen. Nur wenn in einem besondern Falle einzelne The
eines Körpers verschiedene spe[illegible]fische Schwere haben, muß
jeden Theil besonders das [illegible]dukt aus dem eigenthümlich
Gewicht und dem Kubikinh[illegible]t als das Gewicht angeno
men werden.

Jeder materielle Körper kann als aus materiellen Fläch
zusammengesetzt angesehen werden: läßt sich daher ein Kör
durch parallele Schnitte in Theile von der Art zerlegen, d
die Schwerpunkte aller dieser Theile, wie groß man auch
Anzahl derselben annehmen mag, in einer geraden Linie
gen, so ist diese Line eine Axe der Schwere des Körpers, u
es muß daher der Schwerpunkt des ganzen Körpers in di
Linie liegen. Die Schwere des ganzen Körpers ist auf di
Linie vertheilt, und die Art und Weise, wie jeder Theil der
ben belastet ist, hängt von der Form des Körpers ab.
diese von der Art, daß zu je gleich großen Theilen der
gleich große Theile des Körpers gehören, so liegt der Schw
punkt des Körpers in der Mitte dieser Linie. Es lassen
nun folgende hierher gehörige Aufgaben lösen:

Aufgabe 1. Es soll der Schwerpunkt eines Pris
angegeben werden.

Auflösung. Die charakteristische Eigenschaft der Pr
men besteht darin, daß alle Schnitte, parallel zur Gru
fläche, einander congruent sind, und daß jede Linie, welche
rallel zu einer Seitenkante des Körpers durch denselben ge
gen wird, alle parallel zur Grundfläche durch den Körper
legte Ebenen auf eine gleiche Weise schneidet, so daß
Durchschnittspunkt in allen diesen Ebenen eine gleiche L
hat. Sucht man daher den Schwerpunkt der Grundflä

eines Prisma und legt durch dieselbe eine Linie parallel zu den Seitenkanten des Körpers, so geht diese Linie durch die Schwerpunkte aller der Grundfläche parallelen Ebenen, und es ist diese Linie daher eine Axe der Schwere. Nun gehören aber zu gleichen Theilen dieser Linie auch gleiche Theile des Prisma, folglich ist sie überall gleich gelastet, und der Schwerpunkt liegt daher in dem Mittelpunkte derselben.

Zusatz. Der Schwerpunkt eines jeden Prisma, welche Form auch die Grundfläche desselben haben mag, liegt daher immer in dem Halbirungspunkte der geraden Linie, welche die Schwerpunkte der beiden Grundflächen desselben verbindet.

Aufgabe 2. Der Schwerpunkt einer Pyramide soll angegeben werden.

Auflösung. Wird eine Pyramide parallel zur Grundfläche durch eine Ebene geschnitten, so ist der Durchschnitt immer der Grundfläche ähnlich, und zieht man an irgend einen Punkt der Grundfläche von der Spitze der Pyramide eine gerade Linie, so haben die Punkte, in welchen die zur Grundfläche parallelen Ebenen von dieser Linie geschnitten werden, in allen diesen Ebenen eine ähnliche Lage. Die Linie, welche hiernach von der Spitze der Pyramide an den Schwerpunkt der Gundfläche derselben gezogen werden kann, geht daher auch durch die Schwerpunkte aller zu derselben parallelen Ebenen, und ist also eine Axe der Schwere der Pyramide. Es sei diese Axe der Schwere = a, die Grundfläche der Pyramide = G, und der Neigungswinkel der Axe gegen die Grundfläche = φ, so ist der Kubikinhalt der ganzen Pyramide $= \frac{aG \sin \varphi}{3}$. Ferner sei ein Theil der Axe = z, und die Ebene, welche durch den Endpunkt derselben parallel zur Grundfläche den Körper schneidet, = g, so ist

$$G : g = a^2 : z^2$$

und daher $g = \frac{G}{a^2} \cdot z^2$

Wird nun g als eine materielle Ebene angesehen, so kann man, wenn die Stärke derselben, die natürlich unendlich klein gedacht werden muß, = α gesetzt wird, den Kubikinhalt derselben mit

$$g\alpha \sin\varphi = \frac{G\alpha \sin\varphi}{a^2} \cdot z^2$$

bezeichnen, und das Moment dieſer Ebene iſt, wenn die Spitze der Pyramide als Anfangspunkt, und die Axe der Schwere als Abſciſſenlinie angenommen wird,

$$= z \times g\alpha \sin\varphi = \frac{G \sin\varphi \cdot \alpha \cdot z^3}{a^2}$$

Beſteht die ganze Pyramide aus n materiellen Ebenen, die alle parallel zur Grundfläche ſind, ſo iſt $a = n\alpha$ und man kann $z = m\alpha$ ſetzen; hierdurch wird der Ausdruck für das Moment der Ebene g

$$= \frac{G \sin\varphi \cdot \alpha \cdot (m\alpha)^3}{(n\alpha)^2} = \frac{G\alpha^2 \sin\varphi}{n^2} \cdot m^3$$

und man erhält hieraus die Momente aller materiellen Ebenen, aus welchen die Pyramide beſteht, wenn nach und nach $m = 1, = 2, = 3 \ldots, = n$ geſetzt wird.

Die Summe S der Momente aller Theile der Pyramide iſt folglich

$$S = \frac{G\alpha^2 \sin\varphi}{n^2} [1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \ldots + n^3]$$

Es iſt aber hier, weil $a = n\alpha$ und α unendlich klein ſein ſoll, der Werth von n unendlich groß, und daher

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \ldots + n^3 = \frac{n^4}{4}$$

folglich iſt auch

$$S = \frac{G\alpha^2 \sin\varphi}{n^2} \cdot \frac{n^4}{4} = \frac{G \sin\varphi (n\alpha)^2}{4}$$

$$\text{und daher } S = \frac{Ga^2 \sin\varphi}{4}$$

Wird nun der Abſtand des Schwerpunktes von der Spitze der Pyramide $= x$ geſetzt, ſo iſt bekanntlich x dem Quotienten gleich, welcher erhalten wird, wenn man die Summe der Momente aller Theile des Körpers durch die Summe aller Theile des Körpers, alſo durch den Inhalt der Pyramide theilt; es iſt alſo, wenn man dieſen Inhalt mit P bezeichnet,

$$x = \frac{S}{P} = \frac{Ga^2 \sin\varphi}{4P}$$

und weil $P = \frac{Ga \sin\varphi}{3}$, so wird

$$x = \frac{Ga^2 \sin\varphi}{4\left(\frac{Ga \sin\varphi}{3}\right)} = \frac{3}{4}a.$$

Dieses giebt die allgemeine Regel: der Schwerpunkt einer Pyramide liegt in der Linie, welche die Spitze mit dem Schwerpunkte der Grundfläche verbindet, in einer Entfernung $= \frac{3}{4}$ dieser Linie von der Spitze der Pyramide. Da übrigens hierbei keine bestimmte Form der Grundfläche vorausgesetzt worden ist, so gilt diese Regel für alle zur Gattung der Pyramiden gehörige Körper und daher auch für den Kegel, es mag die Grundfläche desselben ein Kreis oder irgend eine andere Curve sein.

Zusatz 1. Die Lage des Schwerpunktes in einer dreiseitigen Pyramide läßt sich auf folgende Art bestimmen:

Man kann in der dreiseitigen Pyramide abcm, Fig. 51., abc als Grundfläche annehmen, und es muß daher, wenn man ab in d halbirt, cd zieht und $dp = \frac{1}{3}(cd)$ nimmt, weil alsdann p der Schwerpunkt der Grundfläche ist, der Schwerpunkt der Pyramide in der Linie liegen, welche p mit der Spitze m verbindet. Es kann aber auch abm als Grundfläche und c als Spitze angesehen werden, wird also dm gezogen und $dq = \frac{1}{3}(dm)$ genommen, so ist q der Schwerpunkt der Fläche abm, und der Schwerpunkt der Pyramide liegt daher auch in der Linie, welche q mit der Spitze c verbindet. Es ist demnach in dem Dreiecke mcd, Fig. 51 a., der Punkt x, in welchem sich die Linien mp und cq schneiden, der gesuchte Schwerpunkt. Die Lage dieses Punktes aber ist dadurch bestimmt, daß

$$(dp) = \tfrac{1}{3}(cd) = \tfrac{1}{2}(cp) \text{ und}$$
$$(dq) = \tfrac{1}{3}(md) = \tfrac{1}{2}(mq) \text{ bekannt ist.}$$

Zieht man nun durch d eine Parallele zu qc, welche die verlängerte mp in g schneidet, so ist

$$1)\ mx : xg = mq : qd$$
$$\text{und daher } (mx) = 2(xg)$$
$$2)\ xp : pg = cp : pd$$
$$\text{also } xp = 2(pg) \text{ und daher } xg = \tfrac{2}{3}(xp)$$

Da nun, nach No. 1., $(mx) = 2(xg)$
ſo iſt auch $(mx) = 2 \times \frac{3}{2}(xp) = 3(xp)$
und $mp = mx + xp = 4(xp)$
alſo $(mx) = \frac{3}{4}(mp)$

Es iſt aber, Fig. 51., mp die Axe der Pyramide: in einer dreiſeitigen Pyramide liegt daher der Schwerpunkt in einer Entfernung $= \frac{3}{4}$ der Axe von der Spitze entfernt.

Zuſatz 2. Da jede vielſeitige Pyramide in dreiſeitige zerlegt werden kann, ſo liegen die Schwerpunkte aller dieſer dreiſeitigen Pyramiden in einer derſelben zur Grundfläche parallelen Ebene liegen, deren Entfernung von der Spitze $= \frac{3}{4}$ der Axe beträgt, ſo gilt die obige Regel auch für vielſeitige Pyramiden gel... ...nd daher auch für den Kegel ꝛc.

Aufgabe 3. Es ſoll der Schwerpunkt einer parallel zur Grundfläche abgeſtumpften Pyramide angegeben werden.

Auflöſung. Verbindet man die Schwerpunkte der beiden parallelen Grundflächen durch eine gerade Linie, ſo iſt dieſe eine Axe der Schwere, und geht verlängert durch die Spitze der ergänzten Pyramide. Es ſei dieſe Axe der Schwere $= h$, ihre Verlängerung bis zur Spitze der ganzen Pyramide $= z$, der Inhalt der ganzen Pyramide $= P$, der des oben fehlenden Theils $= p$, und alſo der der abgeſtumpften Pyramide $= P - p$, die untere Grundfläche derſelben $= G$, die obere $= g$, und der Winkel, welchen die Axe h mit der Grundfläche bildet, $= \varphi$, ſo iſt $P = \frac{(h+z)G\sin\varphi}{3}$ und $p = \frac{zg\sin\varphi}{3}$

Ferner ſei eine Seite der Grundfläche $G = A$ und die derſelben homologe Seite in $g = a$, ſo iſt

$$A : a = h + z : z$$

$$\text{und daher } z = \frac{ha}{A - a} \text{ und } h + z = \frac{hA}{A - a}$$

Der Abſtand des Schwerpunktes der ganzen Pyramide P von der Grundfläche G derſelben iſt $= \frac{1}{4}(h + z)$ und der Abſtand des obern Theils p von G iſt $= h + \frac{1}{4}z$; wird alſo der Abſtand des Schwerpunktes der abgeſtumpften Pyramide von $G = x$ geſetzt, ſo erhält man die Gleichung

$$x(P - p) + (h + \tfrac{1}{4}z)\,p = \left(\frac{h + z}{4}\right) \cdot P$$

$$\text{also } x\,(P-p) = \left(\frac{h+z}{4}\right) P - (h + \tfrac{1}{4}z)\, p$$

$$= \frac{h}{4} P - hp + \frac{z}{4}(P-p)$$

$$= \frac{z}{4}(P-p) - \frac{h}{4}(4p-P)$$

$$\text{Es ist aber } \frac{h}{4}(4p-P) = \frac{h}{4}\left(\frac{4zg\sin\varphi}{3} - \frac{(h+z)G\sin\varphi}{3}\right)$$

$$= \frac{h\sin\varphi}{12}\,[4zg - (h+z)G]$$

$$= \frac{h\sin\varphi}{12}\left[\frac{4hag}{A-a} - \frac{hAG}{A-a}\right]$$

$$= \frac{h^2\sin\varphi}{12(A-a)}(4ag - AG)$$

und weil $g = \frac{a^2G}{A^2}$, so wird

$$\frac{h}{4}(4p-P) = \frac{h^2\sin\varphi}{12(A-a)}\left(\frac{4a^2G}{A^2} - AG\right)$$

$$= \frac{h^2G\sin\varphi}{12A^2(A-a)}(4a^2 - A^2).$$

Hiernach ist

$$x\,(P-p) = \frac{z}{4}(P-p) - \frac{h^2G\sin\varphi}{12A^2(A-a)}(4a^2 - A^2)$$

$$\text{und folglich } x = \frac{z}{4} - \frac{h^2G\sin\varphi\,(4a^2 - A^2)}{12A^2(A-a)(P-p)}$$

Weil aber $P - p = \frac{hG}{3}\left(\frac{A^2 + Aa + a^2}{A^2}\right)\sin\varphi$, so wird nun auch

$$x = \frac{z}{4} - \frac{h^2G\sin\varphi\,(4a^2 - A^2)}{12A^2(A-a)\cdot\frac{hG}{3}\left(\frac{A^2+Aa+a^2}{A^2}\right)\sin\varphi}$$

$$= \frac{z}{4} - \frac{h(4a^2 - A^2)}{4(A-a)(A^2 + Aa + a^2)}$$

nämlich es ist, weil $z = \frac{ha}{A-a}$

$$x = \frac{h}{4}\left[\frac{a}{A-a} - \frac{4a^3 - A^3}{(A-a)(A^2 + Aa + a^2)}\right]$$
$$= \frac{h}{4}\left[\frac{a(A^2 + Aa + a^2) - 4a^3 + A^3}{(A-a)(A^2 + Aa + a^2)}\right]$$
$$= \frac{h}{4}\left[\frac{A^3 + A^2a + Aa^2 - 3a^3}{(A-a)(A^2 + Aa + a^2)}\right]$$

und dieses giebt endlich für die Lage des Schwerpunktes der abgestumpften Pyramide

$$x = \frac{h}{4}\left(\frac{A^2 + 2Aa + 3a^2}{A^2 + Aa + a^2}\right)$$

Zusatz. Diese Formel gilt für alle parallel zur Grundfläche abgestumpfte Körper, die zu der Gattung der Pyramiden gehören, und sie hat daher auch für parallel abgestumpfte Kegel Gültigkeit, bei welchen man nur R und r, also die Radien der beiden Grundflächen, für A und a zu setzen braucht.

Aufgabe 4. Der Schwerpunkt einer Halbkugel soll gefunden werden.

Auflösung. An der Linie bd, Fig. 52., sei über dem Theile bc ein Viertelskreis abc, und über cd = cb ein Quadrat acde beschrieben, so wird durch die Figur baed, indem sie sich um bd als Axe dreht, ein Körper erzeugt, der aus einer Halbkugel besteht und aus einem Cylinder, welcher mit der Halbkugel gleiche Grundfläche und den Radius derselben zur Höhe hat. Zieht man aber die Diagonale ce, so beschreibt bei der Erzeugung des Körpers das Dreieck cde einen Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe mit dem Cylinder, und denkt man den Cylinder so ausgehöhlt, daß dieser Kegel fehlt, so hat der übrigbleibende Theil desselben nicht nur mit der Halbkugel gleichen Kubikinhalt, sondern es stehen auch die Schwerpunkte beider Körper gleich weit von c ab. Das erstere ist aus der Stereometrie bekannt, und die Richtigkeit der letztern Behauptung läßt sich auf folgende Art beweisen: Nimmt man $c\alpha' = c\alpha = z$ und zieht durch α und α' parallele Ebenen zu der gemeinschaftlichen Grundfläche beider Körper, so ist, wenn man dieselben als materielle Ebenen von der unendlich kleinen Stärke $= \alpha$ annimmt, das Moment der

$$\text{Kugelebene} = (c\alpha) \times (\alpha\beta)^2\pi \cdot \alpha = z \times [(c\beta)^2 - (c\alpha)^2]\pi \cdot \alpha$$
$$= z(R^2 - z^2)\alpha\pi$$

das Moment der Ebene des ausgehöhlten Cylinders ist

$$= (c\alpha') \times [(\alpha'\beta')^2\pi - (\alpha'\gamma')^2\pi] \cdot \alpha$$
$$= z \times [R^2\pi - (\alpha'c)^2\pi] \cdot \alpha$$
$$= z\,(R^2 - z^2)\,a\pi$$

nd also beide gleich. Da dieses für jede Ebene gilt, roß auch $c\alpha = c\alpha'$ genommen werden mag, so gilt es für die Summe der Momente aller Ebenen. Nun giebt umme der Momente aller materiellen Ebenen der Halb- das Moment der Halbkugel von c an gerechnet, und so giebt die Summe aller Momente des hohlen Cylin- das Moment des hohlen Cylinders. Wird also die Halb- mit G und der hohle Cylinder mit $C - K$ bezeichnet, t x der Schwerpunkt von G und z der von $C - K$, d, für $cx = x$ und $cz = z$,

$$xG = z\,(C - K)$$

un $G = C - K$

so folgt $x = z$

hieraus geht hervor, daß, wenn man den Werth von z kennt, dadurch auch der von $cx = x$ bestimmt s ist aber der Abstand des Schwerpunkts des ganzen ers C von $c = \frac{cd}{2} = \frac{R}{2}$ und der Abstand des Schwer- s des Kegels K von c ist $= \frac{3}{4}(cd) = \frac{3R}{4}$; folglich ist

$$z\,(C - K) + \frac{3R}{4} \cdot K = \frac{R}{2} \cdot C$$

und daher $z\,(C - K) = \frac{R}{4}\,(2C - 3K)$

und weil $C = R^2\pi \times R = R^3\pi$

und $K = R^2\pi \times \frac{R}{3} = \frac{R^3\pi}{3}$, so wird

$$z\left(R^3\pi - \frac{R^3\pi}{3}\right) = \frac{R}{4}\,(2R^3\pi - R^3\pi)$$

oder $\frac{2R^3\pi}{3} \cdot z = \frac{R^4\pi}{4}$

und hieraus folgt $z = \frac{3}{8}R$

also auch $cx = x = \frac{3}{8}R$.

Der Schwerpunkt der Halbkugel liegt also in einer Ent- g $= \frac{3}{8}$ des Radius von der Grundfläche derselben entfernt.

Aufgabe 5. Die Lage des Schwerpunktes eines abſchnitts ſoll angegeben werden.

Auflöſung. Da, nach Aufgabe 4., der Cylinder, welchem ein Kegel hinweggenommen iſt, und von welcher eca, Fig. 52., die Erzeugungsfläche darſtellt, mit den den Quadranten acb erzeugten Halbkugel ſo zuſammen daß di zu den gleichen Abſciſſen $c\alpha = c\alpha'$ gehörigen riellen [illegible] nen r gleiche Momente haben, auch d [illegible] ter nente des Theils des hohl linders, von [illegible] die Erzeugungsfläche bild Summe der [illegible] nte kugelabſchnittes $\alpha\beta b$ gleich man $d\alpha' = b\alpha$ n [illegible] d es wird daher der Abſta Schwerpunktes de [illegible] hnitts von dem Scheitel b ben gefunden, wenn man den Abſtand des Schwer des hohlen Cylinders von d berechnet.

Es ſei der Inhalt des ganzen durch $d\alpha'\beta'e$ er Cylinders $= C$, der Abſtand des Schwerpunkts deſſelb $d = c$, der Inhalt des fehlenden abgeſtumpften Kegel cher durch $d\alpha'\gamma e$ erzeugt wird, $= P$, und der Abſtand Schwerpunktes von $d = p$, der Inhalt des hohlen Cy $= X$, und der Abſtand ſeines Schwerpunktes von ſo iſt ganz allgemein

$$xX + pP = cC$$

$$\text{alſo } xX = cC - pP$$

Da aber $de = R$ der Radius der Halbkugel iſt, ſo wird, man $d\alpha' = h$ und $\alpha'\gamma = r$ ſetzt,

$$c = \frac{d\alpha'}{2} = \frac{h}{2};\quad C = hR^2\pi$$

$$p = \frac{h}{4}\left(\frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}\right) \text{ nach Aufgabe 3, u}$$

$$P = \frac{h(R^2 + Rr + r^2)\pi}{3}$$

Es iſt alſo $cC = \frac{h^2R^2\pi}{2}$ und

$$pP = \frac{h(R^2 + 2Rr + 3r^2)\pi}{12}$$

und hiernach wird $cC - pP =$

$$xX = \frac{h^2\pi}{12}[5R^2 - 2Rr - 3r^2]$$

Es iſt aber $X = C - P = hR^2\pi - \frac{h(R^2 + Rr + r^2)\pi}{3}$

$$= \frac{h\pi}{3}(2R^2 - Rr - r^2)$$

und daher auch

$$x \cdot \frac{h\pi}{3}(2R^2 - Rr - r^2) = \frac{h^2\pi}{12}(5R^2 - 2Rr - 3r^2)$$

und dieſes giebt

$$x = \frac{h}{4}\left(\frac{5R^2 - 2Rr - 3r^2}{2R^2 - Rr - r^2}\right)$$

$$= \frac{h}{4}\left(\frac{5R + 3r}{2R + r}\right)$$

als den Ausdruck für den Abſtand des Schwerpunktes eines Kugelabſchnitts von dem Scheitel deſſelben.

Da übrigens $r = (\alpha'\gamma) = (\alpha' c) = R - h$, ſo iſt auch, wenn man dieſen Werth für r ſetzt,

$$x = \frac{h}{4}\left(\frac{8R - 3h}{3R - h}\right)$$

und man erhält hieraus für $h = R$

$$x = \frac{R}{4} \cdot \frac{5R}{2R} = \tfrac{5}{8}R$$

als den Ausdruck für die Lage des Schwerpunktes der Halbkugel. Für $h = 2R$ wird

$$x = \frac{2R}{4} \cdot \frac{2R}{R} = R$$

es liegt nämlich der Schwerpunkt der ganzen Kugel in dem Mittelpunkte.

Zuſatz. Unmittelbar läßt ſich der Schwerpunkt eines Kugelabſchnitts auf folgende Art beſtimmen:

Für $b\alpha = z$, Fig. 52., iſt $(\alpha\beta)^2 = R^2 - (R - z)^2 = 2Rz - z^2$, und es iſt daher die Fläche des Kreiſes, zu welchem $\alpha\beta$ als Radius gehört, $= (2Rz - z^2)\pi$; für die Stärke einer materiellen Fläche $= \alpha$ iſt der Inhalt derſelben $= (2Rz - z^2)\alpha\pi$ und ihr Moment in Beziehung auf den Punkt b iſt $= z \times (2Rz - z^2)\alpha\pi = (2Rz^2 - z^3)\alpha\pi$. Iſt nun $z = m\alpha$, ſo erhält man aus dieſen beiden Ausdrücken alle materiellen Flächen des Kugelabſchnittes und ihre Momente, wenn nach und nach $m = 1, 2, 3 \ldots$,

…ſt wird. Es iſt aber der Inhalt der materiellen

$$(2Rz - z^2)\,\alpha\pi = 2R\alpha^2 m\pi - \alpha^2 m^2\pi$$

die Summe V aller Flächen oder der Inhalt des …nittes

$$V = \begin{cases} 2R\alpha^2\pi\,(1 + 2 + 3 + 4 \ldots + m) \\ -\alpha^2\pi\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots + m^2) \end{cases}$$

nä… …) es iſt, weil hier m einen unendlich großen Werth …muß,

$$V = \begin{cases} 2R\alpha^2\pi \cdot \\ -\alpha^2\pi \end{cases} \quad R\alpha^2 m^2\pi - \frac{\alpha^2 m^3\pi}{3}$$

$$= Rz^2\pi - \frac{z^3\pi}{3} = \frac{z^2\pi\,(3R - z)}{3}$$

Das Moment der materiellen Fläche iſt =

$$(2Rz^2 - z^3)\,\alpha\pi = 2R\alpha^3 m^2\pi - \alpha^4 m^3\pi$$

alſo die Summe S der Momente aller Flächen

$$S = \begin{cases} 2R\alpha^3\pi\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots + m^2) \\ -\alpha^4\pi\,(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \ldots + m^3) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2R\alpha^3\pi \cdot \frac{m^3}{3} \\ -\alpha^4\pi \cdot \frac{m^4}{4} \end{cases} = \frac{2R\alpha^3 m^3\pi}{3} - \frac{\alpha^4 m^4\pi}{4}$$

$$= \frac{8Rz^3\pi - 3z^4\pi}{12} = \frac{z^3\pi\,(8R - 3z)}{12}$$

Wird aber der Abſtand des Schwerpunktes des Kugelabſchnitts von dem Scheitel deſſelben = x geſetzt, ſo iſt $x = \frac{S}{V}$; es iſt alſo auch

$$x = \frac{\frac{z^3\pi\,(8R - 3z)}{12}}{\frac{z^2\pi\,(3R - z)}{3}} = \frac{z}{4}\left(\frac{8R - 3z}{3R - z}\right)$$

was mit dem oben gefundenen Reſultate übereinſtimmt.

Aufgabe 6. Man kennt den Abſtand der Ecken dreiſeitigen Pyramide von irgend einer Ebene; es ſoll hier

der Abstand des Schwerpunktes derselben von dieser Ebene angegeben werden.

Auflösung. Es sei, Fig. 51., der normale Abstand des Punktes a von der Ebene = a und der des Punktes b von derselben = b, so ist, wenn ab in d halbirt wird und man den Abstand des Punktes d von der Ebene mit d bezeichnet,

$$d = \frac{a + b}{2}, \text{ also } 2d = a + b$$

Wird nun cd gezogen, $dp = \frac{1}{3}(cd)$ genommen und der Abstand des Punktes c von der Ebene = c, der des Punktes p von derselben = p gesetzt, so ist

$$p = d + \frac{c - d}{3} = \frac{2d + c}{3}$$

Da nun $2d = a + b$, so ist $p = \frac{a + b + c}{3}$, also $3p = a + b + c$ der Ausdruck für den Abstand des Schwerpunktes p der Grundfläche der Pyramide von der gegebenen Ebene. Wird nun, Fig. 51ª, m mit p verbunden und $px = \frac{1}{4}(pm)$ genommen, so ist x der Schwerpunkt der Pyramide, und wenn man den Abstand des Punktes m von der angenommenen Ebene = m und den des Punktes x von derselben = x setzt, so ist

$$x = p + \frac{m - p}{4} = \frac{3p + m}{4}$$

Es ist also $x = \frac{a + b + c + m}{4}$

Der Abstand des Schwerpunktes einer dreiseitigen Pyramide von irgend einer Ebene ist also dem vierten Theile der Summe der Abstände der vier Ecken derselben von eben dieser Ebene gleich.

Aufgabe 7. Die Lage des Schwerpunktes in einem abgestumpften dreiseitigen Prisma soll angegeben werden.

Auflösung. Werden in dem abgestumpften Prisma abcABC, Fig. 53., durch A die Linien $A\beta$ und $A\gamma$ parallel zu ab und ac gezogen und man verbindet β mit γ, so wird Körper dadurch in ein vollständiges Prisma abc$A\beta\gamma$ und ine vierseitige Pyramide ABC$\gamma\beta$ zerlegt. Setzt man nun = a, Bb = b, Cc = c, den Abstand der Kanten Bb

und Cc von einander = g und den Abstand der dritten Kan
Aa von der Fläche BbcC = h, so ist, wenn der Inhalt de
Prisma abcA$\beta\gamma$ = R und der der Pyramide ABC$\gamma\beta$ =
gesetzt wird,

$$R = \frac{gha}{2}$$

$$S = \left(\frac{(b-a)+(c-a)}{2}\right) g \cdot \frac{h}{3} = \frac{(b+c-2a)\,gh}{6}$$

und der Inhalt des abgestumpften Prisma ist

$$R + S = \frac{(a+b+c)\,gh}{6}$$

Ist nun der normale Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche BCcb für das Prisma R = r, für die Pyramide S = s und für den ganzen abgestumpften Körper = x, so findet die Gleichung statt

$$(R+S)\,x = Rr + Ss$$

oder weil $r = \frac{1}{2}h$ und $s = \frac{1}{4}h$

$$(R+S)\,x = \frac{hR}{3} + \frac{hS}{4}$$

Es ist also, wenn man für R und S die Werthe setzt,

$$\left(\frac{(a+b+c)\,gh}{6}\right) x = \frac{gh^2a}{6} + \frac{(b+c-2a)\,gh^2}{24}$$

und daher auch

$$4(a+b+c)\,x = 4ha + h(b+c-2a) = h(2a+b+c)$$

und hieraus folgt endlich

$$x = \frac{h}{4}\left(\frac{2a+b+c}{a+b+c}\right)$$

Wird also, um eine symmetrische Bezeichnung einzuführen, der Abstand der Kante Aa von der gegenüberliegenden Fläche, also h mit A bezeichnet, so ist der Abstand des Schwerpunktes von eben dieser Fläche

$$x' = \frac{A}{4}\left(\frac{2a+b+c}{a+b+c}\right)$$

Aus demselben Grunde ist, wenn man den Abstand der Kante Bb von der Fläche AacC mit B bezeichnet und l Abstand des Schwerpunktes von eben dieser Fläche mit x'',

$$x'' = \frac{B}{4}\left(\frac{2b+a+c}{a+b+c}\right)$$

und es ist eben so $x''' = \frac{C}{4}\left(\frac{2c + a + b}{a + b + c}\right)$

Zusatz. Der Abstand des Schwerpunktes des abgestumpften Prisma, Fig. 53., von der Fläche abc läßt sich auf folgende Art bestimmen: Man ziehe $B\gamma$, so wird $ABC\gamma\beta$ in zwei dreiseitige Pyramiden $AB\beta\gamma = P$ und $ABC\gamma = Q$ zerlegt, und es ist, wie man leicht findet,

$$P = \frac{g\,(b - a)}{2} \cdot \frac{h}{3} \text{ und } Q = \frac{g\,(c - a)}{2} \cdot \frac{h}{3}$$

Sind nun die Kanten $Aa = a$, $Bb = b$ und $Cc = c$ gegen die Grundfläche abc unter einem Winkel $= \varphi$ geneigt, so ist der normale Abstand des Punktes A von abc $= a \sin \varphi$ ꝛc., daher ist, nach Aufgabe 5., wenn der Abstand des Schwerpunktes der Pyramide P von abc $= p$ und der Pyramide Q von dieser Fläche $= q$ gesetzt wird,

$$p = \frac{[(aA) + (b\beta) + (c\gamma) + (bB)] \sin \varphi}{4} = \frac{(3a + b) \sin \varphi}{4}$$

$$\text{und } q = \frac{[(aA) + (c\gamma) + (bB) + (cC)] \sin \varphi}{4} = \frac{(2a + b + c) \sin \varphi}{4}$$

Der Abstand ϱ des Schwerpunktes des Prisma $abcA\beta\gamma = R$ von abc aber ist $= \frac{a \sin \varphi}{2}$; wird also der Abstand des Schwerpunktes des ganzen abgestumpften Prisma $= R + P + Q$ von abc mit z bezeichnet, so erhält man die Gleichung

$$(R + P + Q)\, z = R\varrho + Pp + Qq$$

nämlich es ist

$$(R + P + Q)\, z = \frac{gha}{2} \cdot \frac{a \sin \varphi}{2} + \frac{gh\,(b - a)}{6} \cdot \frac{(3a + b) \sin \varphi}{4}$$

$$+ \frac{gh\,(c - a)}{6} \cdot \frac{(2a + b + c) \sin \varphi}{4}$$

Es ist also $\frac{(a + b + c)\, gh}{6} \cdot z =$

$$\frac{gh \sin \varphi}{24} [6a^2 + (b - a)\,(3a + b) + (c - a)\,(2a + b + c)]$$

und daher $(a + b + c)\, z =$

$$\frac{\sin \varphi}{4} (a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)$$

folglich iſt endlich

$$z = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)\sin\varphi}{4(a + b + c)}.$$

§. 34.

Einige Aufgaben zur Uebung.

1. Zieht man von einer Ecke A eines regelmäßigen Vielecks, Fig. 41., einen Durchmeſſer AM und verbindet die Halbirungspunkte zweier, in Beziehung auf dieſen Durchmeſſer gleichliegenden Seiten der Figur, z. B. a mit b, ſo iſt der Punkt x, in welchem die Verbindungslinie den Durchmeſſer ſchneidet, der gemeinſchaftliche Schwerpunkt der beiden halbirten Seiten AB und AE, und eben ſo iſt y der Schwerpunkt der beiden Seiten BC und ED ꝛc. Nennt man nun AB und AE das erſte Paar, BC und ED das zweite Paar Seiten des Vielecks, ſo läßt ſich eine allgemeine Formel für den Abſtand z des Schwerpunktes des mten Paares dieſer Seiten von A angeben, wenn man weiß, daß das Vieleck n Seiten hat und den Durchmeſſer des dazu gehörigen Kreiſes AM = 2R kennt. Welches iſt dieſe Formel für n = 2p, und welche Form erhält dieſelbe für n = 2p + 1 ?

2. Iſt die Lage aller Ecken einer Figur durch eine Abſciſſenlinie beſtimmt, alſo z. B., Fig. 46., die Lage des Punktes a durch $ma' = a'$ und $a'a = a''$, eben ſo die von b durch b′ und b″, die von c durch c′ und c″ ꝛc., und man ſetzt die Coordinaten für die Lage des gemeinſchaftlichen Schwerpunktes der Fläche der ganzen Figur x′ und x″, ſo ſind dieſe durch die Gleichungen beſtimmt

$$x' = \frac{(a'+e'+d')\cdot\Delta ade + (a'+b'+d')\cdot\Delta abd + (b'+c'+d')\cdot\Delta bcd\ldots}{3 \times abcde\ldots}$$

und

$$x'' = \frac{(a''+e''+d'')\cdot\Delta ade + (a''+b''+d'')\cdot\Delta abd + (b''+c''+d'')\cdot\Delta bcd\ldots}{3 \times abcde\ldots}$$

3. Wie läßt ſich der Abſtand des Schwerpunktes des Umfangs eines Dreiecks von irgend einer beliebig in der Ebene des Dreiecks angenommenen Abſciſſenlinie angeben, wenn man die Lage der drei Ecken des Dreiecks abc durch die Coordinaten a′, a″, b′, b″, c′ und c″ ausgedrückt kennt?

4. Es soll angegeben werden, wieviel der Abstand des Schwerpunktes der Fläche eines Dreiecks von dem des Umfangs desselben beträgt.

5. Aus einem Prisma ist concentrisch eine Pyramide hinweggenommen, so daß beide eine gemeinschaftliche Axe der Schwere haben und die Grundfläche der Pyramide der des Prisma concentrisch ist; welches ist die Formel für den Schwerpunkt des ausgehöhlten Körpers?

6. Welches ist der Schwerpunkt einer ausgehöhlten Pyramide, wenn concentrisch aus derselben ein Prisma hinweggenommen ist, so daß die Grundfläche des Prisma der der Pyramide ähnlich ist?

7. Aus einer abgestumpften Pyramide ist concentrisch ein Prisma hinweggenommen, dessen Grundfläche den beiden des abgestumpften Körpers ähnlich ist; wie liegt der Schwerpunkt des auf diese Weise ausgehöhlten Körpers?

8. Durch welche Formel wird der Schwerpunkt einer Kugelzone bestimmt?

9. Es ist agb, Fig. 54., ein Durchschnitt einer Halbkugel normal auf der Grundfläche derselben, c ist der Mittelpunkt und ca = cg = cb = R der Radius; ferner ist dpqe der normale Durchschnitt eines concentrischen Cylinders, dessen Axe cm = h mit der Axe cg der Halbkugel zusammenfällt, und der Radius der Grundfläche desselben ist cd = ce = r. Es soll der Abstand des Schwerpunktes = x von c für den Körper angegeben werden, welcher übrig bleibt, wenn aus der Halbkugel G der Cylinder C hinweggenommen wird.

Die Gleichung ist hier

$$(G - C)\,x = G \cdot \frac{3R}{8} - C \cdot \frac{h}{2}$$

$$\text{oder } \left(\frac{2R^3\pi}{3} - r^2h\pi\right)x = \frac{R^4\pi}{4} - \frac{r^2h^2\pi}{2}$$

$$\text{und } (8R^3 - 12r^2h)\,x = 3R^4 - 6r^2h^2$$

$$\text{folglich ist } x = \frac{3\,(R^4 - 2r^2h^2)}{4\,(2R^3 - 3r^2h)}$$

Welches ist nun aber die Formel für den Fall, wenn der Cylinder durch die Halbkugel hindurchgeht und also außer

dem Cylinder, von welchem dekh der Durchſchnitt iſt, noch der Kugelabſchnitt hgkn an der Halbkugel fehlt?

10. Eine jede ſchief abgeſtumpfte dreiſeitige Pyramide läßt ſich in eine parallel zur Grundfläche abgeſtumpfte und in zwei vollſtändige dreiſeitige Pyramiden zerlegen, wie aus §. 67. u. ff. des erſten Bandes der Uebungen aus der angewandten Mathematik ſich ergiebt, und es iſt alſo der Abſtand des Schwerpunktes eines jeden dieſer Theile von der Grundfläche der Pyramide, ſo wie auch der Kubikinhalt dieſer Theile beſtimmt. Es ſoll nun hieraus eine Formel für die Lage des Schwerpunktes einer jeden ſchief abgeſtumpften dreiſeitigen Pyramide abgeleitet werden.

11. Die Lage des Schwerpunktes von einem abgeſtumpften Parallelepipedon ſoll angegeben werden.

12. Ein abgeſtumpfter Kegel endet oben in einem Kugelabſchnitt ſo, daß die Seite des abgeſtumpften Kegels verlängert den Bogen des Abſchnittes berührt; es ſoll der Schwerpunkt dieſes Körpers beſtimmt werden.

Anmerkung. Mehrere hierher gehörige Aufgaben findet man noch in dem vierten Kapitel des Handbuchs der Statik feſter Körper von Eytelwein.

§. 35.

Analytiſche Formeln zur Beſtimmung des Schwerpunktes.

Die Lage des Schwerpunktes irgend eines Syſtems von ſchweren Punkten läßt ſich in allen Fällen durch drei rechtwinklige Coordinaten beſtimmen, und jede dieſer Ordinaten wird erhalten, wenn man, in Beziehung auf eben dieſe Ordinatenaxe, die Summe der Momente aller Theile durch die Summe der Theile theilt. Der Gebrauch dieſer Regel wird beſonders dadurch einfach, daß ſie immer nur bei homogenen Körpern angewendet wird, alſo bei ſolchen, die als durchgehends von gleicher Dichtigkeit angeſehen werden, bei denen daher immer das Gewicht dem Kubikinhalte proportionirt iſt, und wo alſo auch der Inhalt ſtatt der Schwere in Rechnung gebracht werden kann.

Iſt m, Fig. 55., der Anfangspunkt dreier rechtwinkligen Coordinatenaxen mx, my, mz, wo z normal über m liegend

gedacht werden muß, so daß also zm auf der Ebene des rechten Winkels xmy normal ist, so sind hierdurch drei normal sich schneidende Ebenen zmy, zmx und xmy ihrer Lage nach bestimmt. Irgend einem Körper V komme nun die Eigenschaft zu, daß, wenn man für eine Abscisse mx = x eine Ebene durch x parallel zu zmy legt, diese denselben in einer Fläche = X schneidet: so kann der Inhalt dieser Fläche, in so fern sie als materiell angesehen wird, durch Xdx ausgedrückt werden, und das Moment derselben in Beziehung auf die Axe mx ist = xXdx; folglich erhält man die Summe aller Momente des Körpers durch den Ausdruck ∫xXdx, und die Summe aller Theile desselben ist = ∫Xdx = V. Soll nun mx′ = x′ die Abscisse für den Schwerpunkt dieses Körpers sein, so ist

$$x' = \frac{\int xXdx}{\int Xdx} = \frac{\int xXdx}{V}$$

wo jedoch V immer nur den Theil des Körpers bedeutet, welcher zu x gehört, der also seiner Größe nach durch x und X bestimmt ist.

Wird ferner der Körper V für die Abscisse my = y, wenn man durch y eine Ebene parallel zu zmx legt, in einer Fläche = Y geschnitten, so ist der Inhalt dieser materiellen Fläche = Ydy und ihr Moment = yYdy. Die Summe aller Momente für die Axe my ist daher = ∫yYdy, und die Summe aller Theile des Körpers = ∫Ydy = V. Ist sonach my′ = y′ die Abscisse für den Schwerpunkt des Körpers auf der Axe my, so muß sein

$$y' = \frac{\int yYdy}{\int Ydy} = \frac{\int yYdy}{V}$$

Wird der Körper endlich für mz = z, wenn man durch z eine Ebene parallel zu xmy legt, in einer Fläche = Z geschnitten, und ist auf der Axe mz die Lage des Schwerpunktes durch die Abscisse mz′ = z′ bestimmt, so muß sein

$$z' = \frac{\int zZdz}{\int Zdz} = \frac{\int zZdz}{V}$$

und diese drei Gleichungen für x′, y′, z′ sind hinreichend, um in allen Fällen die Lage des Schwerpunktes eines Körpers kennen zu lernen, wenn X, Y, Z als Functionen von x, y, z bekannt sind.

In dem Ausdrucke $x' = \frac{\int xXdx}{\int Xdx}$ iſt $\int Xdx = V$ der Theil des Körpers, welcher zu der Abſciſſe x gehört, und es iſt daher auch $Xdx = dV$, folglich kann man auch ſetzen

$$x' = \frac{\int xdV}{V}$$

eben ſo iſt auch

$$y' = \frac{\int ydV}{V} \text{ und } z' = \frac{\int zdV}{V}$$

und man braucht nur in dieſen Gleichungen, je nachdem x' y' oder z' beſtimmt werden ſoll, den entſprechenden Werth von V, wie er zu den Abſciſſen x, y oder z gehört, zu ſetzen.

Um den Gebrauch dieſer Formeln durch ein Beiſpiel zu erläutern, nehme man an, es ſei der Körper ein normales dreiſeitiges Prisma abmc, Fig. 56., ſo kann man mb, mc und die Linie md, welche normal auf der Ebene bmc iſt, als die drei Coordinatenaxen annehmen; iſt nun für mx = x, my = y und mz = xn = z der Werth von y ganz unabhängig von x und z, ſo hängen dieſe beiden letztern ſo von einander ab, daß man $z = \frac{m}{n}x$ ſetzen kann. Nun iſt der zu mx=x gehörige Theil des Körpers mxn=Δmxn×mc $= \frac{xz}{2} \cdot l$ für mc = l, und es muß daher in der Gleichung

$$x' = \frac{\int xdV}{V}$$

geſetzt werden $V = \frac{lx}{2} \cdot z = \frac{lx}{2} \cdot \frac{m}{n}x = \frac{lm}{2n}x^2$, es iſt alſo $dV = \frac{lm}{n} \cdot xdx$, und daher

$$x' = \frac{\int \frac{lm}{n} x^2 dx}{\frac{lm}{2n} \cdot x^2} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{3}x$$

Der zu my = y gehörige Theil des Körpers iſt = Δmba×mb $= \frac{gh}{2} \cdot y$, wenn die Grundlinie mb des Dreiecks mba =

und die Höhe desselben = h gesetzt wird, also wird in der Gleichung

$$y' = \frac{\int y dV}{V}$$

$V = \frac{gh}{2} \cdot y$, daher $dV = \frac{gh}{2} \cdot dy$, und folglich

$$y' = \frac{\int \frac{gh}{2} \cdot y dy}{\frac{gh}{2} \cdot y} = \frac{\frac{1}{2}y^2}{y} = \frac{1}{2}y$$

Endlich ist der zu mz = z gehörige Theil des Körpers

$$= mbpn \times mc = \frac{[g + (g-x)]z}{2} \cdot l = glz - \frac{xlz}{2} = glz - \frac{nlz^2}{2m}$$

und es wird daher in der Gleichung

$$z' = \frac{\int z dV}{V}$$

$$V = glz - \frac{nl}{2m} \cdot z^2, \text{ also } dV = gldz - \frac{nl}{m} zdz$$

$$\text{folglich ist } z' = \frac{\int [glzdz - \frac{nl}{m} z^2 dz]}{glz - \frac{xlz}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}glz^2 - \frac{nl}{m} \cdot \frac{z^3}{3}}{glz - \frac{1}{2}xlz} = \frac{\frac{1}{2}gz - \frac{nz^2}{3m}}{g - \frac{1}{2}x} = \frac{\frac{1}{2}gz - \frac{xz}{3}}{g - \frac{1}{2}x}$$

und für x = g wird hieraus

$$z' = \frac{\frac{1}{2}gz - \frac{1}{3}gz}{\frac{1}{2}g} = \frac{1}{3}z$$

Der Schwerpunkt des dreiseitigen Prisma abmc hat also eine Lage, welche durch die Werthe bestimmt ist

$x' = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}g$; $y' = \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}l$ und $z' = \frac{\frac{1}{2}gz - \frac{1}{3}xz}{g - \frac{1}{2}x} = \frac{1}{3}h$.

Die oben für die Lage des Schwerpunktes gefundenen allgemeinen Formeln lassen sich für besondere Fälle noch näher bestimmen und werden dadurch für den Gebrauch einfacher. Insbesondere verdienen hier folgende Fälle angeführt werden:

1. Soll der Schwerpunkt eines Bogens einer materiel-

len Curve gefunden werden, ſo iſt, wenn die Länge derſelbe = S geſetzt wird, da hier das Gewicht der Länge proportio nirt iſt, V = S, alſo

$$x' = \frac{\int x dS}{S};\ y' = \frac{\int y dS}{S} \text{ und } z' = \frac{\int z dS}{S}.$$

Iſt nun die Curve doppelt gekrümmt, ſo wird, wie auf §. 145. No. 2. der ſtereometriſchen Uebungen ſich ergiebt,

$$dS = V[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]$$

Für eine Curve in der Ebene aber iſt z = 0 und

$$dS = V[(dx)^2 + (dy)^2]$$

und die Lage des Schwerpunktes hängt bloß von x' und y' ab.

2. Um den Schwerpunkt einer ebenen Fläche mba, Fig. 56., zu beſtimmen, welche von den Coordinaten ma, ab und dem Bogen mzb eingeſchloſſen wird, muß, wenn man dieſe Fläche mit F bezeichnet, V = F und alſo dV = dF geſetzt werden, und es iſt daher

$$x' = \frac{\int x dF}{F};\ y' = \frac{\int y dF}{F} \text{ und } z' = 0$$

Es iſt aber für mx = x und xu = my = y in Beziehung auf die Axe mx der Werth von F = mxu, alſo dF = (xu)·dx = ydx, folglich wird F = ∫ydx, und daher

$$x' = \frac{\int xy dx}{\int y dx}$$

In Beziehung auf die Axe my aber iſt für ma = a der Werth von F = mavum, alſo dF = (uv) dy = (a − x)dy, alſo F = ∫(a − x)dy, und daher

$$y' = \frac{\int y(a - x) dy}{\int (a - x) dy}$$

Die Lage des Schwerpunktes iſt alſo beſtimmt, ſobald die Gleichung für die Curve, alſo die Abhängigkeit der Coordinaten x und y von einander gegeben iſt.

Zuſatz 1. Der hier für y' gegebene Werth weicht von dem ab, der gewöhnlich für dieſe Größe gegeben wird, was daher kommt, daß hier einmal dF parallel zu y liegend, um x' zu beſtimmen, und einmal parallel zu x liegend, um y' zu erhalten, angenommen wird. Will man für beide Fälle dF als parallel zu y liegend, alſo dF = (xu)dx = ydx anne-

men, so ist zwar das Moment von dF in Beziehung auf die Axe mx = x noch immer = xdF, also die Summe aller Momente

$$= \int x dF = \int xydx, \text{ und daher } x' = \frac{\int xydx}{\int ydx}$$

aber in Beziehung auf die Axe my = y ist, weil der Schwerpunkt von (xu) in der Mitte dieser Linie liegt, das Moment $= \frac{y}{2} \cdot dF = \frac{y}{2} \cdot ydx = \frac{y^2 dx}{2}$ und die Summe aller Momente wird $= \frac{\int y^2 dx}{2}$, weßwegen bei der Benutzung dieses Ausdruckes sein muß

$$y' = \frac{\int y^2 dx}{2F} = \frac{\int y^2 dx}{2\int ydx}$$

Zusatz 2. Nimmt man bei der Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche mabu, Fig. 55., den Punkt a als den Anfangspunkt der Abscissen, so ist, für ax = x und xu = y, das Moment in Beziehung auf die Axe am =

$$x(xu)dx = xydx$$

also die Summe der Momente = $\int xydx$, und in Beziehung auf die Axe ab ist das Moment = y(vu)dy = $\int xdy$, also die Summe der Momente = $\int xydy$. Daher ist in diesem Falle

$$x' = \frac{\int xydx}{\int ydx} \text{ und } y' = \frac{\int xydy}{\int xdy}$$

3. Kann man für eine Curve, eine Fläche oder einen Körper die Lage einer Axe der Schwere angeben, so ist, wenn man diese als die Axe für x annimmt, durch die Bestimmung des Werthes von x' die Lage des Schwerpunktes vollkommen bestimmt, und es ist alsdann y' = 0 und auch z' = 0.

4. Bei der Ableitung des allgemeinen Werthes für x' ist vorausgesetzt worden, daß die Fläche X von der Axe x normal geschnitten wird; will man daher eine Axe der Schwere als Abscissenlinie annehmen, und ist diese gegen die Fläche X unter einem Winkel = φ geneigt, so muß hierauf zwar bei der Ableitung des Werthes von x' Rücksicht genommen werden: auf das Resultat aber, also auf die Formel selbst hat

dieses keinen Einfluß, denn es ist in diesem Falle die materielle Fläche $X = Xdx \cdot \sin\varphi$ und das Moment derselben ist $= xXdx \cdot \sin\varphi$, daher wird

$$x' = \frac{\int xXdx \cdot \sin\varphi}{\int Xdx \cdot \sin\varphi} = \frac{\int xXdx}{\int Xdx}$$

§. 36.

Den Schwerpunkt der Körper betreffende Aufgaben und Uebungen.

Aufgabe I. Die Gleichung für die Curve mub, Fig. 55., ist gegeben durch die bekannte Abhängigkeit der Coordinaten $mx = x$ und $xu = y$ von einander; es soll der Schwerpunkt des Körpers bestimmt werden, welcher entsteht, wenn die Fläche mxu um mx als um eine Axe gedreht wird.

Auflösung. Hier ist die Fläche X ein Kreis, der $xu = y$ zum Radius hat, es ist also $X = y^2\pi$ und daher

$$(mx') = x' = \frac{\int xXdx}{\int Xdx} = \frac{\int xy^2dx}{\int y^2dx}$$

wodurch die Lage des Schwerpunktes vollkommen bestimmt ist, weil bei dem durch Axendrehung erzeugten Körper die Axe mx zugleich eine Axe der Schwere sein muß.

Beispiele.

1. Es ist aub ein Kreisquadrant, also der Körper eine Halbkugel. Wird der Radius derselben $= R$ gesetzt, so ist $y^2 = x(2R - x)$ und daher wird

$$x' = \frac{\int x^2(2R - x)\,dx}{\int x(2R - x)\,dx} = \frac{2R\int x^2dx - \int x^3dx}{2R\int xdx - \int x^2dx}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}Rx^3 - \frac{1}{4}x^4}{Rx^2 - \frac{1}{3}x^3} = \frac{8Rx - 3x^2}{12R - 4x}$$

eine Formel für die Lage des Schwerpunktes eines jeden Kugelabschnitts, und man erhält hieraus für $x = R$, den Abstand des Schwerpunktes der Halbkugel vom Scheitel $x' = \frac{5}{8}R$.

2. Es ist aub ein paraboliſcher Bogen, m der Scheitel und der Parameter desſelben $= p$, also die Gleichung $y^2 = px$, folglich wird

$$x' = \frac{\int x \cdot pxdx}{\int pxdx} = \frac{\frac{1}{3}px^3}{\frac{1}{2}px^2} = \frac{2}{3}x.$$

3. Es soll der Schwerpunkt des Konoids angegeben

werden, welches entsteht, wenn der parabolische Bogen mu, Fig. 55., sich um die Tangente my als um eine Axe dreht.

Hier liegt der Schwerpunkt in der Ordinatenaxe my und es ist die Lage desselben durch die Gleichung bestimmt

$$y' = \frac{\int yY dy}{\int Y dy}$$

Nun ist $Y = (yu)^2\pi = x^2\pi$, und weil $y^2 = px$, so wird $x^2\pi = \frac{y^4}{p^2}\cdot\pi$, folglich ist

$$y' = \frac{\int \frac{y^5\pi}{p^2} dy}{\int \frac{y^4\pi}{p^2} dy} = \frac{\int y^5 dy}{\int y^4 dy} = \frac{\frac{1}{6}y^6}{\frac{1}{5}y^5} = \frac{5}{6}y.$$

4. Ist mu ein Kreisbogen, my eine Tangente desselben, und soll der Schwerpunkt des Konoids gefunden werden, welches entsteht, wenn der Bogen mu sich um seine Tangente dreht, so ist für den Radius $= R$, $mx = x$ und $my = y$, die Gleichung $y^2 = 2Rx - x^2$ und die Fläche $Y = x^2\pi$. Aus der Gleichung aber folgt $x = R - \sqrt{(R^2 - y^2)}$, und es ist daher, weil der Schwerpunkt in der Axe my liegen muß,

$$y' = \frac{\int yY dy}{\int Y dy} = \frac{\int y[R - \sqrt{(R^2 - y^2)}]^2 dy}{\int [R - \sqrt{(R^2 - y^2)}]^2 dy} = \frac{Z}{N}$$

hiernach ist $Z = \int [2R^2y - y^3 - 2Ry\sqrt{(R^2 - y^2)}]\,dy$

$$= R^2y^2 - \tfrac{1}{4}y^4 + \frac{2R\sqrt{(R^2 - y^2)^3}}{3} + \text{Const}$$

der Ausdruck für die Summe der Momente, welche $= 0$ sein muß, für $y = 0$, und es ist daher $\text{Const} = -\frac{2}{3}R^4$.

Ferner ist $N = \int [2R^2 - y^2 - 2R\sqrt{(R^2 - y^2)}]^2 dy$

$$= 2R^2y - \tfrac{1}{3}y^3 - 2R\int dy\sqrt{(R^2 - y^2)}$$

$$= 2R^2y - \tfrac{1}{3}y^3 - 2R\left[\frac{y\sqrt{(R^2 - y^2)}}{2} + \frac{R^2}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{(R^2 - y^2)}}\right]$$

$$= 2R^2y - \tfrac{1}{3}y^3 - Ry\sqrt{(R^2 - y^2)} - R^2 \text{Arc sin}\frac{y}{R} + C$$

der Ausdruck für den Kubikinhalt des Konoids, der ebenfalls $= 0$ werden muß, wenn man $y = 0$ setzt, und es ist daher $= 0$.

Hiernach ist $y' = \frac{Z}{N} =$

$$\frac{y^2(R^2 - \frac{1}{4}y^2) - \frac{2}{3}R[R^3 - (R^2 - y^2)\sqrt{(R^2 - y^2)}]}{y(2R^2 - \frac{1}{2}y^2) - R\left[y\sqrt{(R^2 - y^2)} + R^2 \operatorname{Arc\,sin} \frac{y}{R}\right]}$$

für $y = R$ erhält man hieraus

$$y' = \frac{\frac{1}{12}R^4}{R^3(\frac{5}{8} - \frac{1}{2}\pi)} = \frac{R}{20 - 6\pi} = \frac{R}{1{,}15} = \frac{20}{23}R.$$

5. Der Bogen mub ist ein elyptischer Quadrant; es soll der Schwerpunkt des Konoids bestimmt werden, welches entsteht, wenn derselbe sich um die halbe große Axe dreht.

Für ma = a, ab = b, mx = x und xu = y ist die Gleichung für die Elypse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

und es ist daher $\int xy^2dx = \frac{b^2}{a^2}\int(2ax^2 - x^3)dx = \frac{b^2}{a^2}(\frac{2}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4)$

und $\int y^2dx = \frac{b^2}{a^2}\int(2ax - x^2)\,dx = \frac{b^2}{a^2}(ax^2 - \frac{1}{3}x^3)$

$$\text{folglich ist } x' = \frac{\frac{2}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4}{ax^2 - \frac{1}{3}x^3} = \frac{8ax - 3x^2}{12a - 4x}$$

eine Formel, welche von der für einen Kugelabschnitt nicht verschieden ist.

Aufgabe II. Die Curve mub, Fig. 55., dreht sich um die Axe ma so, daß die Ordinate xu einen Winkel von m° beschreibt; es soll die Lage des Schwerpunktes des hierdurch erzeugten Konoidenausschnitts berechnet werden.

Auflösung. Ist xzt, Fig 55a, die zu der Axe mx gehörige Grundfläche des Ausschnitts, so giebt dieselbe den Werth von X in der Formel $x' = \frac{\int xXdx}{\int Xdx}$

$$\text{Es ist aber } zxt = \frac{m}{360}(xz)^2\pi = \frac{m}{360}\cdot y^2\pi$$

$$\text{also wird } x' = \frac{\int xy^2dx}{\int y^2dx}$$

wie bei der vorigen Aufgabe. Da aber hier ma keine Axe der Schwere ist, so wird durch x' die Lage des Schwerpunktes nur in so fern bestimmt, daß man weiß: es muß derselbe

in der Ebene zxt liegen, und es würde daher nöthig sein, auch noch die Werthe von y′ und z′ zu ermitteln, wenn nicht nachgewiesen werden könnte, daß der Schwerpunkt in der Linie xu liegen muß, welche den Ausschnitt zxt halbirt. Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich daraus, daß die durch mxu gelegte Ebene den Konoidenausschnitt in zwei gleiche Theile theilt, und daher eine Ebene der Schwere ist, in welcher der Schwerpunkt des Körpers liegen muß: da nun derselbe auch in dem Kreisausschnitte xzt liegen soll, so liegt er nothwendigerweise in der Linie xu.

Wird zxt als eine materielle Fläche angesehen, und soll v′ der Schwerpunkt derselben sein, so ist, nach §. 32. Aufgabe 5.,

$$xv' = v' = \frac{2CR}{3A}$$

und es ist hier C die Sehne des Bogens zt = 2R sin ½m, R = y und die Länge des Bogens zt = A = $\frac{m}{360} \cdot 2R\pi$, folglich ist

$$v' = \frac{4y^2 \sin \frac{1}{2}m}{3 \cdot \frac{m}{360} \cdot 2y\pi} = \frac{2y \sin \frac{1}{2}m}{3 \cdot \frac{m}{360} \cdot \pi}$$

Der Inhalt der materiellen Fläche zxt ist = Z = $\frac{m}{360} \cdot y^2\pi \cdot dx$ und daher das Moment derselben

$$v'Z = \frac{2y \sin \frac{1}{2}m}{3 \cdot \frac{m}{360} \cdot \pi} \cdot \frac{m}{360} \cdot y^2\pi \cdot dx = \frac{2}{3}y^3 \sin \tfrac{1}{2}m \cdot dx$$

Die Summe aller Momente der materiellen Flächen, aus welchen der Konoidenausschnitt besteht, ist also = $\frac{2}{3} \sin \frac{1}{2}m \int y^3 dx$ und diese durch den Inhalt des ganzen Körpers = $\frac{m}{360} \cdot \pi \int y^2 dx$ getheilt, giebt den Abstand des Schwerpunktes des Ausschnitts von der Axe ma; es ist also, wenn man diesen Abstand = z′ setzt,

$$z' = \frac{2 \sin \frac{1}{2}m \int y^3 dx}{3 \cdot \frac{m}{360} \cdot \pi \int y^2 dx}$$

durch x′ und z′ ist nun die Lage des Schwerpunktes vollkommen bestimmt. Uebrigens ist bei dem Gebrauche dieser Formeln zu berücksichtigen, daß m die Größe des Bogens zt in Graden ausgedrückt angiebt; setzt man also für den Radius

= 1 die Länge eines Bogens von $m^0 = \alpha$, so ist $\frac{m}{360} = \frac{\alpha}{2}$ und es ist daher auch

$$z' = \frac{4 \sin \frac{1}{2}\alpha \int y^3 dx}{3\alpha \int y^2 dx}$$

Beispiele.

1. Es soll die Lage des Schwerpunktes von einem Kegelausschnitte bestimmt werden.

Wird die Axe des Kegels = h, und der Radius der Grundfläche = R gesetzt, so ist für einen Theil der Axe = x und den dazu gehörigen Radius = y

$$h : R = x : y, \text{ also } y = \frac{R}{h} x$$

$$\text{und daher ist } x' = \frac{\int xy^2 dx}{\int y^2 dx} = \frac{\int x^3 dx}{\int x^2 dx} = \frac{3}{4} x$$

Der Abstand des Schwerpunktes von der Spitze des Kegels ist also = $\frac{3}{4}$ der Axe, was für den Ausschnitt des Kegels eben so wie für den ganzen Kegel gilt.

Ferner ist

$$z' = \frac{4 \sin \frac{1}{2}\alpha}{3\alpha} \cdot \frac{\int y^3 dx}{\int y^2 dx} = \frac{4 \sin \frac{1}{2}\alpha}{3\alpha} \cdot \frac{h}{R} \cdot \frac{\int x^3 dx}{\int x^2 dx}$$

$$= \frac{4 \sin \frac{1}{2}\alpha}{3\alpha} \cdot \frac{d}{R} \cdot \frac{3x}{4} = \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\alpha} \cdot y$$

und dieses ist die Formel für den Abstand des Schwerpunktes von der Axe des Kegels.

Für $m = 180^0$ wird $\alpha = \pi$ und $\sin \frac{1}{2}\alpha = 1$, also ist in diesem Falle $z' = \frac{1}{\pi} \cdot y$

2. Die Lage des Schwerpunktes von dem Ausschnitte einer Halbkugel soll bestimmt werden.

Die Gleichung für den Kreis ist $y^2 = 2Rx - x^2$, und man findet hieraus wie bei dem Kugelabschnitte

$$x' = \frac{\int xy^2 dx}{\int y^2 dx} = \frac{8Rx - 3x^2}{12R - 4x}$$

der Abstand von der Axe aber ist

$$z' = \frac{4 \sin \frac{1}{2}\alpha}{3\alpha} \cdot \frac{\int y^3 dx}{\int y^2 dx} = \frac{4 \sin \frac{1}{2}\alpha}{3\alpha} \cdot \frac{\int (2Rx - x^2)^{\frac{3}{2}} dx}{Rx^2 - \frac{1}{3}x^3}$$

Es ist aber $\int(2Rx - x^2)^{\frac{3}{2}}dx =$

$$-\left(y^2 + \frac{3R^2}{2}\right)\cdot\frac{-2x+2R}{8}\cdot y + \frac{48R^4}{128}\int\frac{dx}{\sqrt{(2Rx-x^2)}}$$

$$= \frac{-(3R^2+2y^2)(R-x)y}{8} + \frac{3R^4}{8}\text{Arc sin vers}\frac{x}{R}$$

folglich ist

$$z' = \frac{4\sin\frac{1}{2}\alpha}{3\alpha}\left[\frac{-(3R^2+2y^2)(R-x)y+3R^4\,\text{Arc sin vers}\frac{x}{R}}{8(Rx^2-\frac{1}{3}x^3)}\right]$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{2\alpha}\left[\frac{-(3R^2+2y^2)(R-x)y+3R^4\,\text{Arc sin vers}\frac{x}{R}}{x^2(3R-x)}\right]$$

wodurch die Lage des Schwerpunktes eines Ausschnitts von einem Kugelabschnitte bestimmt ist. Für $x = R$ erhält man hieraus die Lage des Schwerpunktes von einem Ausschnitte der Halbkugel, nämlich es ist

$$x' = \tfrac{5}{8}R \text{ und } z' = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{2\alpha}\cdot\frac{3R^4\frac{1}{2}\pi}{2R^3} = \frac{3\sin\frac{1}{2}\alpha}{8\alpha}\cdot R\pi$$

und für $m = 180^0$ wird $\alpha = \pi$ und $\sin\frac{1}{2}\alpha = 1$, also ist alsdann $z' = \frac{3}{8}R$, für die Lage des Schwerpunktes eines Kugelquadranten.

3. Soll die Lage des Schwerpunktes von dem Ausschnitte eines Paraboloids bestimmt werden, so ist die Gleichung $y^2 = px$ und daher

$$x' = \frac{\int xy^2dx}{\int y^2dx} = \frac{\int x^2dx}{\int xdx} = \tfrac{2}{3}x$$

$$\text{und } z' = \frac{4\sin\frac{1}{2}\alpha}{3\alpha}\cdot\frac{\int y^3dx}{\int y^2dx} = \frac{4\sin\frac{1}{2}\alpha}{3\alpha}\cdot\frac{p^{\frac{3}{2}}\int x^{\frac{3}{2}}dx}{p\int xdx}$$

$$= \frac{4\sin\frac{1}{2}\alpha}{3\alpha}\cdot\frac{\frac{2}{5}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{4\sin\frac{1}{2}\alpha}{3\alpha}\cdot\tfrac{4}{5}\sqrt{px}$$

nämlich es ist $z' = \frac{16\sin\frac{1}{2}\alpha}{15\alpha}\cdot y$

Für $m = 180^0$ wird $z' = \frac{16}{15\pi}\cdot y$

§. 37.

Uebungen zur Berechnung der Lage des Schwerpunktes materieller Flächen.

Nach §. 35. No. 2. ist, wenn, Fig. 55., $mx = x$ und

my = xu = y geſetzt wird, für ma = a, die Lage des Schwerpunktes der Fläche mab durch die Gleichungen beſtimmt

$$x' = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx} \text{ und } y' = \frac{\int (ay - xy)\,dy}{\int (a - x)\,dy}$$

und man kann, nach §. 35. Zuſatz 1., zur Beſtimmung des Werthes von y' auch die Gleichung benutzen

$$y' = \frac{\int y^2 dx}{2\int y\,dx}$$

Wie es nun möglich iſt, mit Hülfe dieſer Gleichungen die Schwerpunkte verſchiedener, von Curven begränzter Flächen zu beſtimmen, ergiebt ſich aus folgenden Beiſpielen:

1. Es iſt mub, Fig. 55., ein paraboliſcher Bogen, m der Scheitel und ma die Axe der Curve; man ſoll die Lage des Schwerpunktes der Fläche muba beſtimmen.

Die Gleichung für die Parabel iſt $y^2 = px$ und daher wird

$$x' = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx} = \frac{\int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx}{\int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx} = \frac{\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5}x$$

und $$y' = \frac{\int (ay - xy)\,dy}{\int (a - x)\,dy} = \frac{\int ay\,dy - \int y^3 p^{-1} dy}{\int a\,dy - \int p^{-1} y^2 dy}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}ay^2 - \frac{1}{4}p^{-1}y^4}{ay - \frac{1}{3}p^{-1}y^3} = \frac{6apy - 3y^3}{12ap - 4y^2}$$

für x = a wird $y^2 = ap$ und daher

$$y' = \frac{6apy - 3apy}{12ap - 4ap} = \frac{3}{8}y$$

2. In der paraboliſchen Fläche mab, Fig. 55., iſt ma = a, ab = b, mx = α und xu = β; es ſoll der Schwerpunkt des von dem Bogen ub begränzten paraboliſchen Trapezes baxu angegeben werden.

Bezeichnet man die Coordinaten des Schwerpunktes der ganzen Fläche mab mit x', y', die der Fläche mxu mit x'', y'' und die von baxu mit x''', y''', wo m der Anfangspunkt aller Coordinaten iſt, und ſetzt man die Fläche mab = A, mxu = B und xabu = C, ſo iſt

$$x''B + x'''C = x'A \text{ und } y''B + y'''C = y'A$$

und hieraus erhält man, weil C = A − B,

$$x''' = \frac{x'A - x''B}{A - B} \text{ und } y''' = \frac{y'A - y''B}{A - B}$$

ist aber $x' = \frac{3}{5}a$, $x'' = \frac{3}{5}\alpha$, $y' = \frac{3}{8}b$, $y'' = \frac{3}{8}\beta$,
h wird

$$x''' = \frac{3\,(aA - \alpha B)}{5\,(A - B)} \text{ und } y''' = \frac{3\,(bA - \beta B)}{8\,(A - B)}$$

r ist $A = \frac{2}{3}ab$ und $B = \frac{2}{3}\alpha\beta$, es ist also auch, wenn
dieſe Werthe ſetzt,

$$x''' = \frac{3\,(a^2b - \alpha^2\beta)}{5\,(ab - \alpha\beta)} \text{ und } y''' = \frac{3\,(ab^2 - \alpha\beta^2)}{8\,(ab - \alpha\beta)}$$

Zuſatz. Das Moment der Fläche $xabu = A - B$ iſt
ie Axe ma =

$$x'''\,(A - B) = \tfrac{2}{5}\,(a^2b - \alpha^2\beta)$$

für die Axe my iſt das Moment =

$$y'''\,(A - B) = \tfrac{1}{4}\,(ab^2 - \alpha\beta^2).$$

Da nun jede von krummen Linien eingeſchloſſene Ebene
us Paralleltrapezen mit paraboliſchen Bogen zuſammen-
t angeſehen werden kann, ſo laſſen ſich dieſe Ausdrücke
er Berechnung des Schwerpunktes ſolcher Flächen be-
t. Doch muß alsdann darauf Rückſicht genommen wer-
daß die bei den verſchiedenen Trapezen vorkommenden
n nicht zu einer und derſelben Parabel gehören.

3. Es ſoll der Schwerpunkt der Fläche ubv, Fig. 55.,
b ein paraboliſcher Bogen und uv parallel zur Axe ma
eſtimmt werden.

Wird die Bezeichnung von No. 2. beibehalten und die
e $axuv = D$, $uvb = E$ geſetzt, die Coordinaten für den
erpunkt von D mit z' und v' und die geſuchten von E
z'' und v'' bezeichnet, ſo iſt für den Anfangspunkt m
$+ z''E = x'''\,(A - B)$ und $v'D + v''E = y'''\,(A - B)$
aher iſt

$$= \frac{x'''\,(A - B) - z'D}{E} \text{ und } v'' = \frac{y'''\,(A - B) - v'D}{E}$$

Da aber $D = (ax)\,(xu) = (a - \alpha)\,\beta$,

$$(mx) + \tfrac{1}{2}\,(xa) = \alpha + \frac{a - \alpha}{2} = \frac{a + \alpha}{2},\ v' = \frac{\beta}{2} \text{ und}$$

$$= (A - B) - D = \tfrac{2}{3}\,(ab - \alpha\beta) - (a - \alpha)\,\beta$$

wenn man dieſe Werthe und, für die Momente von (A—B),
usdrücke aus dem Zuſatze zu No. 2. benutzt,

$$v'' = \frac{\frac{2}{5}\,(a^2b - \alpha^2\beta) - \frac{1}{2}\,(a + \alpha)\,(a - \alpha)\,\beta}{\frac{2}{3}\,(ab - \alpha\beta) - (a - \alpha)\,\beta}$$

$$= \frac{\frac{2}{5}a^2b - \frac{1}{2}a^2\beta + \frac{1}{10}\alpha^2\beta}{\frac{2}{3}ab - \alpha\beta + \frac{1}{3}\alpha\beta}$$

$$= \frac{3\,[4a^2b - 5a^2\beta + \alpha^2\beta]}{10\,[2ab - 3a\beta + \alpha\beta]}$$

Eben ſo findet man

$$v'' = \frac{3\,(ab^2 - 2a\beta^2 + \alpha\beta^2)}{4\,(2ab - 3a\beta + \alpha\beta)}$$

Zuſatz. Sucht man die Werthe von $z'' - x$ $v'' - \beta$, ſo erhält man die Coordinaten des Schwerpu tes der Fläche ubv für den Anfangspunkt u derſelben.

4. Es iſt mub, Fig. 55., ein elyptiſcher Quadrant, ma die halbe große und ab = b die halbe kleine Axe deſſelb es ſoll die Lage des Schwerpunktes der Fläche dieſes Q dranten beſtimmt werden.

Wenn man den Anfangspunkt der Abſciſſen in m nimmt, ſo iſt die Gleichung für die Elypſe

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

$$\text{daher } x' = \frac{\int xydx}{\int ydx} = \frac{\int xdx\sqrt{(2ax - x^2)}}{\int dx\sqrt{(2ax - x^2)}}$$

Nun iſt für $\sqrt{(2ax - x^2)} = Y$

$$\int xdx\sqrt{(2ax - x^2)} = -\frac{Y^3}{3} + a\int dx\sqrt{(2ax - x^2)}$$

$$\text{und } \int dx\sqrt{(2ax - x^2)} = \left(\frac{x - a}{2}\right)Y + \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(2ax - x}}$$

$$= -\left(\frac{a - x}{2}\right)Y + \frac{a^2}{2}\text{ Arc sin vers }\frac{x}{a}$$

folglich wird

$$x' = \frac{-\frac{1}{3}Y^3 - \frac{1}{2}a\,(a - x)\,Y + \frac{1}{2}a^3\text{ Arc sin vers }\frac{x}{a}}{-\frac{1}{2}\,(a - x)\,Y + \frac{1}{2}a^2\text{ Arc sin vers }\frac{x}{a}}$$

und weil $Y = \frac{a}{b} \cdot y$, ſo erhält man hieraus

$$x' = \frac{-\frac{ay}{b}\left[\frac{a^2}{3b^2}y^2 + \frac{1}{2}\,(a^2 - ax)\right] + \frac{1}{2}a^3\text{ Arc sin ver}}{-\frac{ay}{2b}\,(a - x) + \frac{1}{2}a^2\text{ Arc sin vers }\frac{x}{a}}$$

$$= \frac{-\,y\,[3a^2 + ax - 2x^2] + 2a^2b \text{ Arc sin vers } \frac{x}{a}}{-\,3\,(a-x)\,y + 3ab \text{ Arc sin vers } \frac{x}{a}}$$

Ferner iſt $y' = \frac{\int y^2 dx}{2\int y dx} = \frac{\frac{b^2}{a^2}\int (2ax - x^2)\,dx}{\frac{2b}{a}\int dx\sqrt{(2ax - x^2)}}$

$$= \frac{b\,(ax^2 - \frac{1}{3}x^3)}{2a\int dx\sqrt{(2ax - x^2)}}$$

$$= \frac{bx^2\,(3a - x)}{6a\left[-\frac{1}{3}\,(a-x)\,Y + \frac{a^2}{2}\text{ Arc sin vers } \frac{x}{a}\right]}$$

$$= \frac{b^2x^2\,(3a - x)}{3a^2\left[-\,(a-x)\,y + ab \text{ Arc sin vers } \frac{x}{a}\right]}$$

Zuſatz. Wird nun $x = a$ geſetzt, ſo iſt $y = b$, und man erhält aus den obigen Formeln für dieſen Fall

$$x' = a\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) \text{ und } y' = \frac{4b}{3\pi}$$

Durch x' wird hier der Abſtand des Schwerpunktes von dem Scheitel ausgedrückt und der Abſtand von dem Mittelpunkt iſt =

$$a - x' = \frac{4a}{3\pi} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2a}{\pi}$$

man erhält alſo für den elyptiſchen Quadranten ganz dieſelbe Formel, wie für den Kreisquadranten.

5. Es iſt mu, Fig. 55., ein Kreisquadrant, x der Mittelpunkt des Kreiſes und my und uy ſind Tangenten an den Endpunkten des Bogens; es ſoll die Lage des Schwerpunktes der Fläche muy angegeben werden.

Werden die Coordinaten für die Lage des Schwerpunktes der Fläche des Kreisquadranten mxu = B, in Beziehung auf die Axen mx, my, für den Anfangspunkt m mit x' und y' bezeichnet, die des Quadrats mxuy = A mit x'', y'' und die der Fläche muy = C mit x''' und y''', ſo iſt

$$x'B + x'''C = x''A \text{ und } y'B + y'''C = y''A$$

es iſt alſo $x''' = \frac{x''A - x'B}{C}$ und $y''' = \frac{y''A - y'B}{C}$

Nun ist für den Radius des Kreises = R

$$x' = R\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right);\ y' = \frac{4R}{3\pi}$$

$$x'' = \tfrac{1}{2}R;\ y'' = \tfrac{1}{2}R$$

$$B = \tfrac{1}{4}R^2\pi;\ A = R^2 \text{ und } C = A - B = R^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

es wird also, wenn man diese Werthe setzt,

$$x''' = \frac{\tfrac{1}{2}R^3 - R\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)\cdot\tfrac{1}{4}R^2\pi}{R^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{R\left(\frac{5}{6} - \frac{\pi}{4}\right)}{1 - \frac{\pi}{4}}$$

$$\text{und daher } x''' = \left(\frac{10 - 3\pi}{12 - 3\pi}\right)R$$

$$\text{und } y''' = \frac{\tfrac{1}{2}R^3 - \frac{4R}{3\pi}\cdot\tfrac{1}{4}R^2\pi}{R^2(1 - \tfrac{1}{4}\pi)} = \frac{\tfrac{1}{2}R - \tfrac{1}{3}R}{1 - \tfrac{1}{4}\pi}$$

$$\text{also } y''' = \frac{2R}{12 - 3\pi}$$

§. 38.

Einige Uebungen zur Berechnung der Lage des Schwerpunktes krummer Linien.

Nach §. 35. No. 1. sind die Formeln für die Coordinaten des Schwerpunktes einer einfach gekrümmten Curve

$$x' = \frac{\int x\,dS}{S} \text{ und } y' = \frac{\int y\,dS}{S}$$

Hier ist S die Länge des zu x und y gehörigen Bogens und $dS = \sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}$. Nun sei

1. mu, Fig. 55., ein Kreisbogen, ma = R der Radius und a der Mittelpunkt des Kreises, so ist, für mx = x und xu = y, die Gleichung $y = \sqrt{(2Rx - x^2)}$

$$\text{und daher } dy = \frac{(R - x)\,dx}{\sqrt{(2Rx - x^2)}}$$

da nun $(dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$, so wird

$$(dS)^2 = (dx)^2 + \frac{(R - x)^2\,(dx)^2}{2Rx - x^2} = \frac{R^2\,(dx)^2}{2Rx - x^2}$$

und es ist hiernach

$$\int x dS = R\int \frac{x dx}{\sqrt{(2Rx - x^2)}}$$

$$= R\left[- \sqrt{(2Rx - x^2)} + R \text{ Arc sin vers } \frac{x}{R}\right]$$

$$= R\left[- y + R \text{ Arc sin vers } \frac{x}{R}\right]$$

$$\text{und } S = R \text{ Arc sin vers } \frac{x}{R}$$

$$\text{folglich wird } x' = \frac{- Ry + R^2 \text{ Arc sin vers } \frac{x}{R}}{R \text{ Arc sin vers } \frac{x}{R}}$$

$$\text{nämlich es ist } x' = \frac{- Ry + RS}{S} = R\left[1 - \frac{y}{S}\right]$$

$$\text{Ferner ist } y dS = \sqrt{(2Rx - x^2)} \cdot \frac{R dx}{\sqrt{(2Rx - x^2)}} = R dx$$

$$\text{und daher } y' = \frac{Rx}{S}$$

$$\text{also } S : x = R : y'$$

was mit dem bereits früher gefundenen Resultat übereinstimmt.

2. Ist nun ein paraboliſcher Bogen, m der Scheitel und na die Axe, ſo iſt die Gleichung $y^2 = px$

daher $2ydy = pdx$ und $4y^2(dy)^2 = p^2(d)x^2$

nämlich es iſt $4px\,(dy)^2 = p^2(dx)^2$

daher wird $(dS)^2 = (dx)^2 + \frac{p\,(dx)^2}{4x} = \left(\frac{4x + p}{4x}\right)(dx)^2$

Es iſt alſo $\int x dS = \int x dx \sqrt{\left(\frac{4x + p}{4x}\right)} = \int dx \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)}$

$$= \left(\frac{x}{2} + \frac{p}{16}\right)\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}px)} - \frac{p^2}{128}\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)}}$$

$$= \left(\frac{8x + p}{16}\right)\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}px)} - \frac{2p^2}{128}\log\left[\frac{\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)} + \sqrt{\frac{1}{4}px}}{\sqrt{\frac{1}{4}p}}\right]$$

$$= \left(\frac{8x + p}{16}\right)\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}px)} - \frac{p^2}{64}\log\left[\sqrt{\left(\frac{4x^2}{p} + x\right)} + \sqrt{x}\right]$$

$$= \left(\frac{8x + p}{32}\right)\sqrt{(4x^2 + y^2)} - \frac{p^2}{64}\log\left[\frac{\sqrt{(4x^2 - y^2)} - y}{\sqrt{p}}\right]$$

Da nun der Werth von S, nach §. 115. des erſten Ban-

des der Uebungen aus der angewandten Mathematik, bekannt iſt, ſo iſt hierdurch nun auch der von x' vollkommen beſtimmt. Eben ſo iſt es auch nicht ſchwer, den Werth von $y' = \frac{\int y dS}{S}$ zu ermitteln.

3. Die Gleichung für die Cykloide iſt

$$y = R \text{ Arc sin vers } \frac{x}{R} + \sqrt{(2Rx - x^2)}$$

und die Länge des Bogens mu iſt zweimal ſo groß als die Sehne des Bogens des dazu gehörigen Erzeugungskreiſes, alſo $S = 2\sqrt{2Rx}$, folglich iſt $dS = dx\sqrt{\frac{2R}{x}}$; da nun

$$x' = \frac{\int x dS}{S}, \text{ ſo wird}$$

$$x' = \frac{\int x dx \sqrt{\frac{2R}{x}}}{2\sqrt{2Rx}} = \frac{\int dx \sqrt{2Rx}}{2\sqrt{2Rx}} = \frac{\frac{2}{3}x\sqrt{2Rx}}{2\sqrt{2Rx}} = \frac{1}{3}x$$

Der Abſtand des Schwerpunktes von dem Scheitel iſt alſo dem dritten Theile der Abſciſſe gleich.

Ferner iſt $ydS = [R \text{ Arc sin vers } \frac{x}{R} + \sqrt{(2Rx - x^2)}] \times dx\sqrt{\frac{2R}{x}}$

$$= \frac{R\sqrt{2R}}{\sqrt{x}} \cdot dx \text{ Arc sin vers } \frac{x}{R} + dx\sqrt{2R}\,(2R - x)$$

daher wird $\int ydS =$

$$R\sqrt{2R}\int \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ Arc sin vers } \frac{x}{R} + \sqrt{2R} \cdot \int dx\sqrt{(2R - x)}$$

alſo, für $\frac{x}{R} = z$ und daher $\sqrt{x} = \sqrt{R} \cdot \sqrt{z}$ und $dx = Rdz$

$$\int ydS = R^2\sqrt{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} \text{ Arc sin vers } z + \sqrt{2R} \cdot \int dx\sqrt{(2R - x)}$$

Nun iſt, nach Meier Hirſch's Integraltafeln Seite 289,

$$\int Zdz \text{ Arc sin vers } z = \text{Arc sin vers } z \int Zdz - \int \frac{dz \int Zdz}{\sqrt{(2z - z^2)}}$$

und da hier $Z = \frac{1}{\sqrt{z}} = z^{\frac{1}{2}}$, ſo iſt $\int Zdz = 2z^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{z}$

und es wird hiernach

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z}}\,\text{Arc sin vers}\,z = 2\sqrt{z}\cdot\text{Arc sin vers}\,z - 2\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(2z-z^2)}}$$

$$= 2\sqrt{z}\cdot\text{Arc sin vers}\,z - 2\int\frac{dz}{\sqrt{(2-z)}}$$

$$= 2\sqrt{z}\cdot\text{Arc sin vers}\,z - \frac{2}{\sqrt{R}}\int\frac{dx}{\sqrt{(2R-x)}}$$

daher ist nun auch $\int y dS =$

$$R^2\sqrt{2}\left[2\sqrt{z}\,\text{Arc sin vers}\,z - \frac{2}{\sqrt{R}}\int\frac{dx}{\sqrt{(2R-x)}}\right] + \sqrt{2R}\int dx\sqrt{(2R-x)}$$

Es ist aber $\int\frac{dx}{\sqrt{(2R-x)}} = -2\sqrt{(2R-x)}$

und $\int dx\sqrt{(2R-x)} = -\frac{2(2R-x)\sqrt{(2R-x)}}{3}$

folglich ist auch, wenn man diese Werthe setzt,

$$\int y dS = R^2\sqrt{2}\left[2\sqrt{\frac{x}{R}}\,\text{Arc sin vers}\,\frac{x}{R} + \frac{4}{\sqrt{R}}\sqrt{(2R-x)}\right]$$

$$-\frac{2\sqrt{2R}}{3}\cdot(2R-x)\sqrt{(2R-x)}$$

$$= 2R\sqrt{2Rx}\,\text{Arc sin vers}\,\frac{x}{R} + \left(4R\sqrt{2R} - \frac{4R\sqrt{2R}}{3} + \frac{2x\sqrt{2R}}{3}\right)\sqrt{(2R-x)}$$

$$= 2R\sqrt{2Rx}\cdot\text{Arc sin vers}\,\frac{x}{R} + 2\sqrt{2R}\left(\frac{4R}{3}+\frac{x}{3}\right)\sqrt{(2R-x)} + \text{Const}$$

und weil für $x = 0$ auch $y' = 0$ sein muß, so ist

$$\text{Const} = -2\sqrt{2R}\cdot\frac{4R}{3}\cdot\sqrt{2R} = -\frac{16R^2}{3}$$

und es ist daher $\int y dS$

$$= 2R\sqrt{2Rx}\cdot\text{Arc sin vers}\,\frac{x}{R} + 2\sqrt{2R}\cdot\left(\frac{4R+x}{3}\right)\sqrt{(2R-x)} - 2\sqrt{2R}\cdot\frac{4R}{3}\sqrt{2R}$$

Wird dieser Ausdruck durch $S = 2\sqrt{2Rx}$ getheilt, so erhält man

$$y' = \frac{\int y dS}{S} =$$

$$R\,\text{Arc sin vers}\,\frac{x}{R} + \left(\frac{4R+x}{3}\right)\sqrt{\left(\frac{2R-x}{x}\right)} - \frac{4R}{3}\sqrt{\frac{2R}{x}}$$

für den Abstand des Schwerpunktes eines cykloidischen Bo-
s von der Axe der Curve.

Für $x = 2R$ wird der Bogen eine halbe Cykloide und
Lage des Schwerpunktes derselben ist bestimmt durch die
hungen

$$x' = \tfrac{2}{3}R \text{ und } y' = R \text{ Arc sin vers } 2 - \frac{4R}{3}$$
$$= R\,(\pi - \tfrac{4}{3}).$$

4. Die Lage des Schwerpunktes eines elyptiſchen Bogens läßt ſich auf folgende Art beſtimmen:

Es iſt, wenn, Fig. 55., ma = a die halbe große und ab=b die halbe kleine Axe bedeutet, für mx=x und xu=y die Gleichung für die Curve

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

alſo iſt $ydy = \frac{b^2}{a^2}(a - x)\,dx$

und daher $y^2(dy)^2 = \frac{b^4}{a^4}(a - x)^2\,(dx)^2$

und $y^2(dx)^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)\,(dx)^2$

hiernach iſt $y^2[(dy)^2 + (dx)^2] = y^2(dS)^2$

$$= \frac{b^2}{a^4}[b^2(a - x)^2 + a^2(2ax - x^2)]\,(dx)^2$$

und folglich

$$ydS = \frac{bdx}{a^2}\sqrt{[a^2b^2 + 2a(a^2 - b^2)x - (a^2 - b^2)x^2]}$$

Nämlich es iſt, wenn man zur Abkürzung einſtweilen $a^2 - b^2 = m^2$ ſetzt,

$$ydS = \frac{bdx}{a^2}\sqrt{(a^2b^2 + 2am^2x - m^2x^2)} = \frac{bdx}{a^2}\sqrt{X}$$

Nach Meier Hirſch's Integraltafeln Seite 195. aber iſt, wenn man für die Coefficienten die hier ſich ergebenden Werthe ſetzt,

$$\int dx\sqrt{X} = \frac{-2m^2x + 2am^2}{-4m^2}\sqrt{X} + \frac{-4a^2b^2m^2 - 4a^2m^4}{-8m^2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$
$$= -\frac{a - x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2(b^2 + m^2)}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$
$$= -\frac{a - x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^4}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

und nach Seite 183. iſt

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{m}\text{ Arc sin }\frac{2m^2x - 2am^2}{\sqrt{(4a^2m^4 + 4a^2b^2m^2)}}$$
$$= \frac{1}{m}\text{ Arc sin }\frac{m(x - a)}{\sqrt{a^2(m^2 + b^2)}} = \frac{1}{m}\text{ Arc sin }\frac{m(x - a)}{a^2}$$

Es ist also

$$\int y dS = \frac{b}{a^2} \int dx \sqrt{X} =$$

$$\frac{b}{a^2}\left[-\left(\frac{a-x}{2}\right)\sqrt{X} + \frac{a^4}{2} \cdot \frac{1}{m} \operatorname{Arc\,sin} \frac{m(x-a)}{a^2} + \text{Const}\right]$$

und weil für $x = 0$ auch S und eben so $\int y dS = 0$ werden muß, so ist

$$\frac{b}{a^2}\left[-\frac{a}{2}\sqrt{a^2b^2} + \frac{a^4}{2} \cdot \frac{1}{m} \operatorname{Arc\,sin} \frac{-ma}{a^2} + \text{Const}\right] = 0$$

$$\text{also Const} = \frac{a^2 b}{2} - \frac{a^4}{2m} \operatorname{Arc\,sin} -\frac{m}{a}$$

Hiernach ist $\int y dS =$

$$\frac{b}{a^2}\left[\frac{a^2b}{2} - \frac{a-x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^4}{2m}\left(\operatorname{Arc\,sin} \frac{m(x-a)}{a^2} - \operatorname{Arc\,sin} -\frac{m}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{b^2}{2} - \frac{b(a-x)}{2a^2}\sqrt{X} + \frac{a^2 b}{2m}\left(\operatorname{Arc\,sin} \frac{m}{a} - \operatorname{Arc\,sin} \frac{m(a-x)}{a^2}\right)$$

ein Ausdruck, der sich noch auf folgende Art etwas abkürzen läßt. Man setze

$$\operatorname{Arc\,sin} \frac{m}{a} = \varphi \text{ und } \operatorname{Arc\,sin} \frac{m(a-x)}{a^2} = \psi$$

$$\text{also } \frac{m}{a} = \sin\varphi \text{ und } \frac{m(a-x)}{a^2} = \sin\psi$$

so ist $\sin(\varphi - \psi) = \sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi$

$$= \frac{m}{a}\sqrt{\left(1 - \frac{m^2(a-x)^2}{a^4}\right)} - \frac{m(a-x)}{a^2}\sqrt{\left(1 - \frac{m^2}{a^2}\right)}$$

$$= \frac{m}{a^3}\sqrt{(a^4 - m^2a^2 + 2am^2x - m^2x^2)} - \frac{m(a-x)}{a^3}\sqrt{(a^2 - m^2)}$$

$$= \frac{m}{a^3}\left[\sqrt{(a^2b^2 + 2am^2x - m^2x^2)} - (a-x)b\right]$$

$$= \frac{m}{a^3}\left[\sqrt{X} - (a-x)b\right]$$

Daher ist $\varphi - \psi = \operatorname{Arc\,sin} \frac{m\left[\sqrt{X} - (a-x)b\right]}{a^3}$

$$= \operatorname{Arc\,sin} \frac{m}{a} - \operatorname{Arc\,sin} \frac{m(a-x)}{a^2}$$

und sonach auch

$$\int y dS = \frac{b}{2}\left[b - \left(\frac{a-x}{a^2}\right)\sqrt{X} + \frac{a^2}{m} \operatorname{Arc\,sin} \frac{m\left[\sqrt{X} - (a-x)b\right]}{a^3}\right]$$

Da nun der Abſtand des Schwerpunktes von der Axe durch die Gleichung $y' = \frac{\int y dS}{S}$ beſtimmt iſt, ſo iſt auch

$$y' = \frac{b}{2S}\left[b - \left(\frac{a-x}{a^2}\right)\sqrt{X} + \frac{a^2}{m}\,\text{Arc sin}\,\frac{m\left[\sqrt{X} - (a-x)b\right]}{a^3}\right]$$

wo $m = \sqrt{(a^2 - b^2)}$ und $X = a^2b^2 + 2am^2x - m^2x^2$. Auf gleiche Weiſe läßt ſich auch der Werth von x' beſtimmen.

Zuſatz. Für $a = b$ verwandelt ſich die Ellypſe in einen Kreis, und es iſt alsdann $m = \sqrt{(a^2 - b^2)} = 0$, alſo $X = \sqrt{a^2b^2} = ab = a^2$, und daher

$$y' = \frac{a}{2S}\left[a - \left(\frac{a-x}{a^2}\right)a^2 + \frac{a^2}{m}\,\text{Arc sin}\,\frac{m\left[a^2 - (a-x)a\right]}{a^3}\right]$$

$$= \frac{a}{2S}\left[x + \frac{a^2}{m}\,\text{Arc sin}\,\frac{mx}{a^2}\right]$$

weil aber $m = 0$, ſo iſt $\frac{a^2}{m}\,\text{Arc sin}\,\frac{mx}{a^2} = \frac{0}{0}$ und der wahre Werth dieſes Ausdruckes wird alſo erhalten, wenn man das Differentiale des Zählers durch das des Nenners theilt; dieſer Werth iſt alſo

$$= \frac{a^2 \cdot d\,\text{Arc sin}\,\frac{mx}{a^2}}{dm} = \frac{a^2 \cdot d\left(\frac{mx}{a^2}\right)}{dm \cdot \sqrt{\left[1 + \left(\frac{mx}{a^2}\right)^2\right]}}$$

wo natürlich m als die veränderliche Größe angeſehen werden muß, und der Werth iſt hiernach

$$= \frac{\frac{a^2 x dm}{a^2}}{dm \cdot \sqrt{\left[\frac{a^4 + m^2x^2}{a^4}\right]}} = \frac{a^2x}{\sqrt{(a^4 - m^2x^2)}} = x$$

weil $m = 0$ ſein ſoll, und daher iſt

$$y' = \frac{a}{2S}\,[x + x] = \frac{ax}{S}$$

alſo $S : x = a : y'$

wie es ſein muß.

§. 39.

Uebungen.

1. Die Gleichung für die Hyperbel iſt $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$ es ſoll der Schwerpunkt angegeben werden 1) für einen Bogen

der Curve; 2) für die durch einen Bogen und die dazu gehörigen Coordinaten eingeschlossene Fläche; 3) für das hyperbolische Konoid und 4) für jeden Ausschnitt desselben.

Da die Gleichung mit der für die Elypse gleiche Form hat, und sich nur durch das Zeichen von x^2 unterscheidet, so lassen sich die gesuchten Formeln eben so wie bei jener Curve ermitteln, nur kommt man hier bei der Integration auf natürliche Logarithmen.

2. Für die Curve mb, Fig. 57., ist die Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten $ma = x$ und $ab = y$ gegeben, und $m'b'$ ist eine zweite Curve, für welche die Gleichung zwischen den Coordinaten $m'a = x'$ und $ab' = y'$ gegeben ist: es dreht sich die Fläche $mbb'm'$ um die Axe ma; man soll nun die Lage des Schwerpunktes des dadurch erzeugten hohlen Körpers angeben.

Da der Körper durch Axendrehung erzeugt wird, so liegt der Schwerpunkt desselben in der Linie ma, und dieses ist auch der Fall mit den massiven Körpern, welche von den Flächen mab und $m'ab'$ beschrieben werden. Es sei der Inhalt des massiven, durch mab beschriebenen Körpers $= V$, und der des Körpers, welcher von $m'ab'$ beschrieben wird, $= v$; mithin der Inhalt des hohlen Körpers, welcher der Differenz beider gleich sein muß, $V - v$. Der Schwerpunkt von V liege in z, der von v in z', und der von $V - v$ in z''; setzt man nun $mz = z$, $mz' = z'$ und $mz'' = z''$, so ist

$$(V - v)z'' + vz' = Vz$$

$$\text{und folglich } z'' = \frac{Vz - vz'}{V - v}$$

Es ist aber für $ma = x$ und $ab = y$

$$z = \frac{\pi\int xy^2dx}{V} \text{ und } V = \pi\int y^2dx$$

eben so ist für $m'a = x'$ und $ab' = y'$, wenn $mm' = a$ gesetzt wird,

$$z' = a + \frac{\pi\int x'(y')^2dx'}{v} \text{ und } v = \pi\int(y')^2dx'$$

folglich ist, wenn man diese Werthe setzt,

$$z'' = \frac{\pi\int xy^2dx - [av + \pi\int x'(y')^2dx']}{\pi\int y^2dx - \pi\int(y')^2dx'}$$

und weil $x = x' + a$, ſo iſt $dx = dx'$, alſo

$$z'' = \frac{\int xy^2dx - a\int(y')^2dx - \int x'(y')^2dx}{\int y^2dx - \int(y')^2dx}$$

nämlich es iſt

$$z'' = \frac{\int[xy^2 - (a + x')\,(y')^2]\,dx}{\int[y^2 - (y')^2]\,dx} = \frac{\int x[y^2 - (y')^2]\,dx}{\int[y^2 - (y')^2]\,dx}$$

ein Ausdruck, der auch unmittelbar hätte gefunden werden können.

Sind nun z. B. mb und m'b' gerade Linien, ſo entſteht ein concentriſch ausgehöhlter Kegel, und es iſt, wenn die Axe von $V = h$ und der Radius der Grundfläche $= R$, die Axe von $v = h - a$ und der Radius der Grundfläche $= r$ geſetzt wird,

$$h : R = x : y, \text{ alſo } y = \frac{Rx}{h}$$

und $h - a : r = x' : y'$, alſo $y' = \frac{rx'}{h-a} = \frac{r(x-a)}{h-a}$

folglich wird

$$z'' = \frac{\int x\left[\frac{R^2x^2}{h^2} - \frac{r^2(x-a)^2}{(h-a)^2}\right]dx}{\int\left[\frac{R^2x^2}{h^2} - \frac{r^2(x-a)^2}{(h-a)^2}\right]dx} = \frac{P}{Q}$$

und man findet

$$P = \frac{R^2}{h^2}\int x^3dx - \frac{r^2}{(h-a)^2}\int(x^3 - 2ax^2 + a^2x)\,dx$$

$$= \frac{R^2x^4}{4h^2} - \frac{r^2}{(h-a)^2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2ax^3}{3} + \frac{a^2x^2}{2}\right)$$

$$\text{und } Q = \frac{R^2}{h^2}\int x^2dx - \frac{r^2}{(h-a)^2}\int(x^2 - 2ax + a^2)\,dx$$

$$= \frac{R^2x^3}{3h^2} - \frac{r^2}{(h-a)^2}\left(\frac{x^3}{3} - ax^2 + a^2x\right)$$

wodurch alſo der Werth von z'' vollkommen beſtimmt iſt.

Es ſei ferner mb eine Parabel und m'b' eine gerade Linie, ſo iſt

$$y^2 = px \text{ und } y' = \frac{r(x-a)}{h-a}$$

$$\text{folglich } z'' = \frac{\int x\left[px - \frac{r^2}{(h-a)^2}(x-a)^2\right]dx}{\int\left[px - \frac{r^2}{(h-a)^2}(x-a)^2\right]dx}$$

$$= \frac{\frac{px^3}{3} - \frac{r^2}{(h-a)^2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2ax^3}{3} + \frac{a^2x^2}{2}\right)}{\frac{px^2}{2} - \frac{r^2}{(h-a)^2}\left(\frac{x^3}{3} - ax^2 + a^2x\right)}$$

$$= \frac{4(h-a)^2px^2 - 3r^2x^3 + 8ar^2x^2 + 6a^2r^2x}{6(h-a)^2px - 4r^2x^2 + 12ar^2x + 12a^2r^2}$$

Für $x = h$ und $a = 0$ wird nun

$$z'' = \frac{4ph^4 - 3r^2h^3}{6ph^3 - 4r^2h^2} = \frac{4ph^2 - 3r^2h}{6ph - 4r^2}$$

wo die Spitze des Kegels in dem Scheitel des Paraboloids liegt.

Für $r = p$ ist ferner

$$z'' = \frac{h(4h - 3p)}{6h - 4p}$$

und soll auch $h = p$ sein, so wird

$$z'' = \frac{p}{2}$$

Zusatz. Ist mnb, Fig. 57ª, ein paraboliſcher Bogen, m der Scheitel, mc die Axe, ma = ab = p der Parameter derſelben, und man zieht die Sehne mb, ſo hat der Körper, welcher entſteht, wenn die Fläche mbn um die Axe mc ſich dreht, die Eigenſchaft, daß für mx = az der zu mx gehörige Theil des Körpers mit dem zu az gehörigen Theile gleichen Kubikinhalt hat.

3. Es iſt m der Scheitel, mb der Bogen und ma, Fig. 57., die Axe einer Parabel, und m′b′ iſt ein Kreisbogen von der Art, daß m′a durch den Mittelpunkt des Kreiſes geht; es ſoll die Lage des Schwerpunktes von dem hohlen Körper angegeben werden, welcher entſteht, wenn die Fläche abb′m′ ſich um die Axe ma dreht.

4. Ein Körper beſteht aus zwei Theilen A und B von verſchiedenem ſpecifiſchem Gewichte α und β, die Lage der Schwerpunkte a und b, Fig. 37., dieſer Körper iſt durch die Coordinaten $ma' = a'$, $ma'' = a''$, $mb' = b'$ und $mb'' = b''$

beſtimmt; es ſoll die Lage ihres gemeinſchaftlichen Schwerpunktes angegeben werden.

Wird der Kubikinhalt eines Körpers mit ſeinem eigenthümlichen Gewichte multiplicirt, ſo lernt man das Gewicht deſſelben, für das des Waſſers = 1, kennen, und es iſt, auf dieſe Weiſe ausgedrückt, das Gewicht des Körpers $A = A\alpha$ und das von $B = B\beta$, folglich iſt in Beziehung auf die Abſciſſenlinie mq, wenn $mx' = x'$ die Abſciſſe des Schwerpunktes bedeutet,

$$x' = \frac{a'A\alpha + b'B\beta}{A\alpha + B\beta}$$

und eben ſo iſt für die Axe mp der gemeinſchaftliche Schwerpunkt durch die Gleichung beſtimmt

$$(mx'') = x'' = \frac{a''A\alpha + b''B\beta}{A\alpha + B\beta}$$

Beiſpiel. Ein Kegel beſteht aus zwei Theilen, deren gemeinſchaftliche Fläche parallel zur Grundfläche des Kegels läuft, und es iſt das eigenthümliche Gewicht des obern Theils $A = \alpha$ und das des untern Theils $B = \beta$; die Radien der beiden Grundflächen G und g des untern Theils ſind R und r, und die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte, welche alſo verlängert durch die Spitze des Kegels geht und in welcher daher die Schwerpunkte beider Theile liegen müſſen, = h. Es ſoll die Lage des gemeinſchaftlichen Schwerpunktes angegeben werden.

Wird die Länge der Axe des obern Theils A des Kegels = p geſetzt, ſo iſt

$$R : r = h + p : p, \text{ alſo } p = \frac{rh}{R - r}$$

$$\text{daher iſt } A = \frac{rh}{R - r} \cdot \frac{r^2\pi}{3}$$

$$\text{das Gewicht von } A = \frac{\alpha r^3 h\pi}{3(R - r)} = A\alpha$$

und der Abſtand des Schwerpunktes von $g = \frac{1}{4}p$, alſo von

$$G = h + \tfrac{1}{4}p = a'$$

$$\text{Der Inhalt von B iſt} = \frac{h(R^2 + Rr + r^2)\pi}{3}$$

$$\text{alſo das Gewicht} = \frac{\beta h(R^2 + Rr + r^2)\pi}{3} = B\beta$$

ab der Abſtand des Schwerpunktes von G, nach §. 33. Aufgabe 3., =

$$\frac{h}{4}\left(\frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}\right) = b'$$

Wird alſo der Abſtand des gemeinſchaftlichen Schwerpunkts von G mit x bezeichnet, ſo iſt

$$x = \frac{a'A\alpha + b'B\beta}{A\alpha + B\beta}$$

nämlich es iſt

$$x\,(A\alpha + B\beta) = a'A\alpha + b'B\beta$$

alſo wenn die Werthe geſetzt werden

$$x\left[\frac{\alpha r^3 h\pi}{3(R-r)} + \frac{\beta h(R^2 + Rr + r^2)\pi}{3}\right] =$$

$$(h+\tfrac{1}{4}p)\,\frac{\alpha r^3 h\pi}{3(R-r)} + \frac{h}{4}\left(\frac{R^2+2Rr+3r^2}{R^2+Rr+r^2}\right)\cdot\frac{\beta h(R^2+Rr+r^2)\pi}{3}$$

nämlich es iſt

$$x\left[\frac{\alpha r^3 + \beta(R-r)(R^2 + Rr + r^2)}{3\,(R-r)}\right] =$$

$$\frac{h(4R-3r)}{4\,(R-r)}\cdot\frac{\alpha r^3}{3\,(R-r)} + \frac{h\beta\,(R^2 + 2Rr + 3r^2)}{12}$$

Hieraus folgt

$$x\,(\alpha r^3 + \beta\,(R-r)\,(R^2 + Rr + r^2) =$$

$$\frac{h}{4(R-r)}\,[\alpha r^3\,(4R-3r) + \beta\,(R-r)^2\,(R^2 + 2Rr + 3r^2)]$$

es iſt alſo

$$x = \frac{h}{4}\left[\frac{\alpha r^3\,(4R-3r) + \beta\,(R-r)^2\,(R^2+2Rr+3r^2)}{(R-r)\,[\alpha r^3 + \beta\,(R^3 - r^3)]}\right]$$

5. Ein Kegel beſteht aus zwei Theilen A und B mit dem ſpecifiſchen Gewichte α und β, und ihre gemeinſchaftliche Fläche iſt parallel zu der Grundfläche G des Kegels, deren Radius = R ſein ſoll; die ganze Höhe des Kegels iſt = H; es ſoll die Höhe der beiden Theile für den Fall angegeben werden, daß ihr gemeinſchaftlicher Schwerpunkt in der gemeinſchaftlichen Berührungsfläche der Theile liegt.

6. Die Curve mub, Fig. 55., dreht ſich um die Axe ma; es ſoll die Lage des Schwerpunktes der krummen Oberfläche des dadurch erzeugten Körpers angegeben werden.

Für mx = x, xu = y und die Länge des Bogens mu = S

iſt der Umfang des durch den Punkt u beſchriebenen Kreiſes $= 2y\pi$, und die Fläche eines ſchmalen, an dieſem Kreiſe anliegenden Gürtels der krummen Oberfläche wird daher $= 2y\pi \times dS$, folglich iſt das Moment deſſelben $= 2xy\pi dS$ und alſo die Summe aller Momente $= 2\pi \int xydS$. Iſt nun x' der Schwerpunkt der krummen Oberfläche, ſo wird für $mx' = x'$, wenn der Inhalt der krummen Oberfläche mit T bezeichnet wird,

$$x' = \frac{2\pi \int xydS}{T}$$

oder weil $T = \int 2\pi ydS = 2\pi \int ydS$, ſo iſt

$$x' = \frac{\int xydS}{\int ydS} = \frac{\int xy\sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}}{\int y\sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}}$$

Beiſpiele. Iſt mub eine gerade Linie, alſo der erzeugte Körper ein Kegel, ſo wird für $ma = h$ und $ab = R$

$$h : R = x : y, \text{ alſo } y = \frac{Rx}{h} \text{ und } dy = \frac{R}{h} \cdot dx$$

$$\text{folglich iſt } dS = \sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]} = dx\sqrt{\left(1 + \frac{R^2}{h^2}\right)}$$

$$= \frac{dx\sqrt{(h^2 + R^2)}}{h}$$

$$\text{und daher } \int xydS = \int x \cdot \frac{Rx}{h} \cdot \frac{dx\sqrt{(h^2+R^2)}}{h} = \frac{R\sqrt{(h^2+R^2)}}{h^2} \int x^2 dx$$

$$= \frac{Rx^3\sqrt{(h^2 + R^2)}}{3h^2}$$

$$\text{und } \int ydS = \int \frac{Rx}{h} \cdot \frac{dx\sqrt{(h^2 + R^2)}}{h} = \frac{R\sqrt{(h^2 + R^2)}}{h^2} \int xdx$$

$$= \frac{Rx^2\sqrt{(h^2 + R^2)}}{2h^2}$$

Es iſt alſo $x' = \frac{2}{3}x$ oder für $x = h$

$$x' = \frac{2}{3}h.$$

Der Schwerpunkt der krummen Oberfläche eines Kegels liegt alſo in einem Abſtande $= \frac{2}{3}$ der Axe von der Spitze deſſelben.

Es ſei mub, Fig. 55., ein Viertelskreis und der Radius deſſelben $= R$, ſo iſt die Gleichung

$$y^2 = 2Rx - x^2, \text{ alſo } ydy = (R - x)\,dx$$

$$\text{hiernach iſt } (dy)^2 = \frac{(R - x)^2 (dx)^2}{y^2}$$

und $(dx)^2 = \frac{y^2 (dx)^2}{y^2} = \frac{(2Rx - x^2)(dx)^2}{y^2}$

folglich $(dS)^2 = \frac{R^2 (dx)^2}{y^2}$ und $dS = \frac{Rdx}{y}$

r wird

$$\int xydS = \int Rxdx = \frac{Rx^2}{2}$$

$$\text{und } \int ydS = \int Rdx = Rx$$

$$\text{folglich ist } x' = \frac{\int xydS}{\int ydS} = \frac{x}{2}$$

Schwerpunkt der krummen Oberfläche eines jeden Kuschnittes liegt also in dem Halbirungspunkte der Axe ben.

7. Es soll die Lage des Schwerpunktes der ganzen fläche eines Kegels, die Grundfläche mitgerechnet, angewerden.

Wird, Fig. 47., die Axe des Kegels eg = h und der us der Grundfläche ga = R gesetzt, so ist der Abstand rummen Oberfläche A von e = $\frac{2}{3}$h und der Abstand des erpunktes der Grundfläche B von e ist = (eg) = h, h ist

$$x' = \frac{A \cdot \frac{2h}{3} + Bh}{A + B} = \frac{h}{3}\left(\frac{2A + 3B}{A + B}\right)$$

man aber die Seite des Kegels eb = a, so ist

$A = \frac{2R\pi \cdot a}{2} = aR\pi$, und $B = R^2\pi$, es ist also

$$x' = \frac{h}{3}\left(\frac{2aR\pi + 3R^2\pi}{aR\pi + R^2\pi}\right) = \frac{h}{3}\left(\frac{2a + 3R}{a + R}\right)$$

ür a = mR wird

$$x' = \frac{(2m + 3)\, h}{3\,(m + 1)}$$

. Es soll die Lage des Schwerpunktes der ganzen äche eines Kugelabschnittes, die Grundfläche mitgerechgegeben werden.

. Die Lage des Schwerpunktes der ganzen Oberfläche bgestumpften Kegels, beide Grundflächen mitgerechnet, gegeben werden.

10. Durch welche Formeln kann man die Lage des Schwerpunktes der krummen Oberfläche von einem Konoiden-Ausschnitte berechnen?

11. Der Abstand des Schwerpunktes der Fläche mabu = F, Fig. 55., von der Abscissenlinie ma ist, nach §. 35. No. 2. Zusatz 1., durch die Gleichung bestimmt $y' = \frac{\int y^2 dx}{2F}$ und hieraus folgt $2y'\pi \cdot F = \int y^2 \pi dx$. Es ist aber $\int y^2 \pi dx$ der Inhalt P des durch die Fläche F erzeugten Körpers, folglich ist $P = 2y'\pi \cdot F$. Der Inhalt eines durch Axendrehung erzeugten Körpers wird also erhalten, wenn man die erzeugende Fläche mit dem Wege multiplicirt, welchen der Schwerpunkt derselben bei der Erzeugung des Körpers durchläuft, und dieses ist der unter der Benennung „Guldinsche Regel" bekannte Satz.

§. 40.

Von der Stabilität der Körper.

Das ganze Gewicht eines Körpers kann als in dessen Schwerpunkt vereinigt gedacht werden, und der Körper muß daher ruhen, sobald sein Schwerpunkt unterstützt ist, d. h. sobald seine Bewegung senkrecht gegen den Horizont verhindert wird. Liegt nun ein Körper mit einer seiner Flächen auf einer horizontalen Ebene, und es trifft die Senkrechte, welche von seinem Schwerpunkte auf den Horizont gefällt werden kann, die Grundfläche des Körpers, nämlich die Fläche, mit welcher er aufliegt, so ist der Schwerpunkt unterstützt und der Körper daher vor dem Umfallen gesichert. Sobald die Senkrechte von dem Schwerpunkte auf den Horizont aber die Grundfläche des Körpers nicht trifft, sondern außerhalb derselben fällt, kann der Körper nicht in Ruhe bleiben, sondern er wird umfallen und hierdurch eine solche Lage annehmen, daß der Schwerpunkt unterstützt wird, wodurch er alsdann in Ruhe kommt. Der Grund dieser Erscheinung läßt sich auf folgende Art nachweisen:

Es sei, Fig. 58., mn eine Kante des Körpers und mnc ein Theil der Grundfläche desselben, mit welcher er auf der Horizontalebene aufliegt; der über dieser Fläche liegende Schwer-

punkt sei in g und die Senkrechte von diesem Punkte auf den Horizont treffe die Grundfläche in a. Man ziehe ab normal auf mn und verbinde g mit b, so ist auch gb normal auf mn, und in dem rechtwinkligen Dreieck gab ist $\angle gba < 90°$. Soll nun der Körper umfallen, so daß er hierbei sich um die Kante mn dreht, so muß der Schwerpunkt g einen Kreisbogen beschreiben, und es ist bg der Radius und b der Mittelpunkt desselben. Während des Umfallens wird nun g einmal eine solche Lage bekommen, daß er sich normal über dem Punkte b befindet, und es ist alsdann der Abstand desselben von b $=$ gb $>$ ga. Der Schwerpunkt muß also, bis er in diese Lage kommt, steigen, sich also mehr und mehr von dem Horizonte entfernen, was nur durch eine Kraft bewirkt werden kann, welche wenigstens zum Theil der Schwere entgegenwirkt. Da nun hier keine besondere auf den Körper wirkende Kraft vorausgesetzt wird, so kann ein solches Steigen des Schwerpunktes auch nicht erfolgen, und folglich der Körper nicht so fallen, daß er dabei sich um die Kante mn dreht. Da nun dasselbe von allen übrigen Kanten des Körpers, mit welchen derselbe auf dem Horizonte aufliegt, ebenfalls gilt, sobald a innerhalb der von diesen Kanten eingeschlossenen Figur liegt, so folgt, daß der Körper überhaupt nicht fallen kann. Liegt der Schwerpunkt des Körpers aber in g′, so daß $\angle g'ba > 90°$, so beschreibt der Schwerpunkt bei dem Fallen um mn, wenn die Grundfläche des Körpers rechts von mn liegt, einen Kreisbogen (dessen Radius bg′ und dessen Mittelpunkt b ist), von welchem jeder folgende Punkt dem Horizonte immer näher liegt, und da eine solche Bewegung durch die Schwere allein, ohne alle Beiwirkung irgend einer andern Kraft erfolgen kann, so ist der Körper auch nicht gegen das Umfallen gesichert. Dieses führt zu dem bereits angegebenen Resultate: Sobald die Senkrechte von dem Schwerpunkte g eines Körpers auf den Horizont innerhalb der Grundfläche desselben fällt, ist er gegen das Umfallen gesichert: fällt diese Senkrechte aber außerhalb der Grundfläche, so muß der Körper umfallen. Als Grundfläche ist hierbei aber immer die Figur anzusehen, um deren Seiten, als um Kanten, der Körper bei dem Umfallen sich drehen muß. Ist also z. B. ein Körper auf

einem Dreifuße befestigt und steht dieser Dreifuß auf dem Horizonte auf, so bildet das hierdurch bestimmte Dreieck die Grundfläche des Körpers. Zugleich ergiebt sich hieraus die Regel: Wenn ein Körper ruhet, so hat der Schwerpunkt desselben immer eine solche Lage, daß er keinen dem Horizonte näheren Punkt erreichen kann, ohne sich zuvor weiter von demselben zu entfernen. Jeder Körper aber, der eine solche Lage hat, daß der Schwerpunkt desselben einen dem Horizonte näher liegenden Punkt erreichen kann, ohne sich zuvor weiter von demselben entfernen zu müssen, fällt und bekommt dadurch die neue vortheilhaftere Lage.

Wenn ein Körper ruhet, und es wirkt eine hinreichend große Kraft auf denselben, so wird er durch diese entweder aus seiner Stelle verrückt, oder, wenn er sich nicht verrücken läßt, um eine seiner Kanten gedreht und umgeworfen. Für jeden auf dem Horizont aufliegenden Körper läßt sich aber eine Kraft angeben, die groß genug ist, um denselben umzuwerfen, ihn also in eine andere Lage zu bringen. Uebrigens versteht es sich von selbst, daß die hierzu nöthige Kraft bald größer, bald kleiner sein muß, was in jedem besondern Falle theils von der Form des Körpers und theils von der Lage desselben abhängt, wenn die Richtung der Kraft und ihre Lage gegeben sind.

Ruhet ein Körper auf einem festen horizontalen Boden und kann derselbe zwar umgeworfen, aber nicht fortgeschoben werden, so nennt man die zu diesem Umwerfen erforderliche, auf den Schwerpunkt des Körpers, parallel zu dem Horizonte wirkende Kraft die Stabilität oder Standfestigkeit des Körpers nach der Seite zu, nach welcher er durch den Einfluß der Kraft umfällt.

Die allgemeine Formel für die Stabilität eines Körpers nach einer gewissen Richtung läßt sich auf folgende Art bestimmen: Es sei, Fig. 59., bDc ein horizontal aufliegender Körper, dessen Schwerpunkt in g ist, das Gewicht des Körpers sei = P und die Kraft, welche auf g parallel zu dem Horizonte cb wirkend, hinreichend ist, denselben umzuwerfen, so daß er hierbei sich um b dreht, sei

= V, so kann, weil die Wirkung einer Kraft durch Verlegung ihres Angriffspunktes, wenn er nur in derselben Richtung bleibt, nicht geändert wird, V auch in irgend einem Punkte der verlängerten Vg als wirkend gedacht werden. Errichtet man also in b eine Senkrechte, welche die verlängerte Vg in d schneidet, so kann V auch als an dem Punkte d normal gegen bd wirkend gedacht werden. Fällt man ferner von dem Schwerpunkte g auf den Horizont die Senkrechte ga, so giebt diese die Richtung, nach welcher der Schwerpunkt mit dem ganzen Gewichte des Körpers = P gedrückt wird, und es kann daher P auch als auf a, normal gegen ab wirkend angesehen werden. Bei dem Umwerfen des Körpers dreht sich derselbe um b, während der Winkel abd unverändert bleibt; soll also V gerade zum Umwerfen hinreichen, so muß diese Kraft mit P im Gleichgewichte sein: die Abhängigkeit beider von einander ist also durch den gebrochenen Hebel abd, von welchem beide Kräfte normal gegen die Hebelarme wirken, bestimmt. Die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht ist also

$$(ba) \cdot P = (bd) \cdot V = (ga) \cdot V$$

nämlich es ist, wenn man die Höhe des Schwerpunktes über dem Horizont, also ga = g, und den Abstand des Punktes a, in welchem die Senkrechte von g den Horizont trifft, von b = a setzt,

$$aP = gV$$

und demnach folgt für die Stabilität $V = \frac{aP}{g}$

Hieraus geht nun hervor, daß die Stabilität, direct dem Gewichte des Körpers und dem Abstande des Punktes a von der Kante, um welche er bei dem Umwerfen sich drehen muß, proportionirt ist; daß aber die Stabilität desto geringer wird, je höher g liegt, je weiter also der Schwerpunkt von dem Horizonte entfernt ist.

Ist $V = \frac{aP}{g}$, so reicht die geringste Vermehrung der Kraft V hin, um den Körper umzuwerfen. Ist a = 0, so wird auch V = 0, und es hat alsdann der Körper gar keine Standfestigkeit, er wird durch die geringste Kraft umge-

worfen. Für einen negativen Werth von a ist V ebenfalls negativ; es ist nämlich in diesem Falle eine Kraft = V nach entgegengesetzter Richtung erforderlich, um das Umfallen des Körpers zu verhindern.

§. 41.

Uebungen.

Aufgabe 1. Es soll die Stabilität eines normalen, auf einer der beiden Grundflächen aufstehenden Prisma angegeben werden.

Auflösung. Setzt man die Grundfläche = G und die Höhe des Prisma = h, so ist die Höhe des Schwerpunktes $g = \frac{1}{2}h$ und das Gewicht $P = Gh$ (für das Gewicht der Kubikeinheit = 1); wenn also, wie in der allgemeinen Formel, der Abstand des Punktes, in welchem die Grundfläche von der Senkrechten aus dem Schwerpunkte getroffen wird, von der Seite der Grundfläche, um welche das Prisma bei dem Umfallen sich dreht, = a gesetzt wird, so ist

$$V = \frac{aP}{g} = \frac{a \cdot Gh}{\frac{1}{2}h} = 2aG$$

Die Stabilität eines normalen Prisma ist also ganz unabhängig von der Höhe desselben, und es haben hiernach zwei normale Prismen von gleicher Grundfläche immer gleiche Stabilität, wenn auch ihre Höhe verschieden ist.

Zusatz 1. Ist die Grundfläche des Prisma ein Rechteck mit den Seiten l und b, so wird $G = bl$ und $a = \frac{1}{2}b$, also ist in diesem Falle

$$V = b^2l$$

Hieraus geht nun hervor, daß bei einem normalen Parallelepipedon die Stabilität proportionirt ist der Länge der Grundfläche und dem Quadrate ihrer Breite, wobei diejenige Seite Länge genannt wird, um welche es umgeworfen werden soll.

Zusatz 2. Ist die Grundfläche ein Kreis mit dem Radius R, so wird $G = R^2\pi$ und $a = R$, also

$$V = 2R^3\pi$$

Die Stabilität eines auf der Grundfläche aufstehenden Cylin-

ders ist also der dritten Potenz des Radius der Grundfläche proportionirt.

Zusatz 3. Wenn die Grundfläche ein Dreieck ist, die Grundlinie desselben, worunter hier die Seite verstanden wird, um welche das Prisma bei dem Fallen sich dreht, = l und die Höhe = b, so wird $G = \frac{1}{2}lb$ und $a = \frac{1}{3}b$, also

$$V = \frac{lb^2}{3} = \frac{2Gb}{3}$$

Bei einem bestimmten Werthe von G ist also die Stabilität desto größer, je größer der Werth von b ist, und da l desto kleiner sein muß, einen je größern Werth b hat, so folgt, daß ein dreiseitiges Prisma nach derjenigen Richtung die größte Stabilität hat, auf welcher die Seite der Grundfläche am kleinsten ist.

Aufgabe 2. Ein normales vierseitiges Prisma ruhet auf einer der Seitenflächen, welche also ein Rechteck ist, und der normale Querschnitt ist ein Paralleltrapez abcd, Fig. 60., von der Art, daß, wenn man die Halbirungspunkte e und f der beiden parallelen Seiten verbindet, diese Verbindungslinie ef senkrecht auf ab steht; es soll die Stabilität dieses Körpers, in so fern er um eine der an a und b anliegenden Seiten gedreht werden soll, angegeben werden.

Auflösung. Für ab=a, cd=b, ef=h und die Länge des Prisma =l ist, wenn g der Schwerpunkt des Querschnitts abcd sein soll, in der Formel $V = \frac{aP}{g}$

$$P = \frac{(a + b)\,h}{2} \cdot l;\ a = (fa) = \tfrac{1}{3}a$$

und $g = (gf) = \frac{(a+2b)\,h}{3(a+b)}$ nach §. 32. Aufgabe 4., und es ist daher $V = \frac{1}{3}a \cdot \frac{(a + b)\,hl}{2} : \frac{(a + 2b)\,h}{3(a+b)}$

$$\text{also } V = \frac{3al\,(a + b)^2}{4\,(a + 2b)}$$

Also auch hier ist die Stabilität, so lange die übrigen Dimensionen unverändert bleiben, von der Höhe ef = h unabhängig.

Zuſatz 1. Für a = b wird der Körper ein Parall
pipedon und es iſt

$$V = \frac{3bl \cdot 4b^2}{4 \cdot 3b} = b^2l$$

wie bei Zuſatz 1. der vorigen Aufgabe.

Wird b = 0, ſo erhält man

$$V = \frac{3ala^2}{4a} = \tfrac{3}{4}a^2l$$

für die Stabilität eines dreiſeitigen Prisma, welches auf e
Seitenfläche aufliegt und deſſen Querſchnitt ein gleichſeiti
Dreieck mit der Grundlinie = a iſt.

Zuſatz 2. Verwandelt ſich abcd in ein Rechteck
gleicher Höhe und Fläche mit dem Trapez, und bleibt
Länge l dieſelbe, ſo wird die Grundlinie $= \frac{a + b}{2}$ und
Stabilität W iſt in dieſem Falle

$$W = \frac{\frac{a+b}{4} \cdot \frac{(a+b)hl}{2}}{\frac{1}{2}h} = \frac{(a+b)^2l}{4}$$

folglich iſt $V : W = \frac{3al\,(a+b)^2}{4(a+2b)} : \frac{(a+b)^2\,l}{4}$

alſo $V : W = 3a : a + 2b$

Iſt nun ab größer als cd, alſo a > b, ſo iſt a
V > W; hieraus folgt, daß eine Mauer, deren Querſchn
ein Paralleltrapez iſt, immer eine größere Stabilität hat,
eine ſolche, deren Querſchnitt ein Rechteck iſt, wenn beide gl
chen Kubikinhalt ꝛc. haben.

Für a = 2b wird V : W = 3 : 2
und für a = 3b wird V : W = 9 : 5 ꝛc.

Zuſatz 3. Es iſt $V = \frac{1}{2}a \cdot P : \frac{(a+2b)h}{3(a+b)} = \frac{3a(a+b}{2(a+2b}$
ſind nun von einer Mauer, deren Querſchnitt ein Recht
ſein ſoll, die Dimenſionen A, h und l, und man bezeich
den Kubikinhalt mit Q, ſo wird die Stabilität

$$W = \frac{\frac{1}{2}A \cdot Q}{\frac{1}{2}h} = \frac{AQ}{h}$$

ſoll aber V = W ſein, ſollen alſo beide gleiche Stabilität
ben, ſo muß die Gleichung ſtatt finden

$$\frac{3a(a+b)P}{2(a+2b)} = AQ$$

und daher $P : Q = 2A(a+2b) : 3a(a+b)$

oder auch $\frac{(a+b)}{2}hl : Ahl = 2A(a+2b) : 3a(a+b)$

woraus folgt $(a+b) : 2A = 2A(a+2b) : 3a(a+b)$

und dieſes giebt $A = \left(\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{3a}{a+2b}\right)}$

Es wird alſo auch

$$P:Q = \left(\frac{a+b}{2}\right)hl : \left(\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{3a}{a+2b}\right)}\cdot hl = 1 : \sqrt{\left(\frac{3a}{a+2b}\right)}$$

woraus hervorgeht, daß immer $Q > P$ ſein muß, ſo lange $a > b$ iſt. Soll $Q = mP$ werden, ſo muß

$$1 : m^2 = a + 2b : 3a \text{ ſein,}$$

$$\text{alſo } a = \left(\frac{2m^2}{3 - m^2}\right)b$$

es muß alſo immer $m < \sqrt{3}$ ſein.

Aufgabe 3. $ab\beta\alpha$, Fig. 61., iſt der normale Querſchnitt eines Prisma von der Länge $= l$, welches alſo auf einem Rechteck aufliegt, deſſen Dimenſionen l und $ab = B$ ſind; man ſoll die Stabilität dieſes Körpers für den Fall angeben, wenn derſelbe um eine der beiden an a oder b anliegenden Kanten gedreht werden ſoll.

Auflöſung. Es wird hier vorausgeſetzt, daß die Senkrechte ef auf ab dieſe Linie ſowohl, als auch $\alpha'\beta'$ und $\alpha\beta$ halbirt, und es iſt daher, wenn $\alpha\beta = b$, $ek = H$ und $kf = h$ geſetzt wird, der Inhalt des Theiles von dem Prisma, von welchem $abb'a'$ der Querſchnitt iſt, $= Q = Bhl$, und der Inhalt des Theils, welcher $\alpha'\beta'\beta\alpha$ zum Querſchnitt hat, $= q = bHl$.

Liegt alſo der gemeinſchaftliche Schwerpunkt in g, ſo iſt

$$(fg) = g = \frac{Q\cdot\frac{h}{2} + q\cdot\left(h+\frac{H}{2}\right)}{Q+q}$$

$$= \frac{Bhl\cdot h + bHl\,(2h+H)}{2(Bhl+bHl)} = \frac{Bh^2 + 2bHh + bH^2}{2(Bh+bH)}$$

Ferner iſt für die Schwere der Kubikeinheit $= 1$ das ganze Gewicht $P = Q + q = (Bh + bH)\,l$, und der Abſtand des

Punktes f, in welchem die Grundfläche von der Senkrechten aus dem Schwerpunkte getroffen wird, von der Kante = (af) = a = $\frac{1}{2}$B. Da nun allgemein

$$V = \frac{aP}{g}$$

ist, so wird, wenn man hier die Werthe setzt,

$$V = \tfrac{1}{2}B\cdot(Bh+bH)l : \frac{Bh^2+2bHh+bH^2}{2(Bh+bH)} = \frac{B(Bh+bH)^2l}{Bh^2+2bHh+bH^2}$$

Zusatz. Die Fläche des Querschnittes ist = Bh + bH; soll nun die Fläche eines Rechtecks von derselben Höhe = ef = H + h eben so groß sein, und man setzt die Grundlinie desselben = β, so muß

$$\beta\,(H + h) = Bh + bH \text{ sein,}$$

$$\text{also } \beta = \frac{Bh + bH}{H + h}$$

Die Stabilität W eines Prisma, welches dieses Rechteck zum Querschnitt hat, und dessen Länge ebenfalls = l ist, wird durch die Gleichung ausgedrückt

$$W = \frac{\frac{1}{2}\beta\cdot\beta(H + h)l}{\frac{1}{2}(H + h)} = \beta^2 l = \frac{(Bh + bH)^2 l}{(H + h)^2}$$

folglich ist

$$V : W = \frac{B\,(Bh + bH)^2\,l}{Bh^2 + 2bHh + bH^2} : \frac{(Bh + bH)^2 l}{(H + h)^2}$$

$$= B(H + h)^2 : Bh^2 + 2bHh + bH^2$$

$$= B(H + h)^2 : B(H + h)^2 - (B - b)\,(2Hh + H^2)$$

Es ist demnach immer V > W, wenn B > b ist, wie sich von selbst versteht.

Man kann also dadurch, daß man den Fuß einer Mauer breiter als den obern Theil derselben macht, ihre Stabilität vermehren, ohne daß der Kubikinhalt größer wird. Für H=3h, wenn also ek = 4(kf) ist, wird

$$V : W = 16B : 16B - 15(B - b)$$

und ist B = $\frac{5}{4}$b, also B − b = $\frac{1}{4}$b, so wird

$$V : W = 20 : 20 - \tfrac{15}{4} = 80 : 65 = 16 : 13.$$

Anmerkung. Man vergleiche hiermit Eytelweins Handbuch der Statik fester Körper, Bd. I. §. 166. Auch wird daselbst §. 163. gezeigt, um wieviel die Stabilität einer Mauer vermehrt wird, wenn man bei derselben Strebepfeiler anbringt.

Aufgabe 4. Es ſoll die Stabilität eines auf der Grundfläche aufliegenden Kugelabſchnitts beſtimmt werden.

Auflöſung. Der Abſtand des Schwerpunktes von dem Scheitel des Abſchnitts iſt, nach §. 36. Aufgabe 1., durch die Formel beſtimmt

$$x' = \frac{8Rx - 3x^2}{12R - 4x}$$

und es iſt daher der Abſtand g von der Grundfläche, weil in dieſer Formel die Höhe des Abſchnitts mit x bezeichnet wird,

$$g = x - x' = x - \frac{8Rx - 3x^2}{12R - 4x} = \frac{4Rx - x^2}{12R - 4x}$$

Ferner iſt, wenn das Gewicht der Kubikeinheit = 1 geſetzt wird, das Gewicht des Kugelabſchnittes $P = \frac{(3R-x)x^2\pi}{3}$

und der Werth von a aus der allgemeinen Formel $V = \frac{aP}{g}$

iſt hier = ϱ, wenn der Radius der Grundfläche des Abſchnittes mit ϱ bezeichnet wird; es iſt aber $\varrho = \sqrt{(2Rx - x^2)}$, folglich wird

$$V = \frac{\varrho(3R - x)\cdot x^2\pi}{3} : \frac{(4R - x)x}{12R - 4x}$$

$$= \frac{4\varrho(3R - x)^2x\pi}{3(4R - x)} = \frac{4(3R - x)^2x\pi}{3(4R - x)} \cdot \sqrt{(2Rx - x^2)}$$

der geſuchte Ausdruck für die Stabilität eines jeden Kugelabſchnitts.

Zuſatz. Setzt man x = R, ſo wird die Stabilität der Halbkugel erhalten

$$V = \frac{4 \cdot (2R)^2R\pi}{3 \cdot 3R} \cdot R = \frac{16}{9}R^3\pi;$$

und weil der Inhalt K der Halbkugel, der hier zugleich als der Ausdruck für das Gewicht derſelben angenommen wird, $K = \frac{2R^3\pi}{3}$ iſt, ſo wird $V = \frac{8}{3}K$,

nämlich es iſt V : K = 8 : 3.

Für x = 2R wird V = 0; es iſt nämlich die Stabilität der ganzen Kugel = 0, wie ſich von ſelbſt verſteht, da dieſelbe immer nur mit einem einzigen Punkte aufliegt.

Aufgabe 5. Die Stabilität eines normalen, parallel zur Grundfläche abgestumpften Kegels soll angegeben werden.

Auflösung. Der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche ist, nach §. 33. Aufgabe 3.,

$$g = \frac{h}{4}\left(\frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}\right)$$

der Kubikinhalt, und also auch das Gewicht, für die Schwere der Kubikeinheit = 1, ist

$$P = \frac{(R^2 + Rr + r^2)\,h\pi}{3}$$

und der Werth von a der allgemeinen Formel ist hier = R, also wird

$$V = \frac{aP}{g} = \frac{R(R^2 + Rr + r^2)\,h\pi}{3} : \frac{h\,(R^2 + 2Rr + 3r^2)}{4(R^2 + Rr + r^2)}$$

$$= \frac{4R(R^2 + Rr + r^2)^2\pi}{3(R^2 + 2Rr + 3r^2)}$$

Dieser Ausdruck gilt auch für die abgestumpfte Pyramide, deren Axe normal auf der Grundfläche steht. Für diesen Fall ist R die Linie, welche von dem Punkte, in welchem die Grundfläche von der Axe getroffen wird, normal auf die Kante gefällt werden kann, um welche sie sich bei dem Umfallen dreht, und r ist eine der R homologe Linie in der obern Fläche.

Zusatz. Für $r = R$ wird $V = 2R^3\pi$, wodurch die Stabilität eines Cylinders ausgedrückt wird. Nimmt man $r = 0$, so wird $V = \frac{2}{3}R^3\pi$, und dieses ist also die Stabilität eines Kegels. Bei gleicher Höhe und Grundfläche verhält sich daher die Stabilität des Cylinders zu der des Kegels wie 3 : 2. Haben aber beide gleiches Gewicht, ist also das eigenthümliche Gewicht des Kegels dreimal so groß, als das des Cylinders, so wird das Verhältniß ihrer Stabilität = 1 : 2.

Aufgabe 6. In einem mit mehreren Gegenständen angefüllten Behältnisse wird die Stelle eines Theils des Gepäckes verändert; es soll angegeben werden, welchen Einfluß diese Ortsveränderung auf die Lage des Schwerpunktes des ganzen Behältnisses und auf die Stabilität desselben hat.

Auflösung. Setzt man das Gewicht des ganzen Gepäckes = A + B, und die ursprüngliche Lage des Schwer-

punktes von A in a, Fig. 62., von B in b, und nimmt an, daß B seine Lage so ändere, daß hierdurch der Schwerpunkt dieses Theils nach β verrückt wird, so muß bei der frühern Lage der gemeinschaftliche Schwerpunkt von A + B in der Linie ab, und bei der veränderten Lage in $\alpha\beta$ liegen, und es ist nun, wenn c und γ die beiden Lagen für den gemeinschaftlichen Schwerpunkt von A + B sind,

$$ac : cb = B : A$$

und auch $a\gamma : \gamma\beta = B : A$

also $ac : cb = a\gamma : \gamma\beta$

werden folglich die beiden Linien $b\beta$ und $c\gamma$ gezogen, so müssen dieselben parallel sein, und es geht hieraus hervor, daß der gemeinschaftliche Schwerpunkt seine Lage in einer Richtung ändert, welche dem Wege parallel ist, der von dem Schwerpunkte des Körpers B bei seiner Ortsveränderung zurückgelegt wird. Ist also β dem Horizonte näher als b, so muß auch γ dem Horizonte näher als c sein, und eben so muß, — wenn der Punkt der Grundfläche, über welchem β normal liegt, weiter von der Kante absteht als der, über welchem b sich befindet, — der Punkt, zu welchem γ gehört, ebenfalls weiter von derselben Kante abliegen, als der zu c gehörige Punkt der Grundfläche. Die Stabilität des ganzen Behältnisses wird also immer vergrößert, wenn man die Lage eines Theiles B des Gepäckes so ändert, daß die Stabilität dieses Theiles größer wird.

Zusatz. Es bestehe das ganze Gepäck aus A+B′+B″ und es sei der Schwerpunkt von A in a, von B′ in b, von B″ in β, und der gemeinschaftliche Schwerpunkt von B′ + B″ in m, so muß $bm < \beta m$ sein, wenn $B' > B''$ ist. Verwechseln nun B′ und B″ ihre Stellen, und man nimmt $\beta n = bm$, so muß der Schwerpunkt von B″ + B′ in n liegen, und es wird hierdurch der gemeinschaftliche Schwerpunkt von A + B′ + B″, wenn er früher in c′ war, durch die Verwechselung von B′ mit B″ nach γ' verrückt. Jetzt ist γ' dem Horizonte näher als c′, wenn β dem Horizonte näher ist als b. Hieraus geht also hervor, daß, wenn man aus dem Behältnisse einen leichteren Körper unten wegnimmt, und einen schwereren hinlegt, der früher eine höhere Lage

hatte, und jenem die Stelle von diesem giebt, die Stabilität des ganzen Behältnisses dadurch vermehrt wird. Daher ist es zweckmäßig, bei dem Zusammenpacken mehrerer Gegenstände die schwersten immer unten hinzubringen und denselben eine solche Lage zu geben, daß sie so weit als möglich von den Seiten der Grundfläche abliegen. Denn es wird jedenfalls nur alsdann an Stabilität gewonnen, wenn in der Formel $V = \frac{aP}{g}$ der Werth von g mehr als der von a abnimmt, oder umgekehrt a mehr wächst als g; dieses führt nun zu der folgenden Aufgabe.

Aufgabe 7. In einem Behältnisse, welches mehrere Körper enthält, deren gemeinschaftlicher Schwerpunkt in g ist, Fig. 63., wird von einigen dieser Körper die Lage so geändert, daß dadurch der gemeinschaftliche Schwerpunkt nach g' verrückt wird; es soll angegeben werden, auf welche Weise hierdurch die Stabilität des ganzen Behältnisses geändert wird.

Auflösung. Die Senkrechten von g und g' auf die Grundfläche treffen diese in a und a', und von der verlängerten gg' werde dieselbe in c geschnitten, so müssen die Punkte a, a' und c in einer geraden Linie liegen, welche eine solche Lage haben soll, daß sie die Kante mn des Behältnisses, in Beziehung auf welche die Stabilität untersucht werden soll, in d schneidet. Man ziehe von a und a' die Normalen ab und $a'b'$ auf mn, und setze $ga = g$, $ab = a$, $g'a' = g'$ und $a'b' = a'$, die ursprüngliche Stabilität $= V$, und die durch Verrückung des Schwerpunktes veränderte $= V'$, das ganze Gewicht des Behältnisses aber $= P$, so ist

$$V = \frac{aP}{g} \text{ und } V' = \frac{a'P}{g'}$$

ferner sei $ca' = c$, $cd = C$ und $a'a = \alpha$. Da nun

$ca' : ca = a'g' : ag$ und $da' : da = a'b' : ab$

so ist auch

$c : c + \alpha = g' : g$ und $C + c : C + c + \alpha = a' : a$

und hieraus folgt

$$g' = \frac{cg}{c + \alpha} \text{ und } a' = \frac{(C + c)a}{C + c + \alpha}$$

daher

daher ist $\frac{a'}{g'} = \frac{(C + c)(c + \alpha)a}{(C + c + \alpha)c \cdot g}$

und hiernach wird

$$V : V' = \frac{aP}{g} : \frac{a'P}{g'} = \frac{a}{g} : \frac{(C + c)(c + \alpha) \cdot a}{(C + c + \alpha)c \cdot g}$$

nämlich es ist

$$V : V' = (C + c + \alpha) \cdot c : (C + c)(c + \alpha)$$
$$= \frac{c}{c + \alpha} : \frac{C + c}{C + c + \alpha}$$

oder wird $(ca) = c + \alpha = \gamma$ gesetzt, so ist

$$V : V' = \frac{c}{\gamma} : \frac{c + C}{\gamma + C}$$

Nun ist aber $\frac{c + C}{\gamma + C} - \frac{c}{\gamma} = \frac{(\gamma - c)C}{\gamma(\gamma + C)} = \frac{\alpha C}{\gamma(\gamma + C)}$ positiv, so lange C einen positiven Werth hat, d. h. so lange cd und ca′ auf entgegengesetzten Seiten von c liegen, und es ist also unter diesen Bedingungen $\frac{c + C}{\gamma + C} > \frac{c}{\gamma}$, folglich auch $V' > V$.

Die Stabilität wird also durch die Verrückung des Schwerpunktes vergrößert, wenn die verlängerte gg′ die Grundfläche früher trifft, als die verlängerte aa′ die Kante, wenn also a′c < a′d. In dem umgekehrten Falle aber wird die Stabilität kleiner. Soll endlich $V = V'$ sein, soll nämlich die Stabilität nicht geändert werden, so muß sein

$$\frac{c}{\gamma} = \frac{c + C}{\gamma + C}$$

und dieses ist nur der Fall, wenn entweder $c = \gamma$ oder $C = 0$ ist, und weil $\gamma = c + \alpha$, so muß entweder $\alpha = 0$ oder $C = 0$ sein. Für $\alpha = 0$ liegt g′ in g, und es hat also keine Veränderung der Lage des Schwerpunktes statt gefunden, und für $C = 0$ wird $dc = 0$, es schneidet also die verlängerte gg′ die Grundfläche in der Kante mn. Dieses führt zu dem Resultate: Die Stabilität durch die Verrückung des Schwerpunktes wird größer, wenn c mit a auf derselben Seite der Kante mn liegt; liegen beide aber auf entgegengesetzten Seiten der Kante, so wird die Stabilität verringert.

Aufgabe 8. Es ist g, Fig. 64., der Schwerpunkt ei-

nes Körpers, die Senkrechte von g auf die Grundfläche trifft diese in a, und die Kante mn wird von der Normalen aus a in b getroffen. Auf g wirkt eine Kraft W in der Ebene der Fläche gab unter einem Neigungswinkel α gegen die Senkrechte ga; es soll der Werth von W so bestimmt werden, daß durch die Wirkung dieser Kraft die Stabilität des Körpers = 0 wird.

Auflösung. Die Kraft gw = W läßt sich in zwei unter einem rechten Winkel wirkende Kräfte zerlegen, von welchen die eine $gx = x = W\cos\alpha$ in ihrer Richtung mit ga zusammenfällt, und die andere $gz = z = W\sin\alpha$ parallel zu ab ist. Diese letztere giebt die der Stabilität gleiche Kraft, deren Moment für ga = g ist $g \cdot z = gW\sin\alpha$. Das Gewicht P des Körpers aber wird noch durch die in der Richtung der Schwere wirkende Kraft $x = W\cos\alpha$ vermehrt, wodurch für ab = a ein Moment entsteht $= a(P + W\cos\alpha)$ und soll nun den Bedingungen der Aufgabe Genüge geleistet werden, so muß die Gleichung statt finden

$$gW\sin\alpha = a(P + W\cos\alpha)$$

woraus folgt $W = \frac{aP}{g\sin\alpha - a\cos\alpha}$

Ist hier nun 1) $\alpha = 90^0$, so wird $\sin\alpha = 1$ und $\cos\alpha = 0$, also $W = \frac{aP}{g}$, wie es sein muß, wenn die Kraft parallel zur Grundfläche wirkt. 2) Für $\alpha = 0$ wird $\sin\alpha = 0$ und $\cos\alpha = 1$, also $W = -P$; die Kraft muß also dem Gewichte des Körpers gleich sein und nach einer der Schwere entgegengesetzten Richtung wirken. 3) Für $g\sin\alpha > a\cos\alpha$ erhält W einen positiven Werth; weil aber aus dieser Bedingung folgt $tg\alpha > \frac{a}{g}$ und $a : g = 1 : tg\varphi$, also $tg\varphi = \frac{a}{g}$ wenn man den Winkel, welchen bg mit ga bildet, $= \varphi$ setzt, so folgt $tg\alpha > tg\varphi$, also auch $\alpha > \varphi$. Soll daher W einen positiven Werth haben, so muß die Richtung dieser Kraft die erweiterte Grundfläche jenseits der Kante mn schneiden. 4) Ist $g\sin\alpha = a\cos\alpha$, so wird $W = \infty$, und es ist in diesem Falle $\alpha = \varphi$. Schneidet also die Richtung der Kraft W

die Grundfläche in der Kante mn, so kann durch dieselbe die Stabilität gar nicht aufgehoben werden ꝛc.

Aufgabe 9. Die Curve mub, Fig. 55., dreht sich um die Axe ma; es soll die allgemeine Formel für die Stabilität des hierdurch erzeugten Körpers angegeben werden.

Auflösung. Es sei a der Anfangspunkt der Abscissen, die zu a gehörige Ordinate ab = R, ax = x, xz = y, und die Abhängigkeit der Coordinaten x und y von einander durch eine gegebene Gleichung bestimmt; g sei der Schwerpunkt des Körpers: so wird der Werth von ag = g durch die Gleichung ausgedrückt

$$g = \frac{\int xy^2dx}{\int y^2dx}$$

nach §. 35. Ferner ist a=R, und wenn die Kubikeinheit des Körpers zugleich als Gewichtseinheit angenommen wird, so ist $P = \pi\int y^2dx$, und daher

$$V = \frac{aP}{g} = R\pi\int y^2dx : \frac{\int xy^2dx}{\int y^2dx}$$
$$= \frac{R\pi[\int y^2dx]^2}{\int xy^2dx} = \frac{R[\pi\int y^2dx]^2}{\pi\int xy^2dx}$$

Es ist aber $\pi\int y^2dx = P$ und $\pi\int xy^2dx = S$ die Summe aller Momente des Körpers, folglich ist auch

$$V = \frac{aP^2}{S}$$

Die Stabilität eines Körpers wird also gefunden, wenn man das Quadrat seines Gewichts mit R multiplicirt und das Produkt durch die Summe der Momente theilt.

Zusatz 1. Die hier zuletzt aufgestellte Regel läßt sich auch unmittelbar aus der Gleichung $V = \frac{aP}{g}$ ableiten; denn da $g = \frac{S}{P}$, so folgt, daß auch sein muß

$$V = aP : \frac{S}{P} = \frac{aP^2}{S}$$

Zusatz 2. Es sei, Fig. 63., g der Schwerpunkt des Körpers A, und g′ der von B, die Lage dieser Schwerpunkte sei in Beziehung auf die Axe mn bestimmt durch die Coordinaten ga = g, ab = a, g′a′ = g′ und a′b′ = a′, und die

Coordinaten für den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt von A und B ſeien γ und α, ſo iſt die Stabilität von A + B

$$V = \frac{\alpha(A + B)}{\gamma}$$

Es iſt aber $\gamma = \frac{gA + g'B}{A + B}$ und $\alpha = \frac{aA + a'B}{A + B}$

folglich iſt auch $V = \frac{(aA + a'B)(A + B)}{gA + g'B}$

und hieraus folgt für $a = a'$ enfalls $V = \frac{a(A + B)^2}{S}$

Zuſatz 3. Setzt man die Summe der Momente $aA + a'B = S(a)$, und die Summe der Momente $gA + g'B = S(g)$, ſo iſt ganz allgemein

$$V = \frac{(A + B)\ S(a)}{S(g)}$$

wodurch die Stabilität eines aus zwei Theilen beſtehenden Körpers berechnet werden kann, und es iſt leicht einzuſehen, daß dieſe Formel auch für den Fall Gültigkeit hat, wenn ei Körper aus mehr als zwei Theilen beſteht.

Anmerkung. Bei allen hier gelöſten Aufgaben wurde der Inhalt des Körpers für das Gewicht deſſelben genommen, und es iſt daher V dem Gewichte eines Körpers gleich, deſſen Inhalt $= \frac{aP}{g}$ und deſſen Maſſe der des Körpers P gleichartig iſt. Soll V direct durch Gewichte ausgedrückt werden, ſo muß, — wenn K den Kubikinhalt des Körpers bedeutet, das ſpecifiſche Gewicht dieſes Körpers $= p$ iſt, und das Gewicht der Kubikeinheit $= M$ geſetzt wird, — der Werth von V durch die Formel ausgedrückt werden

$$V = \frac{aK}{g} \cdot pM$$

und es iſt nun eigentlich $KpM = P$ das wirkliche Gewicht des Körpers.

Vierter Abſchnitt.

Erläuterungen und Uebungen über verſchiedene noch zur Statik der feſten Körper gehörige Gegenſtände.

§. 42.

Die geneigte Ebene.

1. Jede Ebene, welche gegen den Horizont geneigt iſt, iſt eine ſchiefe oder geneigte Ebene, und der Winkel, unter welchem dieſelbe den Horizont ſchneidet, iſt der Neigungswinkel gegen den Horizont. Dieſer Winkel wird zwar immer $>0°$ und $<90°$ vorausgeſetzt, doch gelten die für die geneigte Ebene abgeleiteten Formeln auch für einen Winkel $= 0°$ oder $= 90°$, alſo auch für horizontale und vertikale Ebenen.

2. Iſt abcd, Fig. 65., eine horizontale Ebene und wird ſie von einer andern $\alpha\beta$cd in der Linie cd geſchnitten, ſo bildet dieſe letztere eine geneigte Ebene. Zieht man nun in der horizontalen Ebene ab parallel zu cd und errichtet über ab eine Vertikalebene, welche die geneigte Ebene in $\alpha\beta$ ſchneidet, ſo iſt $\alpha\beta$ parallel zu ab und zu cd.

3. Iſt nun $\angle$bcd $= 90°$ und durch bc ebenfalls eine Vertikalebene gelegt, welche die geneigte in cβ und die ab$\beta\alpha$ in bβ ſchneidet, ſo iſt bcβ der Neigungswinkel der ſchiefen Ebene gegen den Horizont und ſoll mit β bezeichnet werden; bβc aber iſt der Neigungswinkel gegen die Vertikale und ſoll mit α bezeichnet werden.

4. Die Linie βc iſt die Länge $= l$, bc die Grundlinie $= g$ und b$\beta = h$ die Höhe der geneigten Ebene. Die Linien und die Winkel α und β hängen immer ſo von einander ab, wie dieſes überhaupt bei den einzelnen Theilen eines rechtwinkligen Dreiecks der Fall iſt.

5. Die Richtungen der Kräfte, welche auf einen Gegenſtand wirken, der auf einer geneigten Ebene liegt, werden, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird, immer ſo angenommen, daß ſie in einer vertikalen Ebene liegen, welche der bcβ parallel iſt, alſo in einer Ebene, welche ſenk-

recht auf dem Horizonte ist, und die Durchschnittslinie cd unter einem rechten Winkel schneidet.

6. Liegt ein Körper auf einer geneigten Ebene und wird durch den Schwerpunkt g desselben eine Vertikalebene parallel zu bcβ gelegt, welche, Fig. 66., durch abc dargestellt wird, so ist $\angle b = \beta$ und $\angle a = \alpha$, und weil jeder Körper senkrecht gegen den Horizont fällt, so ist, wenn man gP parallel zu ac zieht, diese Linie die Richtung der Schwere. Fällt man nun von g die Normale gy auf ab und vollendet das Rechteck gypx, so ist, wenn gp = P das Gewicht des Körpers darstellt, dieses Gewicht äquipollent den Kräften gy = y normal gegen die geneigte Ebene und gx = x parallel zu derselben. Da nun jedenfalls gy $<$ gp, also y $<$ P, so ist immer der durch die Schwere eines Körpers entstehende **normale Druck** auf die geneigte Ebene kleiner, als das Gewicht desselben, und diesem normalen Drucke widersteht die geneigte Ebene, indem sie als hinlänglich fest vorausgesetzt wird. Die Kraft gx = x aber wird, da sie parallel zu ab ist, durch nichts beschränkt und äußert sich daher durch eine wirkliche Bewegung des Körpers. Diese Kraft nennt man das **relative Gewicht** des Körpers auf der geneigten Ebene. Hieraus geht also hervor, daß ein Körper auf der geneigten Ebene mit seinem relativen Gewichte sich wirklich bewegt, wenn das Gleichgewicht nicht durch eine äußere Kraft hergestellt wird.

7. Die Größe des normalen Druckes = y sowohl, als des relativen Gewichtes = x, welches die bewegende Kraft des Körpers bildet, ist von dem Neigungswinkel der Ebene und von dem Gewichte P des Körpers abhängig, und es lassen sich die Formeln für diese Abhängigkeit leicht auf folgende Art ableiten:

Da Δgpy ähnlich ist Δbac, so ist auch $\angle$gpy = $\angle$a = α und daher

$$gp : gy = 1 : \sin\alpha \text{ und } gp : gx = 1 : \cos\alpha$$

nämlich es ist

$$P : y = 1 : \sin\alpha \text{ und } P : x = 1 : \cos\alpha$$

$$\text{also } y = P \sin\alpha \text{ und } x = P \cos\alpha$$

8. Für $\alpha = 90^0$ wird die Ebene horizontal und es ist alsdann y = P und x = 0. Auf der horizontalen Ebene

ist also der normale Druck des Körpers seinem ganzen Gewichte gleich und die bewegende Kraft = 0. Dagegen ist für $\alpha = 0$ die Ebene vertikal, es wird $y = 0$ und $x = P$, und in diesem Falle ist also der Druck = 0 und das relative Gewicht der ganzen Schwere des Körpers gleich.

§. 43.

Aufgabe.

Auf den Schwerpunkt g eines auf der geneigten Ebene, Fig. 67., liegenden Körpers wirkt eine Kraft X nach der Richtung Xg, wodurch Gleichgewicht erzeugt wird; es sollen die Bedingungsgleichungen angegeben werden.

Auflösung. Wirkt die Kraft X parallel zu bc, so muß $X = x$ sein und der normale Druck auf die geneigte Ebene ist $= y$; die Bedingungsgleichungen sind also in diesem Falle, nach §. 42. No. 7.,

$$X = P \cos \alpha \text{ und } Y = P \sin \alpha$$

Um aber für alle Fälle geltende Gleichungen zu erhalten, darf diese besondere Bestimmung nicht vorausgesetzt werden, und man nehme daher an, daß die Richtung der Kraft X die Vertikale ca unter einem Winkel $= \gamma$ schneide, so ist, wenn γ nicht $= \alpha$ sein soll, nicht nur X verschieden von x, sondern es ist auch der normale Druck Y von y verschieden, weil alsdann auch durch X ein Druck gegen ab erzeugt wird. Die Werthe von X und Y lassen sich nun auf folgende Art bestimmen:

Man ziehe gP senkrecht auf cb, so ist diese Linie die Richtung des Druckes P des Körpers, dessen Schwerpunkt g sein soll, und zerlegt man die Kraft $P = gp$ in die Seitenkräfte $gY = Y$ normal auf ab und $gX = X$ in einer Richtung, welche mit der das Gleichgewicht herstellenden Kraft X zusammenfällt, so ist durch das Parallelogramm gYpX die Abhängigkeit der Kräfte X und Y von P bestimmt, nämlich es ist

$$gp : gX = \sin(gYp) : \sin(Ygp)$$

$$\text{und } gp : gY = \sin(gYp) : \sin(gpY)$$

Es ist aber $\angle gYp = \angle YgV = PgV - PgY = (180° - \gamma) - \beta$

$$= (180° - \gamma) - (90° - \alpha) = 90° - \gamma + \alpha$$

und daher

$\sin(gYp) = \sin[90^0 - (\gamma - \alpha)] = \cos(\gamma - \alpha) = \cos(\alpha - \gamma)$

$\angle Ygp = \beta = 90^0 - \alpha$, alſo $\sin(Ygp) = \cos\alpha$

und $\angle gpY = \gamma$, folglich iſt auch

$gp : gX = \cos(\gamma - \alpha) : \cos\alpha$ und $gp : gY = \cos(\gamma - \alpha) : \sin\gamma$

nämlich es iſt

$P : X = \cos(\gamma - \alpha) : \cos\alpha$ und $P : Y = \cos(\gamma - \alpha) : \sin\gamma$

und hieraus erhält man

$$X = \frac{P\cos\alpha}{\cos(\gamma - \alpha)} \text{ und } Y = \frac{P\sin\gamma}{\cos(\gamma - \alpha)}$$

als die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht; hier iſt X die Größe der zu dem Gleichgewicht erforderlichen Kraft und Y der normale Druck, welchen die geneigte Ebene abzuhalten hat.

Zuſatz 1. Eytelwein findet (§. 192. No. IV., in dem Handbuche der Statik feſter Körper) den normalen Druck

$$Y = P\,[\sin\alpha + \cos\alpha\,\mathrm{tg}\,(\gamma - \alpha)]$$

es läßt ſich dieſer Ausdruck aber leicht auf die obige einfachere Form zurückführen, denn es iſt ſonach auch,

$$Y = P\left[\sin\alpha + \frac{\cos\alpha\sin(\gamma - \alpha)}{\cos(\gamma - \alpha)}\right]$$

$$= P\left[\frac{\sin\alpha\cos(\gamma - \alpha) + \cos\alpha\sin(\gamma - \alpha)}{\cos(\gamma - \alpha)}\right] = \frac{P\sin(\alpha + \gamma - \alpha)}{\cos(\gamma - \alpha)}$$

$$\text{und daher endlich } Y = \frac{P\sin\gamma}{\cos(\gamma - \alpha)}$$

Zuſatz 2. Aus den gefundenen allgemeinen Formeln laſſen ſich nun für die einzelnen Fälle die entſprechenden beſonderen Formeln leicht ableiten. Es ſei

1) $\gamma = \alpha$, alſo XV parallel zu ba, ſo wird

$$\cos(\gamma - \alpha) = \cos 0^0 = 1$$

und daher $X = P\cos\alpha$ und $Y = P\sin\alpha$

Es iſt aber in dem normalen Durchſchnitte abc

$ab : ac = 1 : \cos\alpha$ und $ab : bc = 1 : \sin\alpha$

und daher $l : h = 1 : \cos\alpha$ und $l : g = 1 : \sin\alpha$

folglich iſt auch

$$P : X = l : h \text{ und } P : Y = l : g$$

Wirkt alſo die Kraft, durch welche das Gleichgewicht hergeſtellt wird, parallel zu der geneigten Ebene, ſo verhält ſich das

Gewicht des Körpers zu der zum Gleichgewicht erforderlichen Kraft, wie die Länge der Ebene zu ihrer Höhe, und das Gewicht des Körpers zu dem normalen Druck auf die geneigte Ebene verhält sich, wie die Länge der Ebene zu ihrer Grundlinie.

2) Ist $\gamma = 90°$, die Richtung der Kraft X also parallel zu der Grundfläche, so wird $\sin \gamma = 1$ und $\cos(\gamma - \alpha) = \sin \alpha$ und daher ist alsdann

$$X = \frac{P \cos \alpha}{\sin \alpha} = P \cot \alpha \text{ und } Y = P$$

weil aber $bc : ca = 1 : \cot \alpha$

also $g : h = 1 : \cot \alpha$

so ist auch $P : X = g : h$

Wenn also die Kraft parallel zu der Grundfläche der geneigten Ebene wirkt, so verhält sich das Gewicht des Körpers zu der zum Gleichgewicht erforderlichen Kraft, wie die Grundlinie der geneigten Ebene zu ihrer Höhe. Der Druck aber, den in diesem Falle die geneigte Ebene abzuhalten hat, ist dem ganzen Gewichte des Körpers gleich.

3) Soll $X = P$ werden, soll also bei einem auf einer geneigten Ebene liegenden Körper die zu dem Gleichgewicht erforderliche Kraft dem Gewichte des Körpers gleich sein, so muß in der Formel

$$X = \frac{P \cos \alpha}{\cos(\gamma - \alpha)}$$

$\cos \alpha = \cos(\gamma - \alpha)$ werden, also $\alpha = \gamma - \alpha$ und daher $\gamma = 2\alpha$ und es ist alsdann $Y = \frac{P \sin \gamma}{\cos(\gamma - \alpha)} = \frac{P \sin 2\alpha}{\cos \alpha} = 2P \sin \alpha$

Ist nun $\alpha = 30°$, so wird auch $Y = P$, und es ist daher für $\gamma = 60°$

$$X = Y = P.$$

4) Aus den beiden Bedingungsgleichungen folgt unmittelbar

$$\frac{P}{\cos(\gamma - \alpha)} = \frac{X}{\cos \alpha} = \frac{Y}{\sin \gamma}$$

und es ist daher $X \sin \gamma = Y \cos \alpha$

durch bestimmt ist, wie die zu dem Gleichgewicht erforderte Kraft X und der normale Druck Y von einander abhängen, wenn die Winkel α und γ gegeben sind.

Zuſatz 3. Die fünf Größen P, X, Y, α und γ h
gen ſo von einander ab, daß je zwei derſelben ſich berech
laſſen, wenn die drei übrigen gegeben ſind, und die beid
hierzu erforderlichen Gleichungen laſſen ſich durch folgende e
fache Formeln ausdrücken:

Es iſt, nach Zuſatz 2. No. 4., die eine Gleichung

$$\text{I.}\quad X \sin\gamma = Y \cos\alpha$$

Da nun, nach §. 43.,

$$Y = \frac{P \sin\gamma}{\cos(\gamma - \alpha)}$$

$$\text{ſo iſt auch } \cos(\gamma - \alpha) = \frac{P \sin\gamma}{Y}$$

$$\text{oder } \cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha = \frac{P \sin\gamma}{Y}$$

und da, nach I., $\cos\alpha = \frac{X \sin\gamma}{Y}$, ſo iſt auch, wenn ma
dieſen Werth ſetzt,

$$\cos\gamma \cdot \frac{X \sin\gamma}{Y} + \sin\gamma\sin\alpha = \frac{P \sin\gamma}{Y}$$

und hieraus erhält man die zweite Gleichung

$$\text{II.}\quad X\cos\gamma + Y\sin\alpha = P$$

Mit Hülfe dieſer beiden Gleichungen können alle hier vorkon
menden Aufgaben gelöſt werden. Soll z. B. beſtimmt we
den, wie die beiden Winkel α und γ von den drei Kräft
P, X und Y abhängen, ſo wird die Reduction auf folgen
Art vorgenommen: Es iſt nach Formel II.

$$Y\sin\alpha = P - X\cos\gamma$$

$$\text{alſo } Y^2\sin^2\alpha = (P - X\cos\gamma)^2$$

$$\text{und nach I. iſt } Y^2\cos^2\alpha = X^2\sin^2\gamma$$

Werden nun dieſe beiden Gleichungen addirt, ſo erhält man

$$Y^2 = X^2\sin^2\gamma + (P - X\cos\gamma)^2$$

$$= X^2\sin^2\gamma + P^2 - 2PX\cos\gamma + X^2\cos^2\gamma$$

nämlich es iſt

$$Y^2 = X^2 + P^2 - 2PX\cos\gamma$$

und hieraus erhält man

$$\cos\gamma = \frac{X^2 + P^2 - Y^2}{2PX}$$

Ferner iſt, nach Formel II., $Y\sin\alpha = P - X\cos\gamma$

und daher auch $Y \sin \alpha = P - \frac{X^2 + P^2 - Y^2}{2P}$

$$= \frac{P^2 + Y^2 - X^2}{2P}$$

$$\text{also } \sin \alpha = \frac{P^2 + Y^2 - X^2}{2PY}$$

Die hier gefundenen Werthe für die Winkel γ und α hätten auch unmittelbar aus dem Dreieck gpY, Fig. 67., abgeleitet werden können.

§. 44.

Aufgabe.

Auf einen Punkt m eines Körpers, welcher die geneigte Ebene abc, Fig. 68., in dem Punkte n berührt, wirkt eine Kraft in der Richtung xV, welche mit dem Punkte n und dem Schwerpunkte des Körpers in derselben Vertikalebene parallel zu bcβ, Fig. 65., liegt; es sollen die Bedingungen für das Gleichgewicht angegeben werden.

Auflösung. Die Normale in P auf bc, Fig. 68., gehe durch den Schwerpunkt des Körpers und treffe die Richtung der Kraft xV in m, und es sei der Winkel, welchen die Linie mn mit mP bildet, $= \delta$, so kann das ganze Gewicht des Körpers $= P$ als in dem Punkte m in der Richtung mP wirkend angesehen werden, und nimmt man $mp = P$ und vollendet das Parallelogramm mxpw, setzt $mx = X$ und $mw = W$, so ist

$$mp : mx = \sin (mxp) : \sin (mpx)$$
$$mp : mw = \sin (mwp) : \sin (mpw)$$

Es ist aber $\angle mxp = \angle mwp = 180^0 - (\gamma + \delta)$

$$\angle mpx = \delta \text{ und } \angle mpw = \gamma$$

daher werden die obigen Proportionen

$$P : X = \sin (\gamma + \delta) : \sin \delta$$
$$\text{und } P : W = \sin (\gamma + \delta) : \sin \gamma$$

folglich ist I. $X = \frac{P \sin \delta}{\sin (\gamma + \delta)}$ und $W = \frac{P \sin \gamma}{\sin (\gamma + \delta)}$

Die letztere Kraft wirkt in der Richtung mn, und da die geneigte Ebene nur normal widersteht, so muß diese Kraft zerlegt werden in die Kraft $ny = Y$ normal auf ab und in die Kraft

nz = Z parallel zu der geneigten Ebene; für nv = W ist daher ny = Y und nz = Z, und wenn man ∠znv = φ setzt, so wird

$$W : Y = 1 : \sin\varphi \text{ und } W : Z = 1 : \cos\varphi$$

also ist $Y = W \sin\varphi$ und $Z = W \cos\varphi$.

Nun ist $\varphi = \angle mnq = 180° - (\alpha + \delta)$ und daher $\sin\varphi = \sin(\alpha + \delta)$ und $\cos\varphi = -\cos(\alpha + \delta)$ folglich ist, wenn man zugleich für W den oben gefundenen Werth setzt,

II. $Y = \frac{P \sin\gamma \sin(\alpha+\delta)}{\sin(\gamma+\delta)}$ und III. $Z = -\frac{P \sin\gamma \cos(\alpha+\delta)}{\sin(\gamma+\delta)}$

Diese drei Ausdrücke für X, Y und Z enthalten die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht, und es ist hierbei X die Größe der Kraft, welche an m in der Richtung mV wirken muß, Y ist der normale Druck, welchen die geneigte Ebene erleidet, und Z die Kraft, mit welcher der die geneigte Ebene in n berührende Körper auszugleiten sucht.

Zusatz 1. Berührt ein Körper die geneigte Ebene in einem Punkte n, wo eine Kraft = Z das Ausgleiten verhindert; wird in m das Gleichgewicht durch eine Kraft = X hergestellt, und liegen die Punkte m und n mit dem Schwerpunkte des Körpers in derselben Ebene, in welcher auch die Richtungen der Kräfte Z und X liegen, so sind die Gleichungen für das Gleichgewicht

I. $X = \frac{P \sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}$ und es muß X in der Richtung xV wirken.

II. $Y = \frac{P \sin\gamma \sin(\alpha+\delta)}{\sin(\gamma+\delta)}$ der Widerstand, welchen die geneigte Ebene an dem Punkte n normal in der Richtung yn leistet.

III. $Z = \frac{P \sin\gamma \cos(\alpha+\delta)}{\sin(\gamma+\delta)}$ die Kraft, durch welche das Hinabgleiten des Körpers verhindert wird und die in der Richtung nz widersteht.

Eine genauere Betrachtung dieser Formeln giebt die Bedingungen zu erkennen, unter welchen die hier angegebenen Richtungen sich ändern, was natürlich nur alsdann der Fall sein

nn, wenn die entsprechenden Ausdrücke negativ werden.

Zusatz 2. Eine nähere Betrachtung der gefundenen For-
ln führt in Beziehung auf ihre besonderen Werthe zu fol-
nden Resultaten:

1) Die Formel $X = \frac{P \sin \delta}{\sin (\gamma + \delta)}$ giebt für X nur
dann einen negativen Werth, wenn entweder δ negativ
er $\gamma - \delta > 180°$ ist. Der Werth von δ aber ist positiv,
lange n zwischen q und a liegt, und es wird $\delta = 0$, wenn
mit q zusammenfällt, alsdann ist auch $X = 0$. Liegt aber
zwischen q und b, so wird δ und somit auch X negativ,
d es muß alsdann X an m in der Richtung Vx ange-
acht werden.

Der Werth von $\gamma + \delta$ kann nur alsdann $> 180°$ sein,
nn die Richtung xV der Kraft X die Linie ab zwischen n
d q schneidet, und es wird auch alsdann X negativ. Nun
n zwar außerdem auch $\sin (\gamma + \delta)$ dadurch einen nega-
en Werth erhalten, daß δ negativ und größer als γ ist;
diesem Falle bleibt aber X positiv, weil alsdann die For-
l zwei negative Factoren $\sin \delta$ und $\sin (\gamma + \delta)$ enthält.

2) Die Formel $Z = \frac{P \sin \gamma \cos (\alpha + \delta)}{\sin (\gamma + \delta)}$ giebt für Z
en positiven Werth in der Richtung nZ, so lange $\alpha + \delta < 90°$
d $\gamma + \delta < 180°$ ist. Für $\alpha + \delta = 90°$ wird $Z = 0$
d dieses ist der Fall, wenn mn normal auf ab steht.
fft nun die Normale von m die ab in dem Punkte r,
ist $\alpha + \delta < 90°$, wenn n zwischen r und b liegt, oder
ist $\alpha + \delta > 90°$, wenn n zwischen r und a liegt; in dem
en Falle muß Z in der Richtung na und in dem an-
n in der Richtung nb angebracht werden, wenn zugleich
$+ \delta < 180°$ ist. Der Einfluß auf die Richtung von Z für
en negativen Werth von $\sin (\gamma + \delta)$ läßt sich leicht beur-
ilen. Ist nämlich δ negativ, so muß immer $\alpha > \delta$ sein,
d es kann daher, wenn $\sin (\gamma + \delta)$ negativ wird, für
en negativen Werth von δ nicht zugleich auch $\cos (\alpha + \delta)$
ativ sein ꝛc.

3) Der Werth von $Y = \frac{P \sin \gamma \sin (\alpha + \delta)}{\sin (\gamma + \delta)}$ wird $= 0$,

wenn $\gamma = 0$, also mV parallel zu ca ist und sonach X gerade der Schwere entgegenwirkt, und es ist alsdann auch $Z = 0$ und $X = P$.

4) Die Abhängigkeit der Größe der einzelnen Kräfte von den Werthen der Winkel α, γ und δ ergiebt sich wie folgt:

a) Ist $\gamma = 0$, so wird $X = P$, $Z = 0$ und $Y = 0$.

b) Ist $\gamma = 90°$, also die Richtung von X parallel zu der Grundlinie der geneigten Ebene, so wird

$$X = P \operatorname{tg} \delta,\ Y = \frac{P \sin(\alpha + \delta)}{\cos \delta} \text{ und } Z = \frac{P \cos(\alpha + \delta)}{\cos \delta}$$

c) Für $\gamma = \alpha$, also X parallel zu ba, wird

$$X = \frac{P \sin \delta}{\sin(\alpha + \delta)},\ Y = P \sin \alpha \text{ und } Z = \frac{P \sin \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \delta)}$$

d) Für $\delta = 0$ wird

$$X = 0,\ Y = P \sin \alpha \text{ und } Z = P \cos \alpha$$

e) Für $\delta = 90°$ erhält man

$$X = \frac{P}{\cos \gamma},\ Y = \frac{P \cos \alpha}{\cot \gamma} \text{ und } Z = -\frac{P \sin \alpha}{\cot \gamma}$$

f) Für $\alpha + \delta = 90°$ ist

$$X = \frac{P \cos \alpha}{\cos(\alpha - \gamma)},\ Y = \frac{P \sin \gamma}{\cos(\alpha - \gamma)} \text{ und } Z = 0$$

u. s. w.

Zusatz 3. Durch die drei gefundenen Bedingungsgleichungen lassen sich, wenn von den sieben Größen, P, X, Y, Z, α, γ und δ, vier gegeben sind, die drei übrigen durch Rechnung finden; um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, nehme man an, daß die vier Kräfte gegeben sind: es sollen die entsprechenden Werthe der drei Winkel gefunden werden.

Auflösung.

$$\text{Da } Y = \frac{P \sin \gamma \sin(\alpha + \delta)}{\sin(\gamma + \delta)} \text{ und } Z = \frac{P \sin \gamma \cos(\alpha + \delta)}{\sin(\gamma + \delta)}$$

$$\text{so ist } Y : Z = \sin(\alpha + \delta) : \cos(\alpha + \delta)$$

$$\text{und es ist daher } \operatorname{tg}(\alpha + \delta) = \frac{Y}{Z}$$

weil aber ganz allgemein

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}} \text{ und } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}}$$

so ist nun auch

$$\sin(\alpha+\delta) = \frac{Y}{V(Z^2+Y^2)} \text{ und } \cos(\alpha+\delta) = \frac{Z}{V(Z^2+Y^2)}$$

wofür man einstweilen zur Abkürzung setzen kann

$$\sin(\alpha+\delta) = M \text{ und } \cos(\alpha+\delta) = N$$

Nun ist $X = \frac{P \sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}$ und $Y = \frac{PM \sin\gamma}{\sin(\gamma+\delta)}$

und daher $X : Y = \sin\delta : M \sin\gamma$

folglich ist $\sin\delta = \frac{XM \sin\gamma}{Y}$

Aus der Gleichung $X = \frac{P \sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}$

folgt $X \sin(\gamma+\delta) = P \sin\delta$

und es ist daher

$$X \sin\gamma \cos\delta = (P - X\cos\gamma)\sin\delta$$

nämlich es ist, wenn hier für $\sin\delta$ der Werth gesetzt wird,

$$X \sin\gamma \cos\delta = (P - X\cos\gamma) \cdot \frac{XM \sin\gamma}{Y}$$

und sonach ist $Y \cos\delta = (P - X\cos\gamma) M$

also wird $Y^2\cos^2\delta = (P - X\cos\gamma)^2 M^2 = Y^2(1 - \sin^2\delta)$

und $Y^2\left[1 - \frac{X^2M^2\sin^2\gamma}{Y^2}\right] = (P - X\cos\gamma)^2 M^2$

hiernach ist nun auch

$$Y^2 - X^2M^2\sin^2\gamma = P^2M^2 - 2M^2PX\cos\gamma + X^2M^2\cos^2\gamma$$

und daher $2M^2PX\cos\gamma = P^2M^2 + X^2M^2 - Y^2$

folglich wird $\cos\gamma = \frac{P^2+X^2}{2PX} - \frac{1}{2PX} \cdot \frac{Y^2}{M^2}$

$$= \frac{P^2+X^2}{2PX} - \frac{Z^2+Y^2}{2PX}$$

nämlich es ist $\cos\gamma = \frac{(P^2+X^2)-(Z^2+Y^2)}{2PX}$

wodurch der Winkel γ vollkommen bestimmt ist.

Man kann übrigens diesen Werth von γ auch unmittelbar aus der Figur ableiten: denn es ist in dem Dreieck mpw, Fig. 68., $\angle mpw = \gamma$ und daher ist

$$\cos\gamma = \frac{(mp)^2 + (pw)^2 - (mw)^2}{2(mp)(pw)} = \frac{P^2+X^2-W^2}{2PX}$$

und weil $W^2 = (nz)^2 + (zv)^2 = Z^2 + Y^2$, ſo iſt

$$\cos\gamma = \frac{(P^2 + X^2) - (Z^2 + Y^2)}{2PX}$$

Eben ſo findet man $\cos\delta = \frac{Z^2 + {}^2Y + P^2 - X^2}{2P\sqrt{(Z^2 + Y^2)}}$

u. ſ. w. u. ſ. w.

§. 45.

Die Stabilität eines Körpers auf der geneigten Ebene.

Ein Körper, welcher einer horizontalen Ebene feſtſteht, erhält, wenn man dieſe Ebene neigt, nicht nur ein Beſtreben hinabzugleiten, ſondern außerdem auch ein Beſtreben herabwärts umzuſchlagen: ſeine Stabilität wird alſo auf dieſer Seite geringer, während ſie nach der entgegengeſetzten Seite zunimmt. Die Größe der Stabilität eines Körpers auf der geneigten Ebene läßt ſich auf folgende Art beſtimmen:

Es ſei, Fig. 66., g der Schwerpunkt eines Körpers, deſſen Gewicht = P ſein ſoll, gP ſei die Richtung der Schwere, m ein Punkt der Seitenkante des Körpers, welche hier parallel zu der Durchſchnittslinie der geneigten Ebene mit dem Horizonte vorausgeſetzt wird, und es ſei der Körper durch eine bei m angebrachte Widerlage verhindert hinabzugleiten: ſo kann nur durch das Umſchlagen deſſelben, wobei er ſich um m dreht, eine Bewegung erfolgen. Die zu dieſer Bewegung erforderliche, auf g parallel zu ab wirkende Kraft ſei = V, ſo wirken auf g zwei Kräfte, nämlich V und $gx = X = P\cos\alpha$, und wenn gx verlängert, die Normale von m auf ab in n trifft, ſo iſt mn der Hebelarm, an welchem V + X wirkt. Dagegen wirkt $gy = Y = P\sin\alpha$ an einem Hebelarm = my, und es muß daher, wenn die Kräfte unter ſich im Gleichgewichte ſein ſollen, die Gleichung ſtattfinden

$$(mn)\,[V + X] = (my) \cdot Y$$

Für $mn = gy = h$ und $ym = a$ iſt alſo

$$h\,[V + P\cos\alpha] = aP\sin\alpha$$

und hieraus folgt $V = \frac{P\,[a\sin\alpha - h\cos\alpha]}{h}$

und daher auch $V = \frac{P\sin\alpha}{h}\,[a - h\cot\alpha]$

Es ist aber $py : yg = 1 : tg\ \alpha$ oder für $py = b$

$$b : h = 1 : tg\ \alpha$$

$$\text{und daher } h = b\ tg\ \alpha = \frac{b}{\cot\ \alpha}$$

$$\text{folglich ist auch } V = \frac{P \sin \alpha}{h}(a - b) = \left(\frac{pm}{gy}\right) \cdot P \sin \alpha$$

ie Stabilität auf der geneigten Ebene ist also direct pro-rtionirt der Linie mp, also dem Abstande der Kante von dem unkte, in welchem die Richtung der Schwere die geneigte bene trifft, und indirect der Linie gy, also der Höhe des chwerpunktes über der geneigten Ebene.

Aus der allgemeinen Formel $V = \frac{(a - b)\ P \sin \alpha}{h}$

lgt übrigens $\sin \alpha = \frac{hV}{(a - b)\ P}$ der Neigungswinkel, wel-em eine bestimmte Stabilität entspricht.

Soll $V = 0$ sein, die Ebene also eine solche Neigung ha-n, daß der Körper von selbst umfällt, so muß

$(a - b)\ P \sin \alpha = 0$, also $a - b = 0$ und $a = b$

in, es muß also p mit m zusammenfallen, wie sich von selbst rsteht, indem alsdann die Richtung der Schwere durch die ante des Körpers geht. Der entsprechende Werth von α giebt sich aus der Proportion

$$py : yg = 1 : tg\ \alpha, \text{ also } a : h = 1 : tg\ \alpha$$

$$\text{und daher } tg\ \alpha = \frac{h}{a}$$

Beispiele.

1. Wie groß muß der Neigungswinkel α einer geneigten bene gegen die vertikale sein, wenn ein auf derselben stehen-r normaler Kegel, dessen Höhe $= H$ ist und der einen Ra-us $= R$ hat, von selbst umfallen soll?

Bei einem Kegel ist $yp = a = R$, und $gy = h = \frac{1}{4}H$

$$\text{also wird } tg\ \alpha = \frac{H}{4R} \text{ und wenn } H = 2R, \text{ so wird}$$

$$tg\ \alpha = \tfrac{1}{2} \text{ und also } \alpha = 26^\circ\ 33'\ 55''$$

2. Bei welchem Neigungswinkel einer geneigten Ebene lägt eine Halbkugel um?

Bei dieſer iſt $h = \frac{3}{5}R$ und $a = R$, alſo

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{8} = 0{,}375$ und daher $\alpha = 20^\circ\, 33' 22''$

mithin der Neigungswinkel gegen den Horizont $\beta = 69^\circ\, 26' 38''$

3. Für einen Cylinder, deſſen Höhe dem Durchmeſſer der Grundfläche gleich iſt, wird $h = \frac{1}{2}H = R$ und $a = R$, alſo

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 \text{ und } \alpha = 45^\circ.$$

4. Liegt ein dreiſeitiges Prisma ſo, daß die Seitenkanten deſſelben parallel ſind zu der Durchſchnittslinie der geneigten Ebene mit dem Horizonte, und iſt der Querſchnitt von dieſem Prisma ein gleichſeitiges Dreieck, ſo iſt, wenn die Seite dieſes Dreiecks $= A$ geſetzt wird, $a = \frac{1}{2}A$ und $h = \frac{1}{3}H = \frac{1}{3} \cdot \frac{A}{2}\sqrt{3}$ und daher

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}A\sqrt{3}}{\frac{1}{2}A} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

alſo $\alpha = 30^\circ$ und $\beta = 60^\circ$.

Zuſatz 1. Soll die Größe der Stabilität eines auf der geneigten Ebene liegenden Körpers nach der entgegengeſetzten Richtung, alſo nach der Richtung ba angegeben werden, ſo iſt, wenn der Abſtand der Kante, um welche der Körper ſich drehen muß, von $y = a'$ geſetzt wird, weil hier V' der Kraft X entgegenwirkt,

$$(V' - X)\, h = Ya'$$

$$\text{und daher } V' = \frac{a'Y + hX}{h}$$

nämlich es iſt $V' = \frac{P}{h}(a' \sin \alpha + h \cos \alpha)$

Da nun für das Umſchlagen nach unten die Stabilität iſt

$$V = \frac{P}{h}(a \sin \alpha - h \cos \alpha)$$

ſo iſt für $a' = a$ die Differenz der Stabilität nach den entgegengeſetzten Richtungen

$$V' - V = 2P \cos \alpha$$

und für $\alpha = 60^\circ$ wird

$$V' - V = P.$$

Zuſatz 2. Die Stabilität auf der geneigten Ebene a durch die Formel ausgedrückt $V = \frac{P(a - b) \sin \alpha}{h}$

) auf der horizontalen Ebene ist die Stabilität $W = \frac{aP}{h}$

lich ist die Differenz

$$W - V = \frac{P}{h}[a - (a-b)\sin\alpha] = \frac{P}{h}[a(1-\sin\alpha) + b\sin\alpha]$$

und weil $b : h = 1 : \operatorname{tg}\alpha = \cos\alpha : \sin\alpha$

also $b \sin\alpha = h \cos\alpha$, so ist auch

$$W - V = \frac{P}{h}[a(1 - \sin\alpha) + h\cos\alpha]$$

ll $V = \frac{1}{m}W$ werden, so muß sein

$$\frac{P(a-b)\sin\alpha}{h} = \frac{aP}{mh}$$

also $m(a-b)\sin\alpha = a$

und weil $b \sin\alpha = h \cos\alpha$, so wird

$$ma\sin\alpha - mh\cos\alpha = a.$$

hieraus nun den Werth von α zu finden, setze man

$= \operatorname{tg}\varphi$, so wird

$$\sin\alpha - \operatorname{tg}\varphi\cos\alpha = \frac{1}{m}$$

oder $\sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi = \frac{\cos\varphi}{m}$

und daher $\sin(\alpha - \varphi) = \frac{\cos\varphi}{m}$

urch der Werth von α bestimmt ist.

§. 46.

Uebungen.

1. Die Abhängigkeit der Größen X, Y, Z, P, α, γ und on einander ist durch die, §. 44., abgeleiteten Gleichungen immt, und §. 44. Zusatz 2. sind die besonderen Werthe egeben, welche die einzelnen Kräfte für bestimmte Werthe Winkel erhalten. Jeder der dort angeführten Fälle läßt unmittelbar aus der Figur 68. erkennen, wenn man elbe den besondern Bedingungen gemäß entwirft. Es soll für jeden der dort angeführten Fälle die entsprechende

Figur entworfen werden, und man soll aus derselben die dazu gehörigen Werthe der einzelnen Kräfte ableiten.

2. Sind von den 7 in den drei Gleichungen, §. 44., vorkommenden Größen 4 gegeben, so lassen sich hierdurch die Werthe der 3 übrigen finden, und es ist Beispielweise gezeigt worden, wie aus den gegebenen 4 Kräften die Winkel durch Rechnung sich finden lassen. Es soll nun gezeigt werden, wie es überhaupt möglich ist, je 3 von den 7 Größen durch Rechnung zu finden, wenn die 4 übrigen gegeben sind.

3. Auch unabhängig von der Rechnung lassen sich die fehlenden Stücke durch eine geometrische Construction bestimmen, wie sich aus folgendem Beispiele ergiebt:

Es sind die 4 Kräfte P, X, Y und Z gegeben; man soll die Winkel α, γ und δ mittelst einer geometrischen Construction bestimmen.

Wird der Werth von P durch eine gerade Linie von beliebig angenommener Länge ausgedrückt, so sind dadurch auch die Linien ihrer Größe nach bestimmt, welche die Werthe der übrigen Kräfte ausdrücken, und es können daher auch P, X, Y und Z als 4 gegebene Linien angesehen werden. Nun ist aber, Fig. 68., in dem rechtwinkligen Dreieck nzv die Linie $nz = Z$, $zv = Y$ und $nv = W$; es ist also, da man Z und Y kennt, auch W bekannt. Ferner ist in dem Dreieck mpw die Seite $mp = P$, $pw = X$ und $mw = W$; es kann also dieses Dreieck verzeichnet werden, wodurch man die Winkel desselben kennen lernt: nun ist der Winkel, welcher der Seite X gegenüberliegt, $= \delta$, und der der Seite W gegenüberliegende $= \gamma$. Entwirft man das Dreieck nzv, verlängert vn, nimmt an einem beliebigen Punkte w der Verlängerung $wm = W$, beschreibt das Dreieck wmp und verlängert nun mp und zu, bis sie sich in q schneiden, so ist $mqn = \alpha$, und es sind sonach alle drei Winkel gefunden.

4. Ist abe, Fig. 47., ein normaler Querschnitt eines dreiseitigen Prisma, ist ferner ab horizontal, und liegen auf den beiden Seitenflächen, zu welchen ea und eb gehören, zwei Körper, deren Gewichte zu einander sich verhalten, wie die Durchschnittslinien ea und eb der Flächen, auf welchen sie liegen:

ſo haben dieſe Körper ein gleiches relatives Gewicht, ſie halten ſich alſo im Gleichgewichte, wenn ſie durch einen über e gehenden Faden mit einander verbunden werden, ſo daß die beiden Theile dieſes Fadens parallel zu ea und eb geſpannt ſind.

5. Die Stabilität eines Körpers auf der horizontalen Ebene = W iſt gegeben, man ſoll hieraus die Stabilität V deſſelben auf der geneigten Ebene = V beſtimmen.

Es iſt für gy = h, ym = a und yp = b, Fig. 66.,

$$V = \frac{P \sin\alpha}{h}(a - b) \text{ und } W = \frac{aP}{h}$$

$$\text{folglich iſt auch } V = \frac{W(a - b)\sin\alpha}{a}$$

Da nun $b : h = 1 : \operatorname{tg}\alpha$, ſo iſt $b = h\cot\alpha = \frac{h\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$$\text{und daher iſt } V = \frac{W(a\sin\alpha - h\cos\alpha)}{a}$$

6. Ein Cylinder, deſſen Gewicht = P iſt, liegt auf einer geneigten Ebene ſo, daß die Axe deſſelben parallel iſt zu der Durchſchnittslinie der geneigten Ebene mit der horizontalen; es ſoll die Stabilität dieſes Körpers angegeben werden.

Da der Cylinder die horizontale Ebene nur in einer geraden Linie berührt, in welcher auch die Senkrechte aus dem Schwerpunkte den Horizont trifft, ſo iſt a = 0, und alſo auch W = 0; es iſt daher, wenn man die Formel aus No. 5. benutzen will,

$$V = -h\cos\alpha \cdot \frac{W}{a} = -h\cos\alpha \cdot \frac{0}{0}$$

$$\text{weil aber } W = \frac{aP}{h}, \text{ ſo iſt auch } \frac{W}{a} = \frac{P}{h}$$

und daher wird

$$V = -h\cos\alpha \cdot \frac{P}{h} = -P\cos\alpha$$

die Kraft, welche erforderlich iſt, um das Hinabrollen zu verhindern. In der allgemeinen Formel für das Gleichgewicht auf der geneigten Ebene $X = \frac{P\sin\delta}{\sin(\gamma + \delta)}$ wird aber für $\gamma = \alpha$ und $\delta = 90° - \alpha$ auch $X = P\cos\alpha$, und eine Kraft = X verhindert das Hinabgleiten des Körpers; folglich iſt bei dem

Cylinder unter diesen Umständen $V = -X$. Der Cylinder hat also dasselbe Bestreben von einer geneigten Ebene hinabzugleiten, als hinabzurollen, und es geschieht immer das letztere, weil bei dem Hinabgleiten mehr Friction zu überwinden ist.

7. Es ist, Fig. 69., ad eine vertikal stehende Wand und db horizontal: eine in c mit einem Gewichte $= P$ belastete Linie ab berührt die Vertikale in a und die Horizontale in b; es soll die erforderliche Kraft angegeben werden, um das Ausgleiten dieser Linie zu verhindern.

Das Gewicht P wirkt an c in der vertikalen Richtung cP, und für $ca = a$ und $cb = b$ wird, wenn man das Gewicht auf a und b vertheilt, den auf a kommenden Theil $= A$ und den auf b kommenden $= B$ setzt,

$$A = \frac{bP}{a+b} \text{ und } B = \frac{aP}{a+b}$$

und es wirken diese Kräfte ebenfalls vertikal.

Die Kraft B wird von der horizontalen Ebene getragen, die an a wirkende Kraft $A = (ar)$ aber kann in zwei Kräfte, $ax = X$ und $aw = W$ zerlegt werden, von welchen die erstere durch die vertikale Wand im Gleichgewicht erhalten wird, und es ist, wenn man $\angle bad = \alpha$ setzt,

$$W : A = 1 : \cos\alpha \text{ und } A : X = 1 : \operatorname{tg}\alpha$$

$$\text{also } W = \frac{A}{\cos\alpha} \text{ und } X = A \operatorname{tg}\alpha.$$

Da die Richtung der Kraft W mit der Linie ab zusammenfällt, so kann dieselbe als in dem Punkte b nach bw' in der Verlängerung ab wirkend gedacht werden, und es läßt sich diese Kraft $W = (bw')$ in die Seitenkräfte $bv = V$ und $bz = Z$ zerlegen, von welchen die erstere in der Richtung der horizontalen db und die andere senkrecht gegen den Horizont wirkt, und weil hier $bw' = aw$ sein muß, so ist auch

$$(bz) = Z = (ar) = A \text{ und } (bv) = V = (ax) = X$$

nämlich es ist $Z = A$ und $V = A \operatorname{tg}\alpha$.

Hierdurch nun sind die zu dem Gleichgewicht erforderlichen Kräfte vollkommen bestimmt; es erleidet nämlich die vertikale Wand normal einen Druck $=$

$$(ax) = X = A \operatorname{tg}\alpha = \frac{bP \operatorname{tg}\alpha}{a+b}$$

die Horizontale db muß einem ſenkrechten Drucke widerſtehen

$$= B + Z = B + A = P$$

außerdem iſt eine Kraft $V = A \operatorname{tg} \alpha$ an b in der Richtung bd erforderlich, um das Ausgleiten zu verhindern, und es iſt $V = X = \frac{bP \operatorname{tg} \alpha}{a + b}$. Dieſe Kraft wächſt alſo mit dem Winkel α, ſo wie mit dem Werthe von cb = b.

8. Auf der vertikalen Wand ad, Fig. 70., liegt die Linie ba auf und berührt mit ihrem Endpunkte b den Horizont db. Die Linie ab iſt in c mit einem Gewichte = P belaſtet; es ſoll die Größe der zu dem Gleichgewicht erforderlichen Kräfte berechnet werden.

Vertheilt man die an c in der ſenkrechten Richtung cP wirkende Kraft P auf die Punkte a und b, ſetzt den Theil von a = A und den von b = B, ſo iſt für ca = a und cb = b

$$A = \frac{bP}{a + b} \text{ und } B = \frac{aP}{a + b}$$

und es wirken dieſe Kräfte parallel zu cP, alſo ebenfalls ſenkrecht gegen den Horizont. Die Wand ad widerſteht dem Drucke in einer Richtung, die normal auf ab iſt, und man muß daher die Kraft A = (ar) in die beiden Kräfte zerlegen (ax) = X normal auf ab und (aw) = W in der Richtung von ab. Der Theil W kann nun als an dem Punkte b in der verlängerten Richtung von ab wirkend gedacht werden, und man kann denſelben für bw′ = aw = W in die beiden Seitenkräfte zerlegen bv = V in der Richtung db und bz = Z ſenkrecht gegen db; daher iſt, weil außerdem in b auch die Kraft B ſenkrecht gegen db wirkt, der Druck, welchem db normal widerſtehen muß, = B + Z.

Die Kraft (ax) = X kann ferner zerlegt werden in (ay) = Y normal gegen ad und (at) = T in der Richtung der ad. Das Gewicht P erzeugt alſo an dem Punkte a normal gegen ad einen Druck = Y, und in der Richtung von ad einen Druck = T, welchen beiden die vertikale Wand widerſteht. In b wird ein Druck erzeugt, ſenkrecht auf db = B + Z, welchem die horizontale Fläche widerſteht, und außerdem ein Druck in der Richtung bv = V, durch welchen die belaſtete Linie

ab ausgleitet, wenn nicht eine Kraft = V in der entgegengeſetzten Richtung bd angebracht wird. Setzt man den Winkel bad = α, ſo laſſen ſich nun die Werthe der einzelnen Theilkräfte auf folgende Art beſtimmen: Es iſt

$$ar : aw = 1 : \cos\alpha \text{ und } ar : ax = 1 : \sin\alpha$$

$$\text{alſo } A : W = 1 : \cos\alpha \text{ und } A : X = 1 : \sin\alpha$$

$$\text{folglich iſt } W = A\cos\alpha \text{ und } X = A\sin\alpha$$

$$\text{ferner } ax : ay = 1 : \cos\alpha \text{ und } ax : at = 1 : \sin\alpha$$

$$\text{alſo } X : Y = 1 : \cos\alpha \text{ und } X : T = 1 : \sin\alpha$$

und hiernach iſt

$$Y = X\cos\alpha = A\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{bP\sin\alpha\cos\alpha}{a+b}$$

$$T = X\sin\alpha = A\sin\alpha\cdot\sin\alpha = \frac{bP\sin^2\alpha}{a+b}$$

wodurch der Druck beſtimmt iſt, welchen die vertikale Wand ad in den Richtungen ay und ad erleidet.

Ferner iſt $bw' : bz = 1 : \cos\alpha$ und $bw' : bv = 1 : \sin\alpha$

$$\text{alſo } W : Z = 1 : \cos\alpha \text{ und } W : V = 1 : \sin\alpha$$

und es iſt daher

$$Z = W\cos\alpha = A\cos\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{bP\cos^2\alpha}{a+b}$$

$$\text{und } V = W\sin\alpha = A\cos\alpha\cdot\sin\alpha = \frac{bP\sin\alpha\cos\alpha}{a+b}$$

Hiernach iſt

$$B + Z = \frac{aP}{a+b} + \frac{bP\cos^2\alpha}{a+b}$$

und dieſes ſind die Ausdrücke für die auf b in den Richtungen bv und bq wirkenden Kräfte.

Zuſatz 1. Da $ay = Y = \frac{bP\sin\alpha\cos\alpha}{a+b}$, und auch $bv = V = \frac{bP\sin\alpha\cos\alpha}{a+b}$, ſo folgt $Y = V$. Es erleiden alſo die Punkte a und b parallel zu dem Horizont einen gleichen Druck nach entgegengeſetzten Richtungen.

Zuſatz 2. Der normale Druck iſt

$$\text{auf } a = (at) = T = \frac{bP}{a+b}\cdot\sin^2\alpha$$

und auf $b = Z + B = \frac{bP}{a+b} \cdot \cos^2\alpha + \frac{aP}{a+b}$

und es ist daher der normale Druck auf beide Punkte zusammengenommen =

$$T + Z + B = \frac{bP}{a+b} + \frac{aP}{a+b} = P$$

es vertheilt sich also das ganze Gewicht auf a und b.

9. Die in c mit einem Gewichte P belastete Linie ab, Fig. 70., welche den Horizont in b berührt, liegt in a auf der vertikalen Wand ad auf; es soll der Winkel $bad = \alpha$ so bestimmt werden, daß der senkrechte Druck auf a, also in der Richtung ad, dem senkrechten in b auf bd gleich wird.

Der Druck auf a in der Richtung ad ist $= T = \frac{bP\sin^2\alpha}{a+b}$

und der Druck auf b in der senkrechten Richtung bz ist =

$$B + Z = \frac{aP}{a+b} + \frac{bP\cos^2\alpha}{a+b}$$

sollen also beide gleich groß sein, so muß die Gleichung statt finden

$$T = B + Z$$

es muß also sein

$$\frac{bP\sin^2\alpha}{a+b} = \frac{aP}{a+b} + \frac{bP\cos^2\alpha}{a+b}$$

und daher $-a = b(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = b\cos 2\alpha$

$$\text{also } \cos 2\alpha = -\frac{a}{b}$$

woraus hervorgeht, daß diese Bedingung überhaupt nur in dem Falle statt finden kann, wenn $a < b$, wenn also das Gewicht P dem Punkte a näher als dem Punkte b angebracht ist. Da ferner $\cos 2\alpha$ einen negativen Werth hat, so folgt auch, daß die angegebene Bedingung nur alsdann statt finden kann, wenn $2\alpha > 90^0$, also $\alpha > 45^0$, und daher db > da ist.

Zusatz. Ist der Winkel $\alpha > 45^0$ gegeben, und soll der Punkt c so bestimmt werden, daß $T = B + Z$ wird, so setze man in der Gleichung

$$\frac{bP\sin^2\alpha}{a+b} = \frac{aP}{a+b} + \frac{bP\cos^2\alpha}{a+b}$$

$$\text{oder } b\sin^2\alpha = a + b\cos^2\alpha$$

die gegebene Linie $a + b = m$, also $a = m - b$, so wird

$$b\sin^2\alpha = m - b + b\cos^2\alpha$$

und daher $b - b(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = m$

also $b(1 - \cos 2\alpha) = m$

und hieraus erhält man $b = \dfrac{m}{1 - \cos 2\alpha}$

Z. B. für $\alpha = 60°$ ist $\cos 2\alpha = \cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$ also $1 - \cos 2\alpha = \frac{3}{2}$ und daher $b = \frac{2}{3}m$ und $a = \frac{1}{3}m$.

10. Ein normaler Doppelkegel, von welchem afbg, Fig. 71., ein Axendurchschnitt ist, liegt mit der einen Spitze b auf der horizontalen Fläche db, und mit der andern Spitze a auf der vertikalen Wand ad; es soll der Winkel bad $= \alpha$ so bestimmt werden, daß der senkrechte, durch diesen Körper auf a und b erzeugte Druck gleich groß ist.

Man setze ae = H, eb = h, ef = eg = R, den Inhalt des Kegels afg = K, den Abstand seines Schwerpunktes von a = x, den Inhalt des Kegels bfg = k, den Abstand seines Schwerpunktes von a = z, und den Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunktes von a = a, so ist

$$x = \tfrac{3}{4}H,\ z = H + \tfrac{1}{4}h \text{ und } a = \frac{xK + zk}{K + k}$$

also $a(K + k) = xK + zk$

und es ist sonach

$a(\frac{1}{3}HR^2\pi + \frac{1}{3}hR^2\pi) = \frac{3}{4}H \cdot \frac{1}{3}HR^2\pi + (H + \frac{1}{4}h) \cdot \frac{1}{3}hR^2\pi$

und daher auch

$4a(H + h) = 3H^2 + 4Hh + h^2 = (3H + h)(H + h)$

es ist also $a = \dfrac{3H + h}{4}$

Nun ist $a + b = H + h$, folglich ist

$$b = H + h - \frac{3H + h}{4} = \frac{H + 3h}{4}$$

Da nun, wenn die Punkte a und b einen gleichen Druck erleiden sollen, $\cos 2\alpha = -\dfrac{a}{b}$ sein muß, so wird

$$\cos 2\alpha = -\frac{3H + h}{H + 3h}$$

woraus zugleich hervorgeht, daß $H < h$ sein muß.

Zusatz. Ist $\alpha > 45°$ gegeben, und setzt man $a + b$

$= H + h = m$, so läßt sich der entsprechende Werth von
l und h leicht berechnen. Setzt man nämlich $\cos 2\alpha = -p$,
o also p ein ächter positiver Bruch ist, so wird

$$p(H + 3h) = 3H + h$$

also auch $p[H + 3(m - H)] = 3H + m - H$

und daher $3pm - 2pH = 2H + m$

woraus folgt $m(3p - 1) = 2H(1 + p)$

und daher $H = \frac{m(3p - 1)}{2(1 + p)}$ und $h = \frac{m(3 - p)}{2(1 + p)}$.

ieraus findet man z. B. für $\alpha = 60°$, also für $p = \frac{1}{2}$

$$H = \frac{\frac{1}{2}m}{2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1}{3}m \text{ und } h = \frac{\frac{5}{2}m}{2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{5}{6}m.$$

§. 47.

Uebungen in Beziehung auf die Lehre vom Keile.

Jedes dreiseitige Prisma, von welchem zwei Seitenflächen
nen spitzen Winkel einschließen, wird ein Keil genannt, des-
n Gebrauch darin besteht, daß man ihn mit der spitzen Kante
ischen zwei durch irgend eine Kraft aneinander gedrückte
ächen einzutreiben sucht, um dadurch diese Flächen von ein-
der zu entfernen. Die Bedingungen für das Gleichgewicht
i dem Keile lassen sich leicht ermitteln, wenn nur die Rich-
ngen der Kräfte gegeben sind, welche die auseinander zu
ibenden Flächen aneinander drücken. Ist abc, Fig. 72.,
normaler Querschnitt des Keils, und sind m und n die
ittelpunkte des Druckes der demselben entgegenwirkenden
äfte, so läßt sich jede dieser beiden Kräfte, welche Richtung
auch haben mag, immer in zwei Kräfte zerlegen, von
lchen die eine in der Richtung mg normal auf ac, und die
dere parallel zu ac wirkt, und es braucht, da die letztere
nen Einfluß auf den Keil hat, nur die Wirkung der erstern
her untersucht zu werden. Dieses führt zu folgenden Er-
terungen:

1. Es werden die an den Punkten m und n normal
ac und bc wirkenden Kräfte mit M und N bezeichnet,
er Winkel mgn, unter welchem die Richtungen beider zu-
ntreffen, sei $= \gamma$, so ist die hierdurch erzeugte Mittel-
X ihrer Größe und Lage nach bestimmt, und diese Kraft

X drückt den Keil in der Richtung gd nach oben: ſoll alſo Gleichgewicht ſtatt finden, ſo muß eine eben ſo große Kraft X in der entgegengeſetzten Richtung dg angebracht werden. Es iſt aber der Werth von X, ſo wie der Winkel mgd $= \alpha$ und ngd $= \beta$ durch die Gleichungen beſtimmt

$$X^2 = M^2 + N^2 + 2MN\cos\gamma = M^2 + N^2 - 2MN\cos c$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{N\sin c}{M - N\cos c} = \frac{N\sin\gamma}{M + N\cos\gamma}$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \beta) = \frac{M\sin c}{N - M\cos c} = \frac{M\sin\gamma}{N + M\cos\gamma}$$

2. Die ſo eben für die Wirkungen des Keils gefundenen Formeln erhalten eine einfachere Form, ſobald die Geſtalt des Keils, die Größe der Kräfte M und N und die Lage der Punkte m und n näher beſtimmt werden. Die gewöhnlich ſtatt findenden Vorausſetzungen ſind: daß der Querſchnitt des Keils ein gleichſeitiges Dreieck ſei, und daß die Kräfte M und N gleich groß ſind.

Für M = N werden die obigen Formeln

$$X^2 = 2M^2 - 2M^2\cos c = 2M^2\,(1 - \cos c)$$

$$= 4M^2\left(\frac{1 - \cos c}{2}\right) = 4M^2\sin^2\tfrac{1}{2}c, \text{ alſo } X = 2M\sin\tfrac{1}{2}c$$

ferner iſt $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \dfrac{\sin c}{1 - \cos c} = \operatorname{tg}(180^\circ - \beta)$

und es wird $\alpha = \beta$, ſobald M = N iſt, und zwar wird

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin c}{1 - \cos c} = \frac{\frac{1}{2}\sin c}{\frac{1}{2}(1 - \cos c)} = \frac{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}{\sin^2\frac{1}{2}c} = \cot\tfrac{1}{2}c$$

Iſt nun abc ein gleichſchenkliges Dreieck, ſo iſt auch $\operatorname{tg} a = \cot\frac{1}{2}c$, und es iſt hiernach in dieſem Falle

$a = 180^\circ - \alpha$ und $a + \alpha = a + \angle ngd = 180^\circ$

Da nun außerdem $\angle amg = 90^\circ$, ſo folgt, daß alsdann auch $\angle adg = 90^\circ$ ſein muß.

Iſt alſo der Keil gleichſchenklig und wirken an m und n gleich große Kräfte, ſo iſt die Richtung gd der Mittelkraft X normal gegen den Rücken ab des Keils. Nun iſt bei dem gleichſchenkligen Dreieck abc

$$ac : \tfrac{1}{2}ab = 1 : \sin\tfrac{1}{2}c$$

wenn man den Rücken des Keils ab = g und die Sei-
ſſelben ac = bc = S ſetzt,

$$S : \tfrac{1}{2}g = 1 : \sin\tfrac{1}{2}c$$

$$\text{und daher } \sin\tfrac{1}{2}c = \frac{g}{2S}$$

aber bei der hier ſtatt findenden Vorausſetzung

$$X = 2M\sin\tfrac{1}{2}c, \text{ alſo } \sin\tfrac{1}{2}c = \frac{X}{2M}$$

$$\text{folglich iſt } \frac{g}{2S} = \frac{X}{2M}$$

ieraus erhält man die Proportion

$$M : X = S : g$$

uf einer Seite wirkende Kraft M verhält ſich alſo zu der,
erſtellung des Gleichgewichts erforderlichen, auf den Rük-
es Keils normal wirkenden Kraft, wie die Seite des Keils
m Rücken deſſelben. Dieſe Regel, welche ſich ergiebt,
man die Kräfte M und N gleich groß und normal auf
iden gleichen Seiten ac und bc des Keils wirkend an-
t, wird die Regel des Borelli genannt.

. Sobald M = N angenommen wird und abc gleich-
lig iſt, wirkt die Richtung der Mittelkraft X immer nor-
egen den Rücken des Keils; der Punkt d aber, in wel-
die Kraft X, deren Richtung gd iſt, den Rücken ab
hängt von der Lage der Punkte m und n ab. Man
m = A und cn = B, ſo findet man, wie §. 28. des
Bandes meiner praktiſchen Uebungen für angehende
ematiker gezeigt wird,

$$= \frac{B - A\cos c}{\sin c} = m \text{ und } (ng) = \frac{A - B\cos c}{\sin c} = n$$

iſt, wie ebenfalls aus der angeführten Stelle zu erſe-
ür ma = A′ und nb = B′

$$= A'\cos a + m\sin a \text{ und } (bd) = B'\cos b + n\sin b$$

iſt ſonach, wenn für m und n die gefundenen Werthe
werden,

$$A'\cos a + \left(\frac{B - A\cos c}{\sin c}\right)\sin a \text{ und } (bd) = B'\cos b + \left(\frac{A - B\cos c}{\sin c}\right)\sin b$$

ber abc gleichſchenklig ſein ſoll, ſo iſt a = b und
= cosb = sin½c und sina = sinb = cos½c, alſo

$$(ad)=A'\sin\tfrac{1}{2}c+\left(\frac{B-A\cos c}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\right)\cos\tfrac{1}{2}c=\frac{2A'\sin^2\frac{1}{2}c+B-A\cos c}{2\sin\frac{1}{2}c}$$

und eben ſo findet man

$$(bd)=\frac{2B'\sin^2\frac{1}{2}c+A-B\cos c}{2\sin\frac{1}{2}c}$$

Es iſt aber $A+A'=(ca)=S=B+B'=(cb)$, und daher $A\cos c=(S-A')\cos c=S\cos c-A'\cos c=S\cos c-A'(\cos^2\frac{1}{2}c-\sin$, folglich iſt auch

$$(ad)=\frac{2A'\sin^2\frac{1}{2}c+B-S\cos c+A'\cos^2\frac{1}{2}c-A'\sin^2\frac{1}{2}c}{2\sin\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{B-S\cos c+A'(\quad+\cos^2\frac{1}{2}c)}{2\sin\frac{1}{2}c}=\frac{B+A'-S\cos c}{2\sin\frac{1}{2}c}$$

und eben ſo folgt $(bd)=\frac{A+B'-S\cos c}{2\sin\frac{1}{2}c}$, wodurch die Lage von d beſtimmt iſt. Durch Addition findet man aus dieſen Ausdrücken

$$ad+bd=\frac{B+A'+A+B'-2S\cos c}{2\sin\frac{1}{2}c}=\frac{2S-2S\cos c}{2\sin\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{S(1-\cos c)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{2S\sin^2\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c}=2S\sin\tfrac{1}{2}c$$

wie es ſein muß; denn es iſt

$$ca:\tfrac{1}{2}(ab)=1:\sin\tfrac{1}{2}c \text{ oder } 2S:(ab)=1:\sin\tfrac{1}{2}c$$

und daher $ab=2S\sin\frac{1}{2}c$.

4. Setzt man in den Ausdrücken $(ad)=\frac{B+A'-S\cos c}{2\sin\frac{1}{2}c}$ und $(bd)=\frac{A+B'-S\cos c}{2\sin\frac{1}{2}c}$ $A'=B$ und alſo auch $A'=B'$, ſind alſo die Punkte m und n von c gleich weit entfernt, ſo wird

$$ad=bd=\frac{A+A'-S\cos c}{2\sin\frac{1}{2}c}=\frac{S(1-\cos c)}{2\sin\frac{1}{2}c}=S\sin\tfrac{1}{2}c$$

die durch M und N erzeugte Mittelkraft wirkt alſo in der Mitte des Rückens.

5. Es iſt $ad:bd=(B+A'-S\cos c):(A+B'-S\cos c)$ und daher $ad+bd:ad-bd=2S(1-\cos c):B+A'-A-B'$ nämlich es iſt, wenn $ad-bd=d$ geſetzt wird,

$$g:d=4S\sin^2\tfrac{1}{2}c:(B-B')-(A-A')$$

und d wird alſo poſitiv, wenn $B-B'>A-A'$, wo alſo

$$B-(S-B)>A-(S-A).$$

also $2B - S > 2A - S$

nämlich wenn $B > A$ ist.

Sobald also cn > cm, so wird auch ad > bd; wenn also n näher liegt bei b, als m bei a, so ist auch d dem Punkte n näher als dem Punkte a.

6. Da $(B-B')-(A-A') = (2B-S) - (2A-S) = 2(B-A)$, so ist auch

$$g : d = 2S\sin^2\tfrac{1}{2}c : B - A$$

und daher $$B - A = \frac{2dS\sin^2\frac{1}{2}c}{g}$$

woraus sich ergiebt, um wieviel n höher als m liegen muß, wenn der Werth von ad — bd = d gegeben ist, wenn also das Gleichgewicht herstellende Kraft X an einem bestimmten Punkte des Rückens angebracht werden soll.

7. Wirkt an dem Punkte m eine Kraft = V parallel ab, und zerlegt man diese in eine Kraft = M normal auf ab und in eine Kraft = Y in der Richtung mc, so ist

$$V : M = 1 : \sin a = 1 : \cos\tfrac{1}{2}c$$

folglich ist $M = V\cos\frac{1}{2}c$

und weil, nach No. 2., wenn M = N und abc gleichschenklig ist, $X' = 2M\sin\frac{1}{2}c$ wird,

so ist auch $X' = 2V\cos\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}c = V\sin c$

und daher $V : X' = 1 : \sin c$

Wird die an m parallel zu ab wirkende Kraft V aber in zwei Kräfte zerlegt, von welchen die eine = M normal auf ab wirkt, und die andere Y' parallel zu dc, so ist

$$M : V = 1 : \sin a = 1 : \cos\tfrac{1}{2}c$$

und daher $$M = \frac{V}{\cos\frac{1}{2}c}$$

weil $X' = 2M\sin\frac{1}{2}c$, so folgt bei dieser Voraussetzung

$$X' = 2 \cdot \frac{V}{\cos\frac{1}{2}c} \cdot \sin\tfrac{1}{2}c = 2V\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c$$

und daher $2V : X' = 1 : \operatorname{tg}\frac{1}{2}c$

aber, wenn man die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks setzt, $h : \frac{1}{2}g = 1 : \operatorname{tg}\frac{1}{2}c$ wird,

so ist auch $2V : X' = h : \frac{1}{2}g$

und $V : X' = h : g$

ist des Druckes V zu der auf ab wirkenden

Kraft X′ ändert ſich alſo, wenn die Richtung von V geändert wird, und da die Richtung, unter welcher der Druck bei m und n auf einen Keil wirkt, von verſchiedenen Mathematikern verſchieden angenommen wird, ſo iſt es auch natürlich, daß dieſelben verſchiedene Reſultate für das Verhältniß der Kraft zur Laſt erhalten.

8. Eine ſtrenge Theorie von dem Keile iſt nur alsdann möglich, wenn die Richtung, in welcher an m und n der Druck auf den Keil ſich äußert, beſtimmt iſt. Mit Recht wird dieſer Druck als normal gegen die Seiten ac und bc angenommen, wo alsdann die in No. 1. angegebenen Reſultate richtig ſind, und es iſt insbeſondere für M = N und ca = cb, wie in No. 2. gezeigt wird,

$$M : X = S : g = ca : ab$$

$$\text{und } 2M : X = S : \tfrac{1}{2}g = ca : \frac{ab}{2} = ca : ad$$

wenn cm = cn iſt.

9. Wenn die Kraft = V an m und n parallel zu ab wirkt, und man zerlegt ſie in eine normale Kraft mg und in eine Kraft parallel zu dc, ſo wird nach No. 7.

$$V : X' = h : g$$

Es verhält ſich alſo der Druck auf jeder Seite des Keils zu der normal auf ab wirkenden Kraft, durch welche das Gleichgewicht hergeſtellt wird, wie die Höhe cd des Keils zu dem Rücken g deſſelben. Dieſes Reſultat nennt man die Regel des Morſanni, die aber keinesweges als richtig angeſehen werden kann; denn nach derſelben iſt $X' = \frac{Vg}{h}$, und nach No. 8. iſt $X = \frac{Mg}{S}$, alſo

$$X : X' = \frac{M}{S} : \frac{V}{h} = Mh : VS$$

Wird nun eine und dieſelbe Kraft einmal als normal auf ac und einmal parallel zu ab angenommen, ſo iſt in der ſo eben erhaltenen Proportion M = V, und daher wird

$$X : X' = h : S$$

Da nun h < S, ſo iſt auch X < X′; weil aber durch die Richtungen mg und ng nothwendig eine größere Mittelkraft

erzeugt

erzeugt werden muß, als durch zwei Kräfte von derselben Größe, die sich unter einem stumpferen Winkel als mgn schneiden, so muß auch $X > X'$ sein. Nimmt man aber an, daß bei einem Drucke auf m und n parallel zu ab die Kraft V in eine Normale $= X'$ und in eine Kraft nach der Richtung nc zerlegt wird, so erhält man, nach No. 7., $X' = V \sin c$, und dieses mit $X = 2M \sin \frac{1}{2}c$ verglichen, führt zu der Proportion

$$X : X' = 2M \sin \tfrac{1}{2}c : V \sin c$$

also für $M = V$ wird $X : X' = 1 : \cos \frac{1}{2}c$

also $X > X'$, wie es sein muß.

10. Bei normal auf ac und bc wirkenden Kräften, die gleich groß sind, und zwar jede $= M$, wird $X = \frac{Mg}{S}$; hieraus geht also hervor, daß bei einem bestimmten Werthe von S die Kraft X desto kleiner sein kann, einen je geringeren Werth S hat, je kleiner also der Rücken ab des Keils, oder je spitzer der Winkel c desselben ist.

11. Es ist abc, Fig. 72., der normale Durchschnitt eines Keils, und drei normal auf die Seiten desselben wirkende Kräfte sind im Gleichgewicht; man soll angeben, wie diese Kräfte zu einander sich verhalten.

Auflösung. Wirken die Kräfte an den Punkten m, n und d in den Richtungen mg, ng und dg, so müssen diese Linien, wenn Gleichgewicht möglich sein soll, in einer und derselben Ebene abc liegen, und setzt man die Kraft an $m = B$, an $n = A$ und an $d = C$, so muß, weil sie im Gleichgewichte sein sollen, das Verhältniß statt finden

$$A : B : C = \sin(mgd) : \sin(dgn) : \sin(ngm)$$

Weil die Kräfte aber auf die Seiten normal wirken sollen, ist

$$mgd + a = dgn + b = ngm + c = 180°$$

und es ist daher auch

$$A : B : C = \sin a : \sin b : \sin c$$

Im Dreieck abc aber ist

$$bc : ac : ab = \sin a : \sin b : \sin c$$

also wird $A : B : C = bc : ac : ab$

drei im Gleichgewicht stehenden Kräfte A, B und C ver-

halten ſich alſo zu einander, wie die drei Seiten des Dreiecks, auf welche ſie wirken.

12. Zwiſchen zwei unter einem feſten Winkel $= \gamma$ gegen einander geneigten Ebenen, von welchen AcB, Fig. 73., ein normaler Querſchnitt iſt, befindet ſich ein abgeſtumpfter Keil, wovon ABba einen Durchſchnitt bildet, feſt eingepreßt, ſo daß derſelbe auf beiden Seiten genau an den Ebenen liegt; das Gewicht des Keils iſt $= P$. Man ſoll den Druck berechnen, den hierdurch beide Ebenen erleiden.

Auflöſung. Es ſei g der Schwerpunkt des Keils; der normale Druck auf Ac, alſo in der Richtung gx ſei $= X$, und der Druck auf Bc, der alſo in der Richtung gy wirkt, $= Y$; ferner habe AcB eine ſolche Lage, daß die Senkrechte pgq, welche die Richtung der Schwere angiebt, die cA unter einem Winkel $= \alpha$ und die cB unter einem Winkel $= \beta$ ſchneidet, und daß ſonach $\beta = \alpha + \gamma$ iſt.

Da X und Y der Kraft P äquipollent ſein müſſen, ſo iſt

$$P : X : Y = \sin\gamma : \sin(90^\circ - \beta) : \sin(90^\circ + \alpha)$$

oder $$P : X : Y = \sin\gamma : \cos\beta : \cos\alpha$$

und es iſt daher

$$X = \frac{P\cos\beta}{\sin\gamma} \text{ und } Y = \frac{P\cos\alpha}{\sin\gamma}$$

wodurch der normale Druck, den jede der beiden Ebenen erleidet, beſtimmt iſt.

Will man nun ferner den Druck auf die eine Ebene, z. B. auf Bc in einen horizontalen yz $= Z$ und in einen vertikalen yv $= V$ zerlegen, ſo iſt

$$Y : Z = 1 : \cos\beta \text{ und } Y : V = 1 : \sin\beta$$

und ſonach

$$Z = Y\cos\beta = \frac{P\cos\alpha\cos\beta}{\sin\gamma}$$

$$\text{und } V = Y\sin\beta = \frac{P\cos\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Zuſatz. Iſt die eine Ebene Ac vertikal, alſo parallel zu pq, ſo wird $\alpha = 0$ und $\beta = \gamma$, und daher iſt alsdann

$$X = \frac{P\cos\gamma}{\sin\gamma} = P\cot\gamma$$

$$Y = \frac{P\cos 0^\circ}{\sin\gamma} = P\operatorname{cosec}\gamma$$

$$Z = \frac{P \cos 0^0 \cos \gamma}{\sin \gamma} = P \cot \gamma$$

$$\text{und } V = \frac{P \cos 0^0 \sin \gamma}{\sin \gamma} = P$$

In diesem Falle ist also der vertikale Druck auf Bc dem ganzen Gewichte des Keils gleich, und der horizontale Druck ist bei beiden Ebenen gleich groß, es ist derselbe nämlich auf jeder Ebene = P cot γ.

§. 48.

Einige den materiellen Hebel betreffende Uebungen.

Jeder Hebel, in so fern das Gewicht desselben mit in Rechnung gebracht wird, was natürlich, wenn brauchbare Resultate erhalten werden sollen, immer geschehen muß, ist ein *materieller Hebel*, und die Untersuchungen in Beziehung auf denselben unterscheiden sich von denen über den mathematischen nur dadurch, daß hier das Moment, welches aus dem Gewichte des Hebels entsteht, das man als in dem Schwerpunkte desselben angebracht sich vorstellt, mit in die Formel aufgenommen werden muß. Von den mannigfachen Anwendungen, die von dem Hebel im praktischen Leben gemacht werden, verdienen hier wenigstens einige näher betrachtet zu werden, und dieses führt zu folgenden Aufgaben:

Aufgabe 1. Der einarmige in m unterstützte Hebel mx, Fig. 74., ist in a mit einem Gewichte = A belastet, und es hat derselbe eine solche Form, daß, wenn man die Länge desselben mx = x setzt, der Abstand seines Schwerpunktes n von m, also mn = $\frac{x}{n}$ ist; es soll x so bestimmt werden, daß die möglichst kleine Kraft X zu dem Gleichgewicht erforderlich sei.

Auflösung. Es sei das Gewicht des Hebels = Mx, so ist das Moment desselben = $\frac{x}{n} \cdot Mx = \frac{M}{n} \cdot x^2$, das Moment von A ist = aA und das von X = xX; man erhält also für das Gleichgewicht die Gleichung

$$\frac{M}{n} x^2 + aA = xX$$

$$\text{alſo } x^2 - \frac{nX}{M}x = -\frac{naA}{M}$$

$$\text{und daher wird } \left(x - \frac{nX}{2M}\right)^2 = \frac{n^2X^2}{4M^2} - \frac{naA}{M}$$

$$\text{folglich } x = \frac{nX}{2M} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4M^2}\left(X^2 - \frac{4aAM}{n}\right)}$$

nämlich es iſt

$$x = \frac{n}{2M}\left[X \pm \sqrt{\left(X^2 - \frac{4aAM}{n}\right)}\right]$$

ſoll nun x einen reellen Werth erhalten, ſo darf X^2 nicht kleiner ſein als $\frac{4aAM}{n}$, daher

$$X^2 = \frac{4aAM}{n} \quad X = 2\sqrt{\frac{aAM}{n}}$$

der möglichſt kleine Werth für die Kraft X und

$$x = \frac{n}{M}\sqrt{\frac{aAM}{n}} = \sqrt{\frac{naA}{M}}$$

die entſprechende Länge des Hebels; das Gewicht deſſelben iſt =

$$Mx = \sqrt{naAM} = n\sqrt{\frac{aAM}{n}} = \frac{n}{2}X.$$

Beiſpiele.

1. Iſt der Hebel ein Prisma, ſo wird $mn = \frac{mx}{2}$ $= \frac{1}{2}x = \frac{x}{n}$ und daher $n = 2$. Wenn nun das Gewicht der Längeneinheit des Hebels mit G bezeichnet wird, ſo iſt das ganze Gewicht $= Gx$ und daher $M = G$; folglich iſt in dieſem Falle

$$x = \sqrt{\frac{2aA}{G}}; \quad X = \sqrt{2aAG}$$

$$\text{und das Gewicht des Hebels} = \frac{n}{2}X = X$$

der Hebel hat alſo die vortheilhafteſte Länge, wenn die erforderliche Kraft dem ganzen Gewichte des Hebels gleich i,

2. Iſt der Hebel ein Kegel, deſſen Spitze in m ſich findet, ſo wird $mn = \frac{2}{3}x = \frac{x}{n}$, alſo $n = \frac{3}{2}$ und für

Radius der Grundfläche = R iſt der Inhalt = $\frac{xR^2\pi}{3}$, alſo das Gewicht, wenn die Kubikeinheit = G geſetzt wird, = Mx = $\frac{GR^2\pi}{3} \cdot x$ und ſonach $M = \frac{GR^2\pi}{3}$; daher iſt alsdann

$$x = \sqrt{\frac{4aA}{GR^2\pi}}; \quad X = \sqrt{aAGR^2\pi}$$

und das Gewicht des Hebels iſt = $\frac{2}{3}X$.

3. Iſt der Hebel ein Kegel, m der Mittelpunkt der Grundfläche und x die Spitze deſſelben, ſo wird $n = 4$, $M = \frac{GR^2\pi}{3}$

$$\text{alſo } x = \sqrt{\frac{12aA}{GR^2\pi}}; \quad X = \sqrt{\frac{aAGR^2\pi}{3}}$$

$$\text{und das Gewicht} = \frac{n}{2}X = 2X.$$

Aufgabe 2. Die gemeine Wage iſt bekanntlich ein gleicharmiger Hebel, und es befindet ſich bei einer horizontalen Lage des Wagebalkens der Schwerpunkt deſſelben gerade unter der Axe, alſo unter dem Unterſtützungspunkte; daher kommt es, daß, wenn die Wageſchale wegen eines Uebergewichtes ſinkt, der Schwerpunkt auf die andere Seite heraustritt und das Moment auf dieſer Seite vermehrt, ſo daß hierdurch bei einer ſchiefen Lage des Balkens das Gleichgewicht wieder hergeſtellt wird. Es ſoll angegeben werden, wie das Uebergewicht und der entſprechende Neigungswinkel des Balkens von einander abhängen.

Auflöſung. Es ſei ab, Fig. 75., die durch den Schwerpunkt gehende Axe des Wagebalkens, c der Schwerpunkt deſſelben, ca = cb = a die Arme, welche mit den Gewichten A und B belaſtet ſind, und das Gewicht der ganzen Wage ſei = W, m ſei der Punkt, um welchen der Balken ſich dreht, und der Abſtand des Schwerpunktes c von dieſem Punkte, alſo mc, ſei = c. Iſt nun B = A, ſo bleibt der Balken in der horizontalen Lage ab, und der Schwerpunkt c, welcher ſenkrecht unter m liegt, hat keinen Einfluß auf das Gleichgewicht; ſobald aber B > A wird, ſinkt der Punkt b, und wenn hierdurch die Wage, welche ſich um m dreht, die Lage $\alpha\beta$ erhält, ſo liegt der Schwerpunkt in γ. Das

Moment von B vermindert sich, je weiter b herabfällt, während das von A zwar auch kleiner wird, aber durch das von dem Gewichte der Wage eine Vermehrung erhält, und so stellt sich unter einem Neigungswinkel dmδ = φ das Gleichgewicht her. Die Gleichung für dieses Gleichgewicht ist, wenn man die Momente auf die durch den Unterstützungspunkt m gehende senkrechte Axe df bezieht und von β, γ und α Normalen auf diese Axe fällt,

$$(\beta f) \cdot B = (\gamma g) \cdot W + (\alpha e) \cdot A$$

nämlich es ist

$$(\beta k - g\gamma) \cdot B = (\gamma g) \cdot W + (\alpha h + g\gamma) \cdot A$$

Es ist aber, weil $m\gamma = mc = c$, $\gamma\alpha = \gamma\beta = a$ und $\angle \beta\gamma k = \alpha\gamma h = 90^0 - \varphi$,

$g\gamma = c \sin \varphi$ und $\beta k = \alpha h = a \sin (90^0 - \varphi) = a \cos \varphi$,

folglich wird die obige Gleichung

$$(a \cos \varphi - c \sin \varphi) B = cW \sin \varphi + (a \cos \varphi + c \sin \varphi) A$$

Da nun B > A sein soll, so kann man B = A + P setzen, wo P das Uebergewicht auf der einen Seite der Wage ist, und man erhält hierdurch

$$(a \cos \varphi - c \sin \varphi) P = cW \sin \varphi + 2cA \sin \varphi$$

daher wird

$$aP \cos \varphi = c\,[W + 2A + P] \sin \varphi$$

nämlich es ist

$$aP \cos \varphi = c\,[W + A + B] \sin \varphi$$

und hieraus erhält man endlich

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{aP}{c\,[W + A + B]}$$

die Formel für den Neigungswinkel, bei welchem, für ein bestimmtes Uebergewicht = P, Gleichgewicht stattfindet. Die Tangente dieses Winkels ist also direct proportionirt der Länge der Wagearme = a und dem Uebergewichte = P, und indirect dem Abstande des Schwerpunktes von dem Drehungspunkte = c und dem ganzen Gewichte der belasteten Wage = W + A + B.

Umgekehrt findet man aus dieser Gleichung

$$P = \frac{c\,(W + 2A) \operatorname{tg} \varphi}{a - c \operatorname{tg} \varphi}$$

wodurch bestimmt ist, wie das Uebergewicht von dem Neigungswinkel φ abhängt.

Aufgabe 3. Bei einer gemeinen Wage sind die Arme ca und cb, Fig. 75., von verschiedener Größe; es soll angegeben werden, wie es möglich ist, das richtige Gewicht eines Gegenstandes durch eine solche Wage zu bestimmen.

Auflösung. Es sei $ca = a$, $cb = b$ und das bei b erforderliche Gewicht, wenn der zu wiegende Gegenstand in die Wageschale bei a gelegt wird, damit die Wage einstehe, $= B$, das Gewicht aber, welches bei a erfordert wird, wenn man den zu wiegenden Gegenstand in die Schale bei b legt, sei $= A$, so erhält man für das gesuchte Gewicht $= X$ die beiden Gleichungen

$$aX = bB$$

$$\text{und } bX = aA$$

$$\text{folglich ist } abX^2 = abAB$$

$$\text{und hieraus folgt } X = \sqrt{AB}$$

das gesuchte Gewicht ist also die mittlere Proportionale zwischen den beiden Gewichten, welche erforderlich sind, wenn der Gegenstand zweimal gewogen wird, indem man denselben einmal in die Schale bei a und das Gewicht in die Schale bei b legt, und das andere Mal umgekehrt.

Zusatz. Mittelst einer jeden fehlerhaften Wage kann das richtige Gewicht eines Gegenstandes auf folgende einfache Art gefunden werden: Man lege den zu wiegenden Gegenstand in die eine Schale bei a und in die andere bei b so viel Gewicht, daß die Zunge einsteht. Diese Gewichte lasse man unverändert liegen, nehme den Gegenstand bei a heraus und lege statt desselben Gewichte hinein, bis die Wage wiederum einsteht: so geben die hierzu erforderlichen Gewichte die richtige Schwere des zu wiegenden Gegenstandes an.

Aufgabe 4. Die sogenannte Schnellwage ist bekanntlich ein Hebel mit einem kurzen Arme ma, Fig. 76., an welchem der zu wiegende Gegenstand X angebracht wird, und einem langen Arme mc mit einem verschiebbaren unveränderlichen Gewichte P; mit Hülfe desselben wird das Gewicht von X dadurch bestimmt, daß P so weit verschoben wird, bis die Zunge der Wage einsteht, wo alsdann der

Punkt x des Armes mc die Größe des Gewichts von X angiebt. Es ſoll beſtimmt werden, wie die Größe des Gewichts von X durch den Hebelarm mx ſich auf eine einfache Weiſe beſtimmen läßt.

Auflöſung. Man ſuche den Punkt n, der die Eigenſchaft hat, daß, wenn P bis an dieſen Punkt verſchoben wird, die nicht weiter belaſtete Wage horizontal im Gleichgewicht iſt und ſetze mn = n. wicht des Hebelarmes mc ſei = B, der Schwerpun n in b und mb = b, das Gewicht von ma mit des dazu gehörigen Hakens ſei = A, der Schwerpu und mα = α, ſo iſt die Gleichung für das er unbelaſteten Wage

$$\alpha A - \quad - nP.$$

Wird nun an A der iegende Gegenſtand, deſſen Gewicht = X Pf. ſein ſoll, angebracht, und muß, damit die Wage im Gleichgewichte ſei, das Gewicht P von n nach x verſchoben werden, und man ſetzt ma = a und nx = x, alſo mx = n + x, ſo iſt für die belaſtete Wage die Gleichung für das Gleichgewicht

$$\alpha A + aX = bB + (n + x) P$$

nämlich es iſt

$$\alpha A + aX = bB + nP + xP$$

Nun iſt aber

$$\alpha A = bB + nP$$

folglich iſt auch $aX = xP$

und daher $X = \frac{P}{a} \cdot x$

Auf gleiche Weiſe findet man das Gewicht Z eines anderen Gegenſtandes, wenn dabei P bis z verſchoben werden muß,

$$Z = \frac{P}{a} \cdot z$$

und es iſt daher

$$X : Z = x : z$$

Die Gewichte der zu wiegenden Gegenſtände ſind alſo den Abſtänden des verſchiebbaren Gewichtes P von n proportionirt. Dieſes führt zu dem einfachen Reſultate, daß, wenn z. B. für X = 10 Pf. P an x angebracht werden muß, wenn man mx = 2 (nx) nimmt, P an z einer Laſt von 2 · 10 Pf

und, für nx = m × (nx), P an z einer Laſt von m · 10 Pf. das Gleichgewicht hält. Eben ſo wird, wenn man, von n nach x zu, einen Theil = $\frac{1}{m}$(nx) nimmt und P an dieſem Punkte anbringt, dadurch ein Gegenſtand, deſſen Gewicht = $\frac{1}{m}$ × 10 Pf. iſt, im Gleichgewicht erhalten. Lernt man alſo durch Verſuche den Punkt kennen, an welchem P angebracht werden muß, um einen Gegenſtand, deſſen Schwere eine Gewichtseinheit beträgt, im Gleichgewicht zu erhalten, ſo braucht man nur den Abſtand dieſes Punktes, von n nach e zu, mehrere Male aufzutragen, um die Punkte kennen zu lernen, bis zu welchen P verſchoben werden muß, um 2, 3, 4 ꝛc. Gewichtseinheiten abzuwiegen.

§. 49.

Einige die Vorrichtungen zu dem Aufziehen der Zugbrücken betreffende Aufgaben.

Aufgabe 1. Es iſt ma, Fig. 77., der Durchſchnitt einer Zugbrücke, die bei dem Aufziehen um ein Gewinde bei m ſich dreht: von a geht ein Faden über eine Rolle bei b, an welchem ein Gewicht X angebracht iſt; es ſoll das Gewicht X ſo beſtimmt werden, daß daſſelbe die Zugbrücke in der ſchiefen Lage mα im Gleichgewicht erhält.

Auflöſung. Das ganze Gewicht der Zugbrücke ſei = Q, ihr Schwerpunkt in g, und ein an a angebrachtes Gewicht, das Q an g äquipollent iſt, = P, ſo iſt für mg = g und ma = R

$$Q : P = ma : mg = R : g$$

$$\text{und daher } P = \frac{g}{R}Q$$

Der Werth von P iſt alſo durch das Gewicht der Brücke und durch die gegebene Lage ihres Schwerpunktes vollkommen beſtimmt.

In der Lage mα wirkt P in der Richtung αP ſenkrecht gegen ma, und es iſt daher das Moment von P bei dieſer Lage = (me) · P; die Kraft X wirkt in der Richtung αb, und es iſt daher, wenn man mc normal auf αb zieht, das

Moment von X = (mc) · X. Da nun in dieser Lage P mit X im Gleichgewichte sein soll, so muß

$$(mc) \cdot X = (me) \cdot P \text{ sein.}$$

Für $\angle bm\alpha = \varphi$ aber ist

$(me) = R \cos (90° - \varphi) = R \sin \varphi$ und $mc = R \cos \frac{1}{2}\varphi$

folglich ist auch

$$R \cos \tfrac{1}{2}\varphi \cdot X = R \sin \varphi \cdot P = 2R \sin \tfrac{1}{2}\varphi \cdot \cos \tfrac{1}{2}\varphi \cdot P$$

und hieraus folgt $X = 2 \sin \frac{1}{2}\varphi \cdot P$

Es ist aber $2 \sin \frac{1}{2}\varphi = \text{chord. } \varphi = \frac{b\alpha}{bm} = \frac{S}{R}$

wenn die Sehne $b\alpha$ mit S bezeichnet wird; also ist

$$X = \frac{S}{R} \cdot P$$

und daher $P : X = R : S$

Das bei irgend einer Lage der Zugbrücke erforderliche Gewicht, um sie im Gleichgewichte zu erhalten, verhält sich also zu P, wie die Sehne des Bogens $b\alpha$ zu dem Radius.

Zusatz. Der Werth von X ist direct der entsprechenden Sehne $\alpha b = S$ proportionirt, und da diese mit dem Winkel φ abnimmt, so folgt, daß das Gewicht X immer kleiner werden muß, je höher die Brücke gehoben wird; daher ist ein veränderliches Gewicht X erforderlich, wenn die Brücke durch dasselbe in jeder Lage im Gleichgewicht erhalten werden soll. Um diesen Zweck zu erreichen, hat man versucht, dem Gewichte X eine Unterlage zu geben, auf welcher es hinabgleitet, und wodurch bei jeder Lage von X der erforderliche Theil des Gewichts entzogen wird, so daß das übrige zu dem Gleichgewichte hinreicht. Diese Unterlage ist eine krumme Fläche, deren normaler Durchschnitt eine Curve ist, von welcher die Eigenschaften in Aufgabe 3. näher bestimmt werden. Indessen giebt es noch ein anderes einfacheres Mittel, diesen Zweck zu erreichen, das in der hier folgenden Aufgabe mitgetheilt werden soll.

Aufgabe 2. An dem Faden bn der Zugbrücke ma, Fig. 77., sollen mehrere Gewichte so angebracht werden, daß bei dem Aufziehen derselben diese Gewichte nach und nach auf der horizontalen Fläche AB zur Ruhe kommen, und für

…de Lage von ma die noch übrigen Gewichte die Brücke in die…r Lage im Gleichgewicht erhalten.

Auflösung. Das bei der horizontalen Lage ma zu …em Gleichgewicht erforderliche Gewicht ist $X = \frac{(ab)}{R} \cdot P$, und …gt man das bei der Lage $m\alpha$ erforderliche Gewicht $= X'$, …ist $X' = \frac{(\alpha b)}{R} \cdot P$. Der Unterschied beider Gewichte …also $= X - X' = (ab - \alpha b) \cdot \frac{P}{R}$ und der Punkt n …kt bei dieser Veränderung der Lage um $(ab - \alpha b)$. Der …ewichtsverlust, welcher bei jeder Veränderung der Lage er…derlich ist, damit das Gleichgewicht bleibe, ist also immer …e Strecke proportionirt, um welche der Punkt n, oder über…upt irgend ein Punkt der Linie bn, herabsinkt. Nimmt …an nun $n\beta = ab$, theilt diese Länge in n gleiche Theile, …n welchen jeder eine Länge $= d$ haben soll, und bringt …n jedem dieser Theilpunkte $\frac{1}{n}$ des ganzen, bei der horizonta…n Lage der Brücke erforderlichen Gewichtes $X = \frac{(ab)}{R} \cdot P$ …, so daß bei n der erste, und bei dem letzten, β zunächst …genden Theilpunkte der letzte Gewichtstheil angebracht wird, …d legt man die horizontale Unterlage AB so, daß ihr Abstand …l von n bei der horizontalen Lage der Brücke $= d$ ist: so …rd bei jeder Lage $m\alpha$ der Zugbrücke Gleichgewicht statt…den. Denn setzt man $ba - b\alpha = m \cdot d$, so muß der Punkt …auch, während ba in die Lage $b\alpha$ kommt, um eine Strecke …$m \cdot d$ herabsinken, und es kommen hierdurch m Gewichts…eile in Ruhe. Bei der Lage $m\alpha$ wirken also an dem Fa…n bn noch $(n - m)$ Gewichtstheile, deren ganzes Gewicht …ausgedrückt wird durch

$$X' = \left(\frac{n - m}{n}\right) \cdot X = \frac{n - m}{n} \cdot \frac{(ab)}{R} \cdot P$$
$$= \frac{nd - md}{nd} \cdot \frac{(ab)}{R} \cdot P$$

…h es ist, weil $nd = (ba)$ und $ba - b\alpha = md$ sein soll,

$$X' = \frac{b\alpha}{ba} \cdot \frac{(a \cdot b)}{R} \cdot P = (b\alpha) \cdot \frac{P}{R}$$

und dieses ist das bei der Lage mα zu dem Gleichgewicht erforderliche Gewicht.

Zusatz 1. Bei dieser Auflösung ist auf das Gewicht des Fadens ab keine Rücksicht genommen; doch läßt sich die Aufgabe, auch wenn man den veränderlichen Werth des Moments von ab mit in Rechnung bringt, auflösen, wie in Aufgabe 4. Zusatz 2. gezeigt werden soll.

Zusatz 2. [illegible] aus der Lage ma in die Lage mα gebrac[illegible] ird die Sehne allerdings um ba — bα kürzer, de[illegible] des Fadens verlängert sich aber um etwas mehr [illegible] bα, weil bei der Lage bα ein geringerer Theil [illegible] an der Rolle bei b anliegt, als bei der Lage ba; d[illegible] Unterschied so klein, daß er ohne Nachtheil ganz außer [illegible] gelassen werden könnte: indessen kann auch hierauf Rücksicht genommen werden, und eben so auf den Raum, den die einzelnen Gewichtstheile einnehmen.

Aufgabe 3. Zwei gekrümmte Flächen, von welchen MaN, Fig. 78., ein normaler Querschnitt ist, sind mit einander verbunden, und durch den gemeinschaftlichen Punkt a der beiden Durchschnitts-Curven apM und aqN ist in der Ebene derselben mab senkrecht auf dem Horizonte MN; über eine kleine bei m befindliche Rolle geht ein Faden pmq, an dessen Enden p und q die Gewichte P und Q befestigt sind, welche auf den gekrümmten Flächen aufliegen, und, wie man sie auch verrücken mag, sich im Gleichgewicht erhalten: es soll die Abhängigkeit der Gleichungen der beiden Curven apM und aqN von einander bestimmt werden.

Auflösung. Da P an p mit Q an q bei jeder Lage im Gleichgewichte sein soll, so muß durch jede noch so kleine Kraft ein Verschieben beider Gewichte bewirkt werden können. Nimmt man eine solche Kraft zu P hinzu, so muß P auf der Curve apM herabsinken, und also Q auf aqN steigen, und eben so muß, wenn eine solche Kraft zu Q hinzukommt, Q steigen und P sinken. Hieraus folgt nothwendig, daß mit dem Steigen des einen und Sinken des andern Gewichts Steigen oder Sinken des gemeinschaftlichen Schwerpunkts P und Q verbunden sein kann, weil immer, wenn der Schwerpunkt gehoben werden soll, hierzu ein bestimmter Kraft

wand erforderlich iſt. Hiernach wird alſo bei jeder Lage von P und Q der normale Abſtand ihres gemeinſchaftlichen Schwerpunkts von m unverändert derſelbe bleiben. Dieſer Abſtand von m iſt alſo eine conſtante Größe, und kann mit c bezeichnet werden. Nimmt man nun mb als Axe an, zieht von p und q die Normalen px und qX auf dieſelbe, ſetzt mx = x, xp = y, mX = X und Xq = Y, ſo muß, weil die zu dem gemeinſchaftlichen Schwerpunkte gehörige Abſciſſe mit c bezeichnet worden iſt, die Gleichung ſtatt finden

$$xP + XQ = c(P + Q)$$

und für $c(P + Q) = C$ wird alſo

$$\text{I.} \quad xP + XQ = C.$$

Ferner iſt $\sqrt{(x^2 + y^2)} = (mp) = z$

und $\sqrt{(X^2 + Y^2)} = (mq) = Z$

Da nun pm + mq ebenfalls eine conſtante Größe iſt, (es iſt dieſes nämlich die Länge des Fadens pmq, durch welchen die beiden Gewichte P und Q mit einander verbunden ſind), ſo kann man pm + mq = a ſetzen und dieſes giebt eine zweite Gleichung

$$\text{II.} \quad a = \sqrt{(x^2 + y^2)} + \sqrt{(X^2 + Y^2)} = z + Z$$

Iſt nun außerdem die eine Curve apM gegeben, kennt man alſo die Abhängigkeit der Coordinaten x und y von einander, ſo erhält man hierdurch die dritte Gleichung

$$\text{III.} \quad y = f(x)$$

und dieſe drei Gleichungen ſind hinreichend, um hieraus die für die Curve aqN abzuleiten; dieſes kann auf folgende Art geſchehen:

Aus I. folgt

$$x = \frac{C - QX}{P}$$

daher wird III.

$$y = f\left(\frac{C - QX}{P}\right)$$

und ſonach erhält man nun aus II. die geſuchte Gleichung für die Curve

$$Z = a - \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$= a - \sqrt{\left[\left(\frac{C - QX}{P}\right)^2 + f^2\left(\frac{C - QX}{P}\right)\right]}$$

welche Gleichung zugleich ein Mittel darbietet, die Curve
conſtruiren; denn berechnet man für irgend einen Werth von
aus dieſer Gleichung den dazu gehörigen Werth von Z, nim
mX = X, errichtet in X auf mb eine Normale und ſchn
det von dieſer, von m aus, mq = Z ab, ſo beſtimmt ſich hi
durch ein Punkt q der zu conſtruirenden Curve.

Anwendung. Sollen dieſe Formeln angewendet w
den, um die krumm zu beſtimmen, in welcher d
Gewicht X, Fig. 77., en muß, um mit der Zugbrü
bei jeder Lage im C hte zu ſein, ſo wird die Cur
apM ein Viertelskrei fällt mit a zuſammen; es
daher, wenn man t dieſes Kreiſes = R ſetzt,

$y^2 = 2Rx -$ lſo $x^2 + y^2 = 2Rx$

und hiernach wird

$$Z = \sqrt{(X^2 + Y^2)} = a - \sqrt{2Rx}$$

oder weil $x = \frac{C - QX}{P}$

$$Z = \sqrt{(X^2 + Y^2)} = a - \sqrt{\frac{2R\,(C - QX)}{P}}$$

wo jetzt nur noch die Werthe der conſtanten Größen P,
und C näher zu beſtimmen ſind.

Der Werth von P iſt hier die, Fig. 77., an a äquipo
lente Kraft des in dem Schwerpunkte g wirkenden gan
Gewichts der Brücke. Q iſt die Kraft, welche an P mit d
Brücke in der Lage ma im Gleichgewicht iſt, und nach Au
gabe 1. iſt daher, für ab = S,

$$Q = \frac{S}{R} \cdot P$$

oder da (ab) = S = R√2, ſo iſt Q = P√2

Das ganze Gewicht Q iſt erforderlich bei der horizontale
Lage der Brücke, für welche, Fig. 78., weil m mit a zuſa
menfällt, x = y = R, X = 0 und auch Y = 0 i

Die Gleichung $\sqrt{(X^2 + Y^2)} = a - \sqrt{\left(\frac{C - QX}{P}\right)} \cdot 2$
giebt für dieſe Werthe von X und Y

$$0 = a - \sqrt{\frac{2RC}{P}}$$

und es ist daher $a^2P = 2RC$, also $C = \frac{a^2P}{2R}$; demnach wird nun

$$Z = \sqrt{(X^2 + Y^2)} = a - \sqrt{\left(\frac{a^2P - 2RQX}{P}\right)}$$

und weil $\frac{Q}{P} = \sqrt{2}$, so ist

$$Z = \sqrt{(X^2 + Y^2)} = a - \sqrt{(a^2 - 2RX\sqrt{2})}$$

Setzt man nun endlich noch, Fig. 77., $(ab) = a = R\sqrt{2}$, so wird

$$Z = \sqrt{(X^2 + Y^2)} = a - \sqrt{a\,(a - 2X)}$$

und es läßt sich jetzt mit der größten Leichtigkeit der zu jedem beliebigen Werthe von $aX = X$, Fig. 78., gehörige Werth von $aq = Z$ berechnen, wodurch man in den Stand gesetzt wird, die Curve aqN zu construiren.

Zusatz 1. Die eigentliche Gleichung für die Curve, deren Construction so eben angegeben worden ist, wird auf folgende Art gefunden: Es ist

$$\sqrt{(X^2 + Y^2)} = a - \sqrt{\left(a^2 - \frac{2RQ}{P}\,X\right)}$$

und daher $X^2 + Y^2 = 2a^2 - \frac{2RQ}{P}\,X + 2a\sqrt{\left(a^2 - \frac{2RQ}{P}\cdot X\right)}$

woraus hervorgeht, daß die Curve algebraisch und von dem vierten Grade ist, und bloß, weil man übersehen hat, daß $Y^2 + Y^2 = Z^2$ gesetzt werden kann, sind die Constructionen, welche man für diese Curve angegeben hat, so verwickelt.

Zusatz 2. Belidor in der Science des Ingénieurs zeigt in dem 6ten Kapitel des 6ten Buches die Anwendung dieser Curve zur Erhebung der Zugbrücken, und hat ihr den Namen Sinusoide gegeben, weil er bei ihrer Construction die Sinus der Erhebungswinkel der beweglichen Brücke benutzt; es ist aber bereits seit langer Zeit nachgewiesen, daß diese Curve gar keine besondere Gattung bildet, denn sie ist nichts weiter als eine Epicykloide. Zuerst ist dieses von Johann Bernoulli und von dem Marquis L'Hôpital gezeigt worden. Uebrigens kommt diese Linie auch unter der Benennung der Curva aequilibrationis oder der Gleichgewichtslinie vor.

Zusatz 3. Bei den bisher von verschiedenen Mathematikern eingeschlagenen Wegen, um die Gleichung für die Sinusoide zu finden, ist durchgehends die höhere Analysis benutzt worden, was sich nur dadurch erklären läßt, daß man nicht daran dachte, daß unter den gegebenen Bedingungen der gemeinschaftliche Schwerpunkt von P und Q, Fig. 78., bei jeder beliebigen Verrückung der Gewichte weder steigen noch sinken kann. Der unveränderliche Abstand dieses Schwerpunktes von m ergiebt sich auf folgende Art: Es ist

$$xP + XQ = C = c(P + Q)$$

Da nun bei dem in der Anwendung angenommenen Falle $C = \frac{a^2P}{2R}$ ist, so wird auch

$$c(P + Q) = \frac{a^2P}{2R}$$

$$\text{und daher ist } c = \frac{a^2P}{2R\,(P + Q)},$$

oder weil $a^2 = 2R^2$ und $Q = P\sqrt{2}$

$$c = \frac{2R^2P}{2\,(RP + PR\sqrt{2})} = \frac{R^2}{R + a}$$

Dieser Ausdruck für den Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunktes von m, welcher hier als mit a zusammenfallend angenommen wird, läßt sich auch auf folgende Art finden: Wenn P unten bei M ist, muß Q oben bei a sein, und es ist alsdann in der Gleichung

$$xP + XQ = c(P + Q)$$

$x = R$ und $X = 0$, also wird

$$c = \frac{RP}{P + Q} = \frac{R}{1 + \sqrt{2}} = \frac{R^2}{R + R\sqrt{2}},$$

$$\text{nämlich es ist } c = \frac{R^2}{R + a}$$

Aufgabe 4. Es soll das zu dem Gleichgewicht der beweglichen Zugbrücke, Fig. 77., erforderliche Gewicht = z angegeben werden, wenn auch, bei einer jeden Lage $m\alpha$ derselben, das Gewicht der Kette $b\alpha$ mit in Rechnung gebracht wird.

Auflösung. Das für das Gewicht der Brücke in der Lage

Lage mα erforderliche Gewicht ist, nach Aufgabe 1., durch die Gleichung bestimmt

$$X = \frac{S}{R} \cdot P$$

wo bα = S ist. Wird nun das Gewicht der Längeneinheit der Kette bα mit g bezeichnet, so ist das ganze Gewicht derselben = Sg und ihr Schwerpunkt liegt in c; daher ist, wenn man die Senkrechte cd zieht, das Moment der Kette = (md) · Sg.

Da nun mc : md = 1 : cos(90° − ½φ) = 1 : sin ½φ
so ist md = (mc) sin ½φ und weil mc = R cos ½φ
so wird das Moment x = R sin ½φ cos ½φ · Sg
und es ist daher auch

$$x = R \sin\varphi \cdot \frac{Sg}{2}$$

Weil aber $R : \frac{S}{2} = 1 : \sin\frac{1}{2}\varphi$, so ist $\frac{S}{2} = R \sin\frac{1}{2}\varphi$, und daher wird

$$x = R^2 g \cdot \sin\varphi \sin\tfrac{1}{2}\varphi = x' \cdot R \cos\tfrac{1}{2}\varphi$$

Das ganze an dem Faden bn erforderliche Gewicht ist sonach

$$Z = X + x' = \frac{SP}{R} + Rg \sin\varphi \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi$$

Nimmt man nun die Länge der ganzen Kette so groß an, daß bei einer horizontalen Lage ma der Brücke der über b herüber hängende Theil den horizontalen Boden AB berührt, so bleibt alsdann das Gewicht des herüber hängenden Theils für jede Lage der Brücke constant = Cg, und es ist das noch außerdem erforderliche Gewicht = X + x′ − Cg.

Zusatz 1. Der Werth von x läßt sich noch auf verschiedene andere Arten ausdrücken, nämlich es ist

$$x = R^2 g \sin\varphi \sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

Da nun ganz allgemein sin p sin q = ½ cos (p − q) − ½cos(p + q), so ist auch

$$\sin\varphi \sin\tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{3}{2}\varphi$$

und daher wird

1). $x = \frac{1}{2}R^2 g \cos\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}R^2 g \cos\frac{3}{2}\varphi$

Ferner ist auch, wenn, Fig. 77., die Normale von b auf am mit y bezeichnet wird, y = R sin φ, und die Fläche des

Dreiecks $abm = \frac{Ry}{2}$. Die Fläche dieſes Dreiecks iſt $=$

$\frac{(ab)\,(mc)}{2} = \frac{S}{2}\sqrt{(R^2 - \frac{1}{4}S^2)}$ und daher

$$Ry = S\sqrt{(R^2 - \tfrac{1}{4}S^2)}$$

folglich iſt auch $R\sin\varphi = y = -\frac{S}{R}\sqrt{(R^2 - \frac{1}{4}S^2)}$

und da $x = R\sin\varphi \cdot \frac{Sg}{2}$, ſo wird auch

$$2)\ x = \frac{Sg}{2R}\sqrt{(R^2 - \tfrac{1}{4}S^2)}$$

Zuſatz 2. Sollen mehrere Gewichte an bn, ſo vertheilt angebracht werden, daß, während bei irge Lage der Brücke ein Theil dieſer Gewichte auf dem AB aufliegt, die übrigen die Brücke in dieſer Gleichgewicht erhalten, und ſoll hierbei auch das Gew Kette berückſichtigt werden, ſo muß die Vertheilung wichte auf folgende Art geſchehen:

Man gebe der Kette eine ſolche Länge, daß ſie horizontalen Lage ma der Brücke den Horizont AB i rührt, und ſetze das Gewicht des Theils bd der Kett ſo iſt, weil dieſes conſtant, das außerdem bei der hori Lage noch erforderliche Gewicht $=$

$$Z - Cg = X' - Cg + x'$$
$$= \frac{SP}{R} - Cg + \frac{S^2g}{2R}$$

Der Theil $X = \frac{SP}{R}$ hält das Gewicht der Brücke in gewicht und muß (für $n\beta = ab = n \cdot d$ und $nd =$ man $n\beta$ in n gleiche Theile theilt, von welchen die nes jeden $= d$ iſt) auf die Theilpunkte gleich verth den, ſo daß das bei jedem Theilpunkte angebrachte $= \frac{1}{n} \cdot \frac{SP}{R} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(ab)P}{R} = \frac{1}{n} P\sqrt{2}$ iſt. Da nun t ſtante Gewicht der Kette $bd = Cg$ ſein ſoll, ſo mu wenn $Cg = \frac{m}{n} P\sqrt{2}$ iſt, die noch fehlenden $(n - m$ von n nach oben zu vertheilen, ſo daß die m oberſten

der Kette unbelaſtet bleiben, und es iſt hierdurch das Gleichgewicht der Brücke für alle Lagen geſichert, bis der letzte belaſtete Theilpunkt den Horizont AB berührt. Jetzt ſind die n Theilpunkte von nβ noch ſo zu belaſten, daß dadurch auch die Kette ab im Gleichgewicht erhalten wird, und es iſt das ganze hierzu erforderliche Gewicht

$$x' = \frac{S^2 g}{2R}$$

für $S = (ab) = R\sqrt{2}$, und daher eigentlich

$$x' = Rg$$

Setzt man nun in der Formel für x' ſtatt $S = R\sqrt{2}$ die um den nten Theil verkürzte Sehne, alſo $\frac{n-1}{n} S = S'$ $= \frac{n-1}{n} \cdot R\sqrt{2}$, ſo giebt der hierzu gehörige Bogen von $x' = x''$ die erforderliche Belaſtung, wenn bereits die Brücke ſo weit gehoben iſt, daß der erſte Theilpunkt n den Horizont berührt, und es iſt daher die Differenz $x' - x''$ das an dem erſten Theilpunkte anzubringende Gewicht. Eben ſo iſt, wenn $\frac{n-2}{n} S = S''$ ſtatt S geſetzt wird, der entſprechende Werth von $x' = x'''$ die erforderliche Belaſtung, um die Kette im Gleichgewicht zu erhalten, wenn der zweite Theilpunkt den Horizont AB berührt, und es iſt daher das an dem zweiten Theilpunkte anzubringende Gewicht $= x'' - x'''$. Auf gleiche Weiſe laſſen ſich auch die Gewichte berechnen, welche bei allen übrigen Theilpunkten angebracht werden müſſen, um die Kette bei jeder Lage der Brücke im Gleichgewicht zu erhalten. Nämlich für

$$S = R\sqrt{2} \quad \text{iſt } x' = \frac{S^2 g}{2R}$$

$$S' = \frac{n-1}{n} S \text{ iſt } x'' = \frac{(S')^2 g}{2R}$$

$$S'' = \frac{n-2}{n} S \text{ iſt } x''' = \frac{(S'')^2 g}{2R}$$

$$S''' = \frac{n-3}{n} S \text{ iſt } x'''' = \frac{(S''')^2 g}{2R}$$

u. ſ. w., u. ſ. w.

und setzt man nun das an dem ersten Theilpunkte n erforderliche Gewicht um die Kette im Gleichgewicht zu erhalten = z', das an dem zweiten Theilpunkte erforderliche = z'' ꝛc., so ist $z' = x' - x''$; $z'' = x'' - x'''$; $z''' = x''' - x''''$ ꝛc. und diese Gewichte kommen zu denen noch hinzu, welche für das Gleichgewicht der Brücke selbst erforderlich sind, und die für alle Theilpunkte eine gleiche Größe haben.

Zu bemerken ist hier noch, daß bei dieser Vertheilung der Gewichte vorausgesetzt wird, daß die Kette ab immer in gerader Linie gespannt sei, was nie der Fall ist, und es werden etwas abweichende Resultate erhalten, wenn die Curve berücksichtigt wird, welche die Kette bildet; doch kann man dieses bei dem Gebrauch ohne Nachtheil außer Acht lassen.

Aufgabe 5. Die Brücke, Fig. 77., hat bereits eine solche Lage, daß der Theil bd der Kette allein hinreicht, um sie im Gleichgewichte zu erhalten: wird sie nun noch weiter aufgezogen, so erhält unbedingt, weil hierdurch ihr Moment immer kleiner wird, die Kette das Uebergewicht, und sie wird nun mit zunehmender Geschwindigkeit von selbst steigen, bis sie die vertikale Lage mb erhält; es soll eine Vorrichtung angebracht werden, daß sie auch jetzt noch für jeden kleinern Winkel φ im Gleichgewichte bleibt.

Auflösung. Ist die Sehne S, bei welcher die Kette bd die Brücke im Gleichgewicht erhält, = m · d, so verbinde man mit der Kette einen Faden, der über der Rolle b frei herabhängt und eine Länge hat = bm + ba = R + R$\sqrt{2}$, so daß der Theil ba auf dem Horizonte bei am ruhet. Diesen Faden theile man ebenfalls in Theile, deren jeder = d ist, und bringe an den untersten m Theilpunkten gleiche Gewichte an, von welchen jedes $= \frac{1}{n} \cdot \frac{SP}{R} = \frac{1}{n} \cdot P\sqrt{2}$ ist. Ist nun die Brücke so weit aufgezogen, daß die Kette allein hinreicht, sie im Gleichgewichte zu erhalten, so wird, weil der Faden mit der Kette zugleich über die Rolle läuft, das oberste an dem Faden befindliche Gewicht nur noch den Horizont berühren. Bei einem weiteren Heben der Brücke muß dieses Gewicht mitgehoben werden, und so nach und nach auch die übrigen, wodurch, wie aus dem

Vorhergehenden leicht einzusehen ist, das Gleichgewicht für jede Lage hergestellt wird.

Aufgabe 6. Die Zugbrücke ma, Fig. 79., wird mittelst eines Fadens adb, der über die Rolle g geht, aufgezogen, und erhält zuletzt die vertikale Lage mα; es soll die Länge des über die Rolle bei diesem Aufziehen laufenden Fadens angegeben werden.

Auflösung. Setzt man ma = mα = R, den Radius der Rolle gd = gb = cm = bα = r, die Tangente ad = X, den Bogen der Rolle db = x und den Winkel cad = φ, so ist die gesuchte Länge Z des über die Rolle gehenden Fadens durch die Gleichung bestimmt

$$Z = (ad) + (db) - (b\alpha) = X + x - r$$

und da $(ad)^2 + (gd)^2 = (ac)^2 + (cg)^2$

also $X^2 + r^2 = (R + r)^2 + (R - r)^2$

so ist $X^2 = 2R^2 + r^2$ und $X = V(2R^2 + r^2)$

und weil $\angle bgd = \angle cad = \varphi$, so ist auch $x = \frac{\varphi}{360} \cdot 2r\pi = \frac{\varphi r\pi}{180}$

und daher wird $Z = V(2R^2 + r^2) + \frac{\varphi r\pi}{180} - r$

wo nun noch der Werth von φ bestimmt werden muß.

Es ist aber, wenn man cd gezogen denkt, da $\angle cgd = 180° - \varphi$, in dem Dreieck cgd

$$(cd)^2 = (R - r)^2 + r^2 + 2(R - r)\, r \cos\varphi$$

und in dem Dreieck cad

$$(cd)^2 = (R + r)^2 + X^2 - 2(R + r)\, X \cos\varphi$$

also ist auch

$$(R-r)^2+r^2+2(R-r)\,r\cos\varphi = (R+r)^2+X^2-2(R+r)X\cos\varphi$$

daher wird

$$2[(R+r)X+(R-r)r]\cos\varphi = (R+r)^2-(R-r)^2+X^2-r^2$$
$$= 4Rr+2R^2 = 2R(R+2r)$$

und es ist hiernach

$$\cos\varphi = \frac{R\,(R + 2r)}{(R + r)\,X + (R - r)\,r}$$

wo für X der Werth $= V(2R^2 + r^2)$ gesetzt werden kann: alsdann ist der gesuchte Werth von Z

$$Z = V(2R^2 + r^2) + \frac{\varphi r\pi}{180} - r$$

vollkommen bestimmt.

Setzt man in dem für cos φ und für X gefundenen Werth $r = 0$, so wird $X = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$ und

$$\cos\varphi = \frac{R^2}{R^2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$ und es ist alsdann $\varphi = 45°$

Wird aber be = bc, also $r = \frac{1}{2}R$ genommen, so erhält man

$$X = \sqrt{(2R^2 + \tfrac{1}{4}R^2)} = \frac{3R}{2}$$ und

$$\cos\varphi = \frac{2R^2}{\frac{9}{4}R^2 + \frac{1}{4}R^2} = 0{,}8$$ und es ist alsdann $\varphi = 36° 52'$

Hieraus geht also hervor, daß jedenfalls

$$\frac{\varphi}{180} < \frac{45}{180}$$ und $> \frac{36}{180}$ sein muß, also $\frac{\varphi}{180} < \frac{1}{4}$ und $> \frac{1}{5}$

Der Werth von $\frac{\varphi r\pi}{180}$ liegt also innerhalb der Gränzen

$$\frac{\pi}{4} \cdot r = 0{,}7854 \cdot r$$ und $$\frac{\pi}{5} \cdot r = 0{,}6283 \cdot r$$

und daher liegt der Werth von $r - \frac{\varphi r\pi}{180} = r\left(1 - \frac{\varphi\pi}{180}\right)$ innerhalb der Gränzen $0{,}2146 \cdot r$ und $0{,}3717 \cdot r$

Bedeutet nun z einen ächten Bruch, dessen Werth zwischen 0,2146 und 0,3717 liegt, so wird

$$Z = \sqrt{(2R^2 + r^2)} - zr$$

Daher ist nun für $r = 0$ der Werth von $Z = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$ $= (ac) = S$, die Sehne des Viertelskreises, welche also bei dem Aufziehen der Brücke über die Rolle läuft, wie bei Aufgabe 2. und 4. vorausgesetzt wird.

Für $r = \frac{1}{2}R$, was hier als ein Maximum angesehen werden kann, wird

$$Z = \sqrt{3R^2} - zR = R(\sqrt{3} - z)$$ und $z = 0{,}3717$

$$= R(1{,}7321 - 0{,}3717) = 1{,}3604 \cdot R$$

Es ist aber $S = R\sqrt{2} = 1{,}4142 \cdot R$, folglich ist für $r = \frac{1}{2}R$

$$Z = S - 0{,}0538\,R$$

Die größte Differenz zwischen dem wirklich abgerollten Faden und der Sehne des Viertelskreises kann also nicht mehr als $\frac{1}{20}R$ betragen. Da nun r bedeutend kleiner als $\frac{1}{2}R$ ist, so wird diese Differenz noch um vieles geringer, und hieraus geht hervor, daß man bei der Ausführung diese Differenz jedenfalls außer Acht lassen kann.

§. 50.

Einige Bemerkungen über die Schraube.

1. Iſt $d\delta c\gamma$, Fig. 80., die krumme Oberfläche eines normalen Cylinders, nämlich eines Cylinders, deſſen normaler Querſchnitt ein Kreis iſt, ſo muß die Figur ein Rechteck ſein, und es iſt $d\delta$ der Umfang der Grundfläche des Cylinders $= 2r\pi$, wenn der Radius der Grundfläche mit r bezeichnet wird. Nimmt man nun auf $dc = \delta\gamma$ die Theile $da = ab = bc = \delta\alpha = \alpha\beta = \beta\gamma$, ſo fallen, wenn das Rechteck um den Cylinder herumgelegt wird, die Punkte a und α und eben ſo b und β zuſammen und die Transverſalen bilden auf der Oberfläche des Cylinders eine zuſammenhängende Linie, welche die **Schraubenlinie** genannt wird.

2. Wird das Rechteck um den Cylinder herumgelegt, ſo fallen cd und $\gamma\delta$ zuſammen und bilden eine Linie auf der Oberfläche des Cylinders, welche zu der Axe deſſelben parallel läuft. Zieht man alſo ke parallel zu cd, ſo muß auch dieſe parallel zur Axe ſein, und es iſt nun $fg = gh$; demnach ſind von jeder auf der Oberfläche des Cylinders parallel zur Axe gezogenen Linie die durch die Schraubenlinie abgeſchnittenen Stücke gleich groß.

3. Jeder Theil der Schraubenlinie zwiſchen zwei aufeinander folgenden Durchſchnittspunkten einer zur Axe parallelen Linie, wie $d\alpha = a\beta = b\gamma$ oder auch $f\alpha + ag = g\beta + bh$ ꝛc. bildet einen **Schraubengang**.

4. Man nehme den Umfang der Grundfläche des Cylinders als Abſciſſenlinie und ſetze die Höhe eines Schraubenganges $= h$, ſo gehören zu der Abſciſſe $de = x$ die Ordinaten $ef = y$, $eg = y' = h + y$, $eh = y'' = 2h + y'$ ꝛc.

Nun iſt $de : ef = d\delta : \delta\alpha$

alſo $x : y = 2r\pi : h$

folglich iſt $y = \frac{hx}{2r\pi}$

und daher $y' = h + \frac{hx}{2r\pi} = \frac{h\,(2r\pi + x)}{2r\pi}$

$$y'' = 2h + \frac{hx}{2r\pi} = \frac{h\,[2 \cdot 2r\pi + x]}{2r\pi}$$

$$y''' = 3h + \frac{hx}{2r\pi} = \frac{h\,[3 \cdot 2r\pi + x]}{2r\pi}$$ u. ſ. w.

und dieses ist die Gleichung für die Schraubenlinie. Es sind also, wenn man die Abscisse de als bloß zu der Ordinate ef gehörig ansieht, und die zu der Ordinate eg gehörige Abscisse als aus einem ganzen Umfange = $d\delta$ und de bestehend ꝛc., bei der Schraubenlinie die Ordinaten den Abscissen proportionirt.

5. Für jeden Punkt g der Schraubenlinie ist, wie sich unmittelbar ergiebt, in dem Rechteck $cd\delta\gamma$ die Linie $a\beta$, in welcher g liegt, die Tangente dieses Punktes, und da die Linien $d\alpha$, $a\beta$, $b\gamma$..., in welchen alle Punkte der Schraubenlinie liegen müssen, parallel laufen, so folgt, daß die Tangenten aller Punkte die Abscissenlinie unter demselben Winkel = $\alpha d\delta = \varphi$ schneiden, und weil die Tangente immer die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, welches normal auf der Grundfläche des Cylinders steht, so folgt, daß die Tangenten aller Punkte der Schraubenlinie die Grundfläche des Cylinders ebenfalls unter demselben Winkel = φ schneiden.

Da nun $d\delta : \delta\alpha = 1 : \operatorname{tg}\varphi$

so ist auch $2r\pi : h = 1 : \operatorname{tg}\varphi$ und daher $\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{2r\pi}$

die Formel für die Tangente des Neigungswinkels gegen die Grundfläche.

6. Bringt man auf der Oberfläche eines Cylinders in der Richtung einer auf demselben verzeichneten Schraubenlinie eine überall gleich starke Hervorragung an, so bildet diese ein Schraubengewinde, und der mit einem solchen Gewinde bekleidete Cylinder wird eine Schraubenspindel genannt. Ein cylindrisch ausgehöhlter Körper, in dessen Höhlung Einschnitte in der Richtung einer Schraubenlinie angebracht sind, so daß die Spindel genau hineinpaßt, ist eine Schraubenmutter, die mit der dazu gehörigen Spindel zusammen eine Schraube giebt. Bei dem Gebrauche derselben wird entweder die Mutter festgehalten und die Spindel darin herumgedreht und so fortgetrieben, wie dieses bei der Weinpresse der Fall ist, oder die Spindel wird festgehalten und die Mutter um dieselbe herumgedreht und dadurch fortbewegt, wie bei der Buchbinderpresse. Oefters wird auch umgekehrt die Spindel herumgedreht und die Mutter dadurch fortbewegt, wie dieses bei der Zimmermannsschraube, durch welche ganze

ebäude in die Höhe gehoben werden, der Fall ist. In allen esen Fällen aber bestimmt sich das Verhältniß der Kraft r Last ganz auf dieselbe Weise, und es braucht daher zur estellung der Theorie auf diese besonderen Gattungen nicht ücksicht genommen zu werden.

7. Wenn eine Spindel in einer unbeweglichen Schraubenmutter enthalten ist und es wirkt auf den Kopf der pindel in der Richtung der Axe eine Kraft = P, so vertheilt sich der hierdurch entstehende Druck gleichförmig über s ganze Gewinde, und es werden also hierdurch alle Theile r Einschnitte der Schraubenmutter gleich stark gedrückt, so ß auf jeden Theil ein Druck $= \frac{1}{n}P$ kommt, wenn die Anhl aller Theile = n gesetzt wird. Ist, Fig. 80., g ein solr Theil, auf welchen also ein Druck $= \frac{1}{n}P$ in der Richng ge wirkt, so befindet sich diese Kraft auf einer unter m Winkel φ gegen den Horizont geneigten Ebene, und ll dieselbe durch eine an g parallel zur Grundfläche angebrachte Kraft z im Gleichgewicht erhalten werden, so muß, ach §. 43.,

$$z = \frac{1}{n}P \operatorname{tg} \varphi$$

und daher $nz = n \cdot \frac{1}{n}P \operatorname{tg} \varphi = P \operatorname{tg} \varphi$ sein.

Weil aber die Kraft P in n gleiche Theile getheilt sein soll, e alle auf gleiche Art wirken, so ist nz = X die zu dem Gleichgewichte mit P erforderliche Kraft an der Schraube, nd es ist daher, wenn P in der Richtung der Axe auf die Spindel wirkt und X am Umfange derselben parallel zur Grundfläche, die Gleichung für das Gleichgewicht

$$X = P \operatorname{tg} \varphi$$

oder weil $\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{2r\pi}$, so ist $X = \frac{hP}{2r\pi}$

hieraus folgt

$$2r\pi : h = P : X$$

n Zustande des Gleichgewichts verhält sich also bei der abe die auf dieselbe drückende Last zu der erforderlichen

Kraft, wie der Umfang der Grundfläche zu der Höhe eines Schraubenganges.

8. Aus dieſer Regel geht zugleich hervor, daß, unter übrigens gleichen Umſtänden, die zu dem Gleichgewicht erforderliche Kraft X deſto kleiner ſein kann, je geringer die Höhe der Schraubengänge iſt.

9. In der Formel $X = \frac{hP}{2r\pi}$ bedeutet P den Druck, welchen die Schraube in der Richtung der Axe erleidet, h iſt die Höhe der Schraubengänge und r der Radius der Grundfläche. Damit aber für X ein richtiger Werth erhalten werde, muß man den Werth von r größer als den Radius der Spindel $= \varrho$ und geringer als dieſen Radius + der ganzen Stärke des Gewindes $= \delta$, alſo geringer als $\varrho + \delta$ annehmen; man nimmt daher gewöhnlich das arithmetiſche Mittel zwiſchen ϱ und $\varrho + \delta$ als die Größe des Radius r an und ſetzt daher $r = \varrho + \frac{1}{2}\delta$.

10. Die Kraft, durch welche das Gleichgewicht hergeſtellt wird, wirkt gewöhnlich nicht unmittelbar an der Fläche des Cylinders, ſondern mittelſt eines Hebels in einiger Entfernung von derſelben. Setzt man die Länge dieſes Hebels von der Axe des Cylinders an gerechnet $= R$ und die an dem Endpunkte deſſelben normal gegen den Hebel und parallel zur Grundfläche wirkende Kraft $= X'$, ſo iſt, weil man X nur in einer Entfernung von der Axe $= r$ wirkend denkt,

$$X' : X = r : R, \text{ alſo } X = \frac{RX'}{r}$$

Nun iſt aber $X = \frac{hP}{2r\pi}$, alſo wird auch

$$\frac{RX'}{r} = \frac{hP}{2r\pi} \text{ und daher } X' = \frac{hP}{2R\pi}$$

$$\text{alſo } X' : P = h : 2R\pi$$

Es iſt aber $2R\pi$ der Umfang des Kreiſes, welchen der Angriffspunkt der Kraft beſchreibt, während die Laſt um die Höhe eines Schraubenganges bewegt wird; alſo verhält ſich bei der Schraube allgemein die Kraft zur Laſt, wie die Höhe eines Schraubenganges zu dem Umfange des Kreiſes, deſſen Radius der Abſtand des Angriffspunktes der Kraft von der

re ist. Zugleich geht hieraus auch hervor, daß sich die Kraft ar Last umgekehrt verhält, wie die in gleichen Zeiten zurückelegten Wege. Ist z. B. die Höhe eines Schraubenganges = 1″ und der Hebel, an welchem die Kraft wirkt, = $1\frac{1}{2}$ Fuß = 18″, so ist

$$X' : P = 1 : 36\pi = 1 : 113$$

nd also in diesem Falle $X' = \frac{P}{113}$. Die Kraft braucht also Theil $\frac{1}{113}$ der Last zu betragen.

Fünfter Abschnitt.

Die Statik der biegsamen Fäden.

§. 51.

Erklärungen.

1. Unter einem Faden versteht man in der Mechanik eine vollkommen biegsame physische Linie, also eine Linie, die ohne alle Kraftanstrengung in jede beliebige Figur gekrümmt werden kann, und es ist daher in dieser Hinsicht der Faden dem Hebel, welcher als eine vollkommen unbiegsame Linie angenommen wird, gerade entgegengesetzt.

2. Außer der vollkommenen Biegsamkeit wird bei einem Faden vorausgesetzt, daß er unausdehnbar sei, also bei jeder auf ihn wirkenden Kraft seine Länge unverändert beibehalte, und zugleich wird er als hinlänglich fest oder vielmehr stark angenommen, um dem Zerreißen zu widerstehen.

3. Wird ein Faden mit einem seiner Endpunkte befestigt, und man bringt an dem andern Ende desselben ein Gewicht an, so kann dasselbe nur alsdann ruhen, wenn der Faden eine gerade Linie bildet, die senkrecht auf dem Horizonte ist. Denn wenn der Faden vollkommen biegsam ist, so kann er nur in dieser Richtung dem Fallen des Körpers widerstehen, und der Körper erhält hierdurch eine solche Lage, daß sein Schwerpunkt dem Mittelpunkte der Erde möglichst nahe ist, und sich

den, unter ſich nie im Gleichgewichte ſein können, läßt ſich zwiſchen denſelben, wenn ſie gleich groß ſind, mittelſt einer Rolle immer das Gleichgewicht herſtellen; doch iſt dabei zu berückſichtigen, daß durch die Rolle noch eine dritte Kraft hinzukommt, nämlich der Druck auf den Punkt g, an welchem die Rolle befeſtigt iſt und um den ſie ſich dreht. Es entſteht daher bei dem Gleichgewicht an der Rolle immer ein Druck auf die Axe derſelben, deſſen Größe und Richtung eben ſo beſtimmt wird, wie der Druck auf den Unterſtützungspunkt eines Hebels.

4. Der Druck, welchen der Punkt g durch die an der Rolle angebrachten Kräfte A und B erleidet, iſt, wie bei dem Hebel, eben ſo groß, als wenn dieſe Kräfte parallel zu ihrer Richtung unmittelbar in g angebracht werden. Weil aber bei dem Gleichgewicht an der Rolle $A = B$ ſein muß, ſo iſt auch, wenn man $g\alpha$ zu aA und $g\beta$ zu bB parallel zieht, und gC die Richtung des Druckes auf g ſein ſoll, $\angle \alpha gC = \angle \beta gC$. Verlängert man aber Aa und Bb, bis ſie ſich in c ſchneiden, und zieht cg, ſo wird durch dieſe Linie ebenfalls der Winkel $AcB = \alpha g\beta$ halbirt, folglich giebt die verlängerte cg die Richtung des Druckes an, welchen der Punkt g durch die Kräfte A und B erleidet. Wird die Größe dieſes Druckes $= C$ und der Winkel $AcB = c$ geſetzt, ſo iſt hiernach

$$A : C = \sin\tfrac{1}{2}c : \sin c = \sin\tfrac{1}{2}c : 2\sin\tfrac{1}{2}c \cdot \cos\tfrac{1}{2}c$$

$$\text{oder } A : C = 1 : 2\cos\tfrac{1}{2}c$$

$$\text{und es iſt daher } C = 2A\cos\tfrac{1}{2}c$$

Dieſer Druck C wird am größten für $c = 0$, wenn alſo A und B parallel wirken, es iſt alsdann $C = 2A$; und C wird am kleinſten für $c = 180°$, wenn alſo die Richtungen von A und B gerade entgegengeſetzt ſind, alsdann iſt $C = 0$.

5. Iſt die Rolle in g befeſtigt und wirken zwei Kräfte A und B an derſelben, die durch einen Faden mit einander verbunden ſind, ſo nennt man die Rolle *eine feſte Rolle*, und es müſſen die Kräfte A und B gleich groß ſein, wenn Gleichgewicht ſtatt finden ſoll; durch eine feſte Rolle wird alſo nichts an Kraft gewonnen, ſie gewährt aber den weſentlichen Vortheil, daß die beiden Kräfte unter jeder beliebigen Richtung im Gleichgewicht bleiben: daher wird ſie vorzüge-

bannt, daß der der Kraft A gegenüberliegende Winkel = a der der Kraft B gegenüberliegende = b, und der der ft C gegenüberliegende = c, und findet unter diesen ständen Gleichgewicht statt: so müssen dieselben Bedin- gsgleichungen statt finden, als wenn überhaupt drei fte A, B und C auf g in den angegebenen Richtungen ken; denn da A mit B und C im Gleichgewichte steht, so diese Kraft, in entgegengesetzter Richtung angebracht, den ften B und C äquipollent, und daher die Diagonale des allelogramms sein, von welchem B und C die Seiten sind. Bedingung für das Gleichgewicht wird daher durch die portion ausgedrückt

$$A : B : C = \sin a : \sin b : \sin c$$

die einzelnen Größen hängen daher hier eben so von ein- r ab, wie bei dem Parallelogramm der Kräfte.

§. 52.

Von der Rolle.

1. Die Rolle ist eine kreisrunde Scheibe, welche sich um ihren Mittelpunkt drehen kann, und es wird dieses eder dadurch bewirkt, daß in dem Mittelpunkte normal n ihre Fläche eine Axe eingesetzt ist, mit welcher die Rolle eiden Seiten in Pfannen liegt, oder der Mittelpunkt ist brochen und die Scheibe auf einen festen Bolzen gesteckt, welchen sie sich frei dreht. In dem ersten Falle dreht die Axe mit der Rolle und in dem letztern dreht die Rolle um den unbeweglichen Bolzen.

2. Von zwei an einer Rolle angebrachten Kräften sagt sie wirken nach entgegengesetzten Richtungen, wenn sie be nach entgegengesetzten Seiten umzudrehen sich bestre- Sind nun an zwei Punkten a und b des Umfangs ei- Rolle, Fig. 82., zwei Kräfte A und B in den Richtun- er Tangenten dieser Punkte angebracht, welche nach ent- gesetzten Richtungen wirken, und ist A = B, so sind en im Gleichgewicht; denn zieht man die Radien ga gb, so ist agb ein gleicharmiger gebrochener Hebel, an m die Kräfte A und B unter rechtem Winkel wirken.

3. Während zwei Kräfte, deren Richtungen sich schnei-

gend eine an dem Mittelpunkte der Rolle g angebrachte Last = C kann also nur durch eine unendlich große Kraft A im Gleichgewicht erhalten werden, wenn Ac mit cB in gerader Linie liegen soll, und hieraus geht unmittelbar hervor, daß ein schwerer Faden durch keine noch so große Kraft in gerader Linie gespannt werden kann.

9. Soll A = C sein, so wird $C = \frac{C}{2\cos\frac{1}{2}c}$, also ist dieses der Fall für $2\cos\frac{1}{2}c = 1$, und sonach für

$$\cos\tfrac{1}{2}c = \tfrac{1}{2}, \text{ d. i. für } \tfrac{1}{2}c = 60°.$$

Es ist also A = B = C, wenn agb = 120°. Ist dieser Winkel größer als 120°, so wird A < C, und es ist A > C sobald agb < 120° ist.

10. Ist B ein fester Punkt und wird durch eine Vermehrung der Kraft A die Rolle gehoben, so wickelt sich nach und nach ein Theil des Fadens bB um die Rolle, während bei a ein Theil des Fadens frei wird. Berührt nun der Punkt β die Rolle, so rückt A um eine Strecke = bβ in der Richtung aA durch das Heben der Rolle fort, und außerdem noch eben so weit, weil bei a ein Theil des Fadens = bβ von der Rolle frei wird. Für bβ = a ist also der Weg, den die Kraft A zurücklegt, = 2a. Der Weg, den in derselben Zeit der Punkt g parallel zu bB durchläuft, ist = bβ = a und hieraus findet man den Weg parallel zu cg = a $\cos\frac{1}{2}c$; dieses ist der Weg der Kraft C parallel zu ihrer Richtung.

§. 53.

Der Rollen- und Flaschenzug und Aufgaben über denselben.

Befinden sich an den in a und b, Fig. 84., befestigten Fäden die beweglichen Rollen A und B, die selbst dadurch mit einander verbunden sind, daß das zweite Ende des um A gehenden Fadens an der Axe von B fest ist; sind auf diese Weise mehrere Rollen mit einander verbunden, und geht endlich das zweite Ende des letzten Fadens über eine feste Rolle X, so nennt man diese Vorrichtung einen Rollenzug. Diese Vorrichtung nun führt zu den folgenden Aufgaben:

Aufgabe 1. Ein Rollenzug besteht aus n beweglichen Rollen, an der Axe der ersten A ist eine Last = C angebracht,

beacht, die mit einer Kraft P an der festen Rolle X im Gleichgewicht ist; es soll die Abhängigkeit der Größen n, Q und P von einander bestimmt werden, wenn das Gewicht der Rollen selbst unbeachtet bleibt.

Auflösung. Setzt man die gleiche Spannung der Fäden α'a und α''B, welche die Rolle A halten, = a, und den Winkel, unter welchem diese Fäden verlängert sich schneiden, = α, so ist, nach §. 52. No. 3.,

$$Q = 2a\cos\tfrac{1}{2}\alpha, \text{ also } a = \frac{Q}{2\cos\frac{1}{2}\alpha}$$

und dieses ist die an der Axe der Rolle B wirkende Last. Wird also die Spannung der Fäden der Rolle B = b, und der Winkel, unter welchem sie sich schneiden, = β, so ist

$$b = \frac{a}{2\cos\frac{1}{2}\beta} = \frac{Q}{2^2\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta}$$

Eben so findet man die Spannung c der Fäden einer dritten Rolle C

$$c = \frac{b}{2\cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{Q}{2^3\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}$$

u. s. w.

Folglich ist die Spannung des letzten über die feste Rolle X gehenden Fadens, welche mit P im Gleichgewicht und daher auch = P sein muß, durch die Gleichung bestimmt

$$P = \frac{Q}{2^n\cos\frac{1}{2}\alpha\cdot\cos\frac{1}{2}\beta\cdot\cos\frac{1}{2}\gamma\ldots}$$

wo der Nenner außer 2^n noch aus n Factoren besteht.

Ist nun $\alpha = \beta = \gamma\ldots$, laufen also die Fäden aα', b$\beta'\ldots$, und eben so auch auf der andern Seite α''B, β''C... parallel, so wird

$$P = \frac{Q}{2^n(\cos\frac{1}{2}\alpha)^n}$$

und es wird P am kleinsten für den möglichst großen Werth von $\cos\frac{1}{2}\alpha$, wenn also $\cos\frac{1}{2}\alpha = 1$ und sonach $\alpha = 0$ wird, d. i. wenn die Fäden sämmtlich unter sich parallel sind, nämlich nicht bloß aα' zu bβ', sondern auch zu α''B ꝛc.; unter diesen Bedingungen wird $P = \frac{Q}{2^n}$. Uebrigens ist leicht einzusehen, daß bei einer solchen Vorrichtung die Last Q nur

sehr wenig gehoben werden kann, indem von A an jede folgende Rolle immer schneller steigt und daher A die geringste Bewegung erhält.

Aufgabe 2. Es sollen die Bedingungen für das Gleichgewicht bei einem Rollenzuge angegeben werden, wenn auch das Gewicht der Rollen berücksichtigt wird, und dabei, wie dieses gewöhnlich der Fall ist, die Fäden sämmtlich unter sich parallel vorausgesetzt werden.

Auflösung. Setzt man die an x''P erforderliche Kraft, welche mit Q im Gleichgewichte sein soll, = X; die Kraft an x''P, welche mit der Rolle A, die ein Gewicht = A hat, im Gleichgewicht steht, = A'; die mit B, deren Gewicht = B ist, im Gleichgewicht stehende Kraft = B' ꝛc.: so ist, nach Aufgabe 1.,

$$X = \frac{1}{2^n} \cdot Q;\ A' = \frac{1}{2^n} \cdot A$$

$$B' = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot B;\ C' = \frac{1}{2^{n-2}} \cdot C \ldots$$

Wenn also P alles im Gleichgewicht erhalten soll, so muß

$$P = X + A' + B' + C' \ldots$$
$$= \frac{Q}{2^n} + \frac{A}{2^n} + \frac{B}{2^{n-1}} + \frac{C}{2^{n-2}} \ldots + \frac{M}{2} \text{ sein,}$$

und dieses ist die gesuchte Gleichung, welche dadurch eine einfachere Form erhält, daß gewöhnlich die Rollen sämmtlich eine gleiche Schwere haben. Setzt man nämlich A = B = C ... = M, so wird

$$P = \frac{Q}{2^n} + M\left[\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} \cdots + \frac{1}{2}\right]$$
$$= \frac{Q}{2^n} + \frac{M}{2^n}\,(1 + 2 + 2^2 + 2^3 \ldots + 2^{n-1})$$
$$= \frac{Q}{2^n} + \frac{M}{2^n}\,(2^n - 1)$$

und es wird daher endlich

$$P = \frac{Q - M}{2^n} + M.$$

Die erforderliche Kraft P wird also, wie groß auch die An-

zahl der Rollen sein mag, wegen des Gewichts dieser Rollen doch nie um das ganze Gewicht einer Rolle vermehrt.

Aufgabe 3. Es soll überhaupt die Abhängigkeit der Größen bei einem Rollenzuge von einander näher bestimmt werden.

Auflösung. Aus der Gleichung

$$P = \frac{Q - M}{2^n} + M$$

folgt unmittelbar, daß, wenn drei von den 4 Größen P, M, Q und n gegeben sind, die vierte durch Rechnung gefunden werden kann, und es ist hiernach

$$1)\ P = \frac{Q - M}{2^n} + M;\quad 2)\ Q = 2^n (P - M) + M$$

$$3)\ M = \frac{2^n P - Q}{2^n - 1} \text{ und } 4)\ 2^n = \frac{Q - M}{P - M}$$

Aus der letzten Gleichung kann der Werth von n mit Hülfe der Logarithmen gefunden werden. Uebrigens versteht es sich von selbst, daß für n nur ganze Zahlen brauchbar sind.

Aufgabe 4. Sind mehrere Rollen in einem Kloben so mit einander verbunden, daß sich zwar jede derselben frei herumdrehen, keine aber ohne den Kloben fortbewegen kann, so nennt man diese Verbindung der Rollen eine Flasche, und sind zwei solche Flaschen durch einen Faden so mit einander verbunden, daß das eine Ende des Fadens an dem einen Kloben befestigt ist, und nun abwechselnd um die Rollen beider Flaschen geht, so wird diese Vorrichtung ein Flaschenzug genannt, dessen Gebrauch darin besteht, daß die eine Flasche befestigt ist, und an der andern die Last sich befindet, welche durch eine an dem andern Ende des Fadens angebrachte Kraft bewegt wird. Es sollen die Bedingungen für das Gleichgewicht bei dieser Vorrichtung angegeben werden.

Auflösung. Ist die Anzahl der durch die Flasche, an welcher die Last = Q sich befindet, gespannten Fäden = n, so ist, weil die Spannung aller Fäden gleich groß sein muß, die Spannung eines jeden Faden = $\frac{1}{n}$ Q, und eben so groß muß auch die an dem zweiten Ende des Fadens erforderliche

Kraft P sein, durch welche Q im Gleichgewicht erhalten wird, und es ist daher die gesuchte Gleichung

$$Q = nP$$

wobei Q das Gewicht der Last mit Einschluß des Gewichts der beweglichen Flasche bedeutet.

Zusatz 1. Besteht die bewegliche Flasche aus m Rollen, und ist das erste Ende des Fadens an der unbeweglichen Flasche befestigt, so wird in der Formel $Q = nP$ der Werth von $n = 2m$; ist das erste Ende des Fadens aber an der beweglichen Rolle befestigt, so wird $n = 2m + 1$, und es verdient daher immer die letztere Vorrichtung den Vorzug.

Zusatz 2. Die Formel $Q = nP$ ist nur in dem Falle vollkommen richtig, wenn die Fäden sämmtlich parallel sind und die Friction unbeachtet bleibt; diese ist jedoch so bedeutend, daß nur innerhalb bestimmter Gränzen die Anzahl der Rollen vermehrt werden darf, wenn nicht durch die Friction an Kraft mehr verloren gehen soll, als durch die hinzugekommenen Rollen gewonnen wird: was in der zweiten Abtheilung dieses Bandes berücksichtigt werden soll.

§. 54.

Uebungen.

Aufgabe 1. Ein in a und b, Fig. 85., befestigter Faden amb, dessen Länge gegeben ist, hat eine bewegliche Schlinge, an welcher eine Kraft nach einer gegebenen Richtung wirkt; es soll angegeben werden, in welcher Lage der Faden durch diese Kraft im Gleichgewicht erhalten wird.

Auflösung. Man ziehe an b die Linie be unter dem Winkel fbe, unter welchem die gegebene Richtung der Kraft die ab schneidet; beschreibe aus a mit einem Radius, der der ganzen Länge des Fadens gleich ist, einen Kreisbogen, welcher die be in d schneide; halbire bd in g und errichte in diesem Punkte auf bd die Normale gm, welche ad in m schneidet. Zieht man nun mb, so ist amb die gesuchte Lage des Fadens, und wenn man durch m die nP parallel zu be zieht, so ist mP die Lage und Richtung der Kraft für das Gleichgewicht. Die Richtigkeit dieser Auflösung läßt sich auf folgende Art einsehen: Da die Kraft P sich an einer beweglichen Schlinge

efindet, so muß, eben so als wenn P an einer Rolle sich efände, am und mb durch P eine gleiche Spannung erleiden, nd es muß also auch, weil die an ma und mb wirkenden räfte, oder, was hier dasselbe ist, die Spannung dieser Fä-en, wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel bmP und mP sich verhalten, $\angle bmP = \angle amP$ sein, und daher auch $bmn = \angle amn$. Es wird also bei dem Gleichgewichte der Winkel amb durch Pmn halbirt, was hier vermöge der Con-ruction nothwendig der Fall sein muß: denn es ist $mb = md$ nd daher $\angle mdb = \angle mbd$; da nun $\angle mdb = \angle amn$ und $mbd = \angle bmn$, so ist auch $\angle amn = \angle bmn$.

Zusatz 1. Aus dem gegebenen Richtungswinkel der raft $bnm = fbe = \alpha$ läßt sich der Winkel $bmn = \varphi$ leicht rechnen, denn es ist

$$bm : bn = \sin\alpha : \sin\varphi$$

Weil aber der Winkel amb durch mn halbirt wird, so ist $m : bn = am + mb : an + nb = ad : ab$, und folg-ch ist auch

$$ad : ab = \sin\alpha : \sin\varphi$$

Setzt man also die Länge des ganzen Fadens $ad = 2a$ und ie Länge von $ac = 2c$, so ist

$$a : c = \sin\alpha : \sin\varphi$$

$$\text{und daher } \sin\varphi = \frac{c\sin\alpha}{a}$$

Zusatz 2. Die Größe der Spannung $= X$, welche die heile ma und mb des Fadens durch die Kraft P erleiden, ßt sich nun ebenfalls leicht berechnen; denn es ist

$$P : X = \sin amb : \sin bmP$$

$$\text{oder } P : X = \sin 2\varphi : \sin\varphi = 2\cos\varphi : 1$$

$$\text{und daher ist } X = \frac{P}{2\cos\varphi}$$

a aber $\sin^2\varphi = \frac{c^2}{a^2}\sin^2\alpha$, so ist $\cos^2\varphi = 1 - \frac{c^2}{a^2}\sin^2\alpha$ d daher wird

$$X = \frac{aP}{2\sqrt{(a^2 - c^2\sin^2\alpha)}}$$

Zusatz 3. Da die Länge des Fadens amb bestimmt , so sind bei jeder Lage desselben, wenn die Theile gleiche

Spannung haben, am und mb zuſammengehörige Leitſtrahlen einer Elypſe, in deren Umfang m liegt, und es ſind a und b die Brennpunkte derſelben. Wird alſo ab in c halbirt, ſo iſt c der Mittelpunkt dieſer Elypſe, am + mb = 2a die große Axe derſelben, ca = cb = e die halbe Excentricität, und die halbe kleine Axe = b iſt hierdurch ebenfalls beſtimmt, weil immer $b^2 + c^2 = a^2$ ſein muß. Zieht man nun von m die Normale mx auf ab, ſetzt cx = x und xm = y, ſo iſt, weil durch mn der Winkel amb halbirt wird, nx die Subnormale des Punktes m der Elypſe, und es iſt daher

$$nx = Sn = \frac{b^2 x}{a^2}$$

Nun iſt (nx) : (xm) = 1 : tg α

alſo auch Sn : y = 1 : tg α

daher $y = Sn \operatorname{tg} \alpha = \frac{b^2 x}{a^2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$

und weil die Gleichung für die Elypſe iſt

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

ſo wird auch $\frac{b^4 x^2}{a^4} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$

und daher $b^2 x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + a^2 x^2 = a^4$

folglich iſt $x = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)}}$

eine Gleichung, durch welche ſich ebenfalls die Lage des Punktes m für das Gleichgewicht leicht beſtimmen läßt.

Aufgabe 2. Der an a und b, Fig. 85., befeſtigte Faden ſoll durch eine Kraft P, welche an einer beweglichen Schlinge ſich befindet, ſo geſpannt werden, daß, indem Gleichgewicht ſtatt findet, die Richtung der Kraft P durch einen gegebenen Punkt p geht.

Auflöſung. Es ſei amb die geſuchte Lage des Fadens, und alſo mp die Richtung der Kraft P, ſo muß, wie bei der vorigen Aufgabe, ∠bmn = ∠amn ſein, und es iſt alſo, weil m ein Punkt in dem Umfange der Elypſe iſt, von welcher a und b die Brennpunkte ſind, nx die Subnormale des Punktes m. Zieht man aber von p die Normale pq auf ab, ſo

sind cq = q und qp = p bekannt, weil die Lage des Punktes p gegeben ist, und da

$$nx : xm = nq : qp$$

so ist auch $Sn : y = q - (cn) : p$

oder weil $(cn) = cx - nx = x - Sn$, so ist

$$Sn : y = q - x + Sn : p$$

also auch $\frac{b^2x}{a^2} : y = q - x + \frac{b^2x}{a^2} : p$

und daher wird $b^2x : y = a^2q - x(a^2 - b^2) : p = a^2q - c^2x : p$

Es ist also $y = \frac{pb^2x}{a^2q - c^2x}$

und weil auch $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$ sein muß,

so erhält man $\frac{p^2b^4x^2}{(a^2q - c^2x)^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$

und daher $a^2p^2b^2x^2 = (a^2q - c^2x)^2 (a^2 - x^2)$

eine Gleichung vom vierten Grade, durch welche der Werth von x berechnet werden kann.

Aufgabe 3. Drei Fäden sind in einem festen Knoten mit einander verbunden, und es wirken an denselben drei Kräfte A, B und C; es soll die Lage des Knotens m, Fig. 86., so bestimmt werden, daß die Kräfte an diesem Faden sich im Gleichgewicht erhalten, und ihre Richtungen durch die drei gegebenen Punkte α, β und γ gehen.

Auflösung. Setzt man die Winkel $\alpha m\beta = c$, $\alpha m\gamma = b$ und $\beta m\gamma = a$, so muß, weil die Kräfte sich im Gleichgewicht erhalten sollen,

$$A : B : C = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$ sein

für $\alpha + \beta + \gamma = 360^0$, und es ist daher, wie sich leicht einsehen läßt, wenn man die Richtung cC der einen Kraft C rückwärts verlängert, und nun ein Parallelogramm entwirft, dessen Diagonale mit der verlängerten Cc und dessen Seiten mit den Richtungen $b\alpha$ und $b\beta$ zusammenfallen,

$$\cos a = -\frac{B^2 + C^2 - A^2}{2BC};\quad \cos b = -\frac{A^2 + C^2 - B^2}{2AC}\text{ und}$$

$$\cos c = -\frac{A^2 + B^2 - C^2}{2AB}$$

Die Winkel a, b und c sind also durch die drei gegebe-

nen Kräfte A, B und C ihrer Größe nach vollkommen bestimmt. Da man sonach in dem Dreieck $\alpha m \beta$ die Seite $\alpha\beta$ und den gegenüberliegenden Winkel c kennt, so läßt sich ein Kreis beschreiben, in welchem c der Peripheriewinkel des Bogens ist, zu dem $\alpha\beta$ als Sehne gehört. Eben so kann man einen Kreis beschreiben, in welchem b als Peripheriewinkel zu dem Bogen gehört, von welchem $\alpha\gamma$ die Sehne ist; beide Kreise schneiden sich in dem gesuchten Punkte m des Knotens.

Aufgabe 4. Drei Fäden sind in einem festen Knoten mit einander verbunden und es wirken an denselben die Kräfte A, B und C; es soll die Lage des Knotens m, Fig. 87, so bestimmt werden, daß die Kräfte im Gleichgewichte sind, die Richtungen von A und B durch die gegebenen Punkte α und β gehen, und der Faden, an welchem die Kraft C wirkt, über eine ihrer Größe und Lage nach gegebene Rolle γ läuft.

Auflösung. Da man die drei Kräfte A, B und C kennt, so sind, wie aus der vorigen Aufgabe sich ergiebt, auch die Winkel a, b und c ihrer Größe nach bekannt, und da $\alpha\beta$ gegeben ist, so kann ein Kreis $\alpha d \beta$ beschrieben werden, in welchem c der Peripheriewinkel des Bogens ist, zu dem $\alpha\beta$ als Sehne gehört. Es ist aber auch der Winkel a gegeben und daher kennt man auch seinen Nebenwinkel βmd; folglich ist der Bogen βd bekannt, zu welchem dieser Winkel als Peripheriewinkel gehört. Sonach ist der Punkt d bestimmt; wird nun von diesem Punkte aus eine Tangente an die Rolle γ gezogen, so schneidet diese den Kreis in dem Punkte m, in welchem der Knoten liegen muß.

Aufgabe 5. Drei Fäden sind in einem festen Knoten mit einander verbunden und es wirken an denselben die Kräfte A, B und C; man soll die Lage des Knotens m, Fig. 88, so bestimmen, daß die Kräfte im Gleichgewicht sind, die Richtung der einen A durch den gegebenen Punkt α geht und daß endlich die Fäden, an welchen die Kräfte B und C wirken, über die beiden gleich großen, ihrer Größe und Lage nach gegebenen Rollen β und γ laufen.

Auflösung. Es sei m die gesuchte Lage des Knotens, also mB und mC Tangenten der Rollen; man ziehe zu denselben durch die Mittelpunkte β und γ Parallelen, welche sich

schneiden, so muß eine durch m und μ gezogene Linie
die Winkel CmB und $\gamma\mu\beta$, welche gleich groß sind,
iren. Durch die gegebenen Kräfte A, B und C sind
die Winkel a, b und c bestimmt, und da β und γ gege-
sind, so kann man den Kreis $\beta d\gamma\mu$ beschreiben, in
chem $\angle\beta\mu\gamma = a$ der Peripheriewinkel des Bogens ist, zu
chem $\beta\gamma$ als Sehne gehört. Wird nun der Bogen $\beta\gamma$ in
albirt, so müssen die Punkte d, μ und m in gerader Linie
en; da nun $\angle dm\alpha = \frac{1}{2}a + b$ und auch die Linie $d\alpha$ be-
nt ist, so kann ein Kreis beschrieben werden, in welchem
die Sehne des Bogens ist, zu dem der Winkel $\frac{1}{2}a + b$
Peripheriewinkel gehört. Da ferner, wenn man den Radius
Rollen $= \varrho$ und $m\mu = d$ setzt,

$$d : \varrho = 1 : \sin\tfrac{1}{2}a \text{ sein muß,}$$

ist $d = \frac{\varrho}{\sin\frac{1}{2}a}$ bekannt, und es kommt sonach nun
ch darauf an, von d aus eine gerade Linie so zu ziehen,
ß das zwischen den beiden gezogenen Hülfskreisen liegende
tück derselben $= \mu m = d$ ist, um den gesuchten Punkt m
erhalten: eine Aufgabe, deren Auflösung keineswegs schwie-
ist. Man findet eine geometrische Auflösung dieser Auf-
be in meinen praktischen Uebungen für angehende Mathe-
tiker Band 2 Seite 57.

Aufgabe 6. An den drei Fäden eines festen Knotens
ken die Kräfte A, B und C; es soll die Lage des Kno-
s so bestimmt werden, daß die Kräfte im Gleichgewicht
d und die Fäden über drei gleiche Rollen laufen, die ihrer
öße und Lage nach gegeben sind.

Zusatz. Indem ich die Auflösung dieser Aufgabe der
nen Uebung überlasse, bemerke ich noch, daß die vorige
fgabe in dem Falle etwas schwieriger wird, wenn die bei-
gegebenen Rollen verschiedene Radien haben; es wird dem
nen Fleiß überlassen, auch für diesen Fall die Auflösung zu
suchen.

Aufgabe 7. An drei in einem festen Knoten mit ein-
er verbundenen Fäden wirken die Kräfte A, B und C; es
der Knoten eine solche Lage erhalten, daß die Richtung
einen Fadens parallel zu einer gegebenen Linie ist, und

die andern beiden über zwei ihrer Größe und Lage nach gegebene Rolle gehen.

Auflösung. Durch die Kräfte A, B und C sind auch die Winkel a, b und c gegeben, die in der gehörigen Lage an die Linie angetragen werden können, zu welcher die eine Richtung parallel sein soll, und man erhält hierdurch für die Richtungen aller drei Kräfte eine Lage, welche der gesuchten parallel ist. Werden also an beiden Rollen Tangenten gezogen, welche parallel zu den gefundenen Richtungen sind, so schneiden sich diese in der gesuchten Lage m des Knotens.

Zusatz. Die Auflösung ist ganz dieselbe, wenn statt der beiden Rollen nur eine Rolle und ein Punkt, oder wenn zwei Punkte gegeben sind.

Aufgabe 8. Das Dreieck $\alpha\beta\gamma$, Fig. 86, und die Winkel bei m, also a, b und c sind gegeben; man soll hieraus die drei Linien $m\alpha$, $m\beta$, und $m\gamma$ berechnen.

Auflösung. Setzt man $\beta\gamma = A$, $\alpha\gamma = B$, $m\gamma = X$, $\angle m\beta\gamma = \varphi$ und $\angle m\alpha\gamma = \psi$, so ist

$$A : X = \sin a : \sin \varphi \text{ und } B : X = \sin b : \sin \psi$$

$$\text{also } X = \frac{A \sin \varphi}{\sin a} \text{ und } X = \frac{B \sin \psi}{\sin b}$$

hiernach ist $A \sin b \sin \varphi = B \sin a \sin \psi$

und weil $\psi = 360^\circ - (\gamma + a + b) - \varphi$, wofür man setzen kann $\psi = S - \varphi$, so ist

$$A \sin b \sin \varphi = B \sin a \sin (S - \varphi)$$

nämlich es ist

$A \sin b \sin \varphi = B \sin a \sin S \cos \varphi - B \sin a \cos S \sin \varphi$

und hieraus folgt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B \sin a \sin S}{A \sin b + B \sin a \cos S}$$

Nun ist aber ganz allgemein $\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}}$ und daher, wenn $\operatorname{tg} \varphi = \frac{z}{n}$ gesetzt wird,

$$\sin \varphi = \frac{z}{\sqrt{(n^2 + z^2)}}$$

In dem gegenwärtigen Falle aber ist $z = B \sin a \sin S$ und $n = A \sin b + B \sin a \cos S$, also wird

$n^2 = A^2 \sin^2 b + 2AB \sin a \sin b \cos S + B^2 \sin^2 a \cos^2 S$

d $z^2 =$ $B^2 \sin^2 a \sin^2 S$

daher $n^2 + z^2 = A^2 \sin^2 b + 2AB \sin a \sin b \cos S + B^2 \sin^2 a$

mlich es ist, wenn man $A \sin b = \mathfrak{A}$ und $B \sin a = \mathfrak{B}$ setzt,

$$n^2 + z^2 = \mathfrak{A}^2 + 2\mathfrak{AB} \cos S + \mathfrak{B}^2$$

d daher wird nun

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B \sin a \sin S}{V(\mathfrak{A}^2 + 2\mathfrak{AB} \cos S + \mathfrak{B}^2)} = \frac{\mathfrak{B} \sin S}{V(\mathfrak{A}^2 + 2\mathfrak{AB} \cos S + \mathfrak{B}^2)}$$

d weil $X = \frac{A \sin \varphi}{\sin a}$, so wird

$$X = \frac{AB \sin S}{V(\mathfrak{A}^2 + 2\mathfrak{AB} \cos S + \mathfrak{B}^2)}$$

d weil $\cos S = \cos [360^0 - (a + b + \gamma)] =$
$\cos [180^0 - 360^0 + (a + b + \gamma)] = -\cos [(a + b + \gamma) - 180^0]$
d $\sin S = \sin [(a + b + \gamma) - 180^0]$, so wird, wenn
an $(a + b + \gamma) - 180^0 = T$ setzt,

$$X = \frac{AB \sin T}{V(\mathfrak{A}^2 - 2\mathfrak{AB} \cos T + \mathfrak{B}^2)}$$

nun $V(\mathfrak{A}^2 - 2\mathfrak{AB} \cos T + \mathfrak{B}^2)$ die dritte Seite des
reiecks ist, von welchem $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\angle T$ die beiden andern
eiten und den von denselben eingeschlossenen Winkel bedeu-
n. Setzt man also diese dritte Seite $= \mathfrak{D}$, so wird

$$X = \frac{AB \sin T}{\mathfrak{D}}$$

durch der Werth von $m\gamma = X$ bestimmt ist; ähnliche Aus-
icke erhält man für die Werthe von $m\alpha$ und $m\beta$. Aus
r Gleichung

$$X = \frac{AB \sin T}{\mathfrak{D}}$$

folgt übrigens $X\mathfrak{D} = AB \sin T$

d es ist daher X die Höhe eines Dreiecks, welches $\mathfrak{D}$ zur
undlinie hat, und dessen Fläche der eines Dreiecks gleich ist,
n welchem A und B zwei Seiten sind, die den Winkel
$= (a + b + \gamma) - 180^0$ einschließen.

Aufgabe 9. Ein in a und b, Fig. 89., befestigter
n hat zwei feste Knoten, an welchen die Kräfte P und Q
parallelen Richtungen wirken; es soll das Verhältniß
Kräfte zu einander angegeben werden, wenn der Fa-

den in der Lage $a\alpha\beta b$ durch dieselben im Gleichgewicht erhalten werden soll.

Auflösung. Setzt man die Spannung des Theils $\alpha\beta$ des Fadens $= Z$, so muß, wenn Gleichgewicht statt finden soll,

$$P : Z = \sin \alpha : \sin \varphi$$
$$\text{und } Z : Q = \sin \varphi' : \sin \beta \text{ sein.}$$

Verlängert man aber $a\alpha$ und $b\beta$, bis sie die Richtungen der Kräfte P und Q in q und p schneiden, so ist, weil diese Richtungen parallel sein sollen,

$\psi = p\beta q = 180^\circ - \varphi'$ und $\psi' = q\alpha p = 180^\circ - \varphi$

und daher ist auch

$$P : Z = \sin (180^\circ - \alpha) : \sin \psi'$$
$$\text{und } Z : Q = \sin \psi : \sin (180^\circ - \beta)$$

Es ist aber $\alpha\beta : \alpha p = \sin \psi : \sin (180^\circ - \beta)$

$$\text{und } \beta q : \alpha\beta = \sin (180^\circ - \alpha) : \sin \psi'$$

folglich ist auch $P : Z = \beta q : \alpha\beta$

$$\text{und } Z : Q = \alpha\beta : \alpha p$$

$$\text{und daher } P : Q = \beta q : \alpha p$$

Die Kräfte P und Q müssen sich also umgekehrt zu einander verhalten, wie die Stücke, welche von ihren Richtungen durch die verlängerten $b\beta$ und $a\alpha$ abgeschnitten werden.

Anmerkung. Eytelwein zeigt in dem zweiten Bande seiner Statik Seite 15., wie diese Vorrichtung als eine Wage benutzt werden kann.

Aufgabe 10. An dem Punkte q, Fig. 90., befindet sich eine auf dem Horizonte aufliegende Last, welche durch eine in der horizontalen Richtung qad angebrachte Kraft $= Q$ im Gleichgewicht erhalten wird; statt deren wirkt aber eine Kraft in m an dem Faden am, an welchem zwei andere Fäden mv und mz sich befinden: es sollen die in der Richtung dieser Fäden erforderlichen Kräfte V und Z bestimmt werden, welche der Q äquipollent sind.

Auflösung. Wird die in der Richtung ad wirkende Kraft Q in zwei Kräfte zerlegt, von welchen die eine R normal auf ad ist, und die andere P mit am zusammenfällt, so wird R durch den Horizont getragen, und es ist $Q = P \cos \alpha$;

P muß aber den Kräften Z und V äquipollent sein, also ist

$$P : Z : V = \sin\beta : \sin\gamma : \sin(\beta + \gamma)$$

und hieraus folgt

$$Z = \frac{P \sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{Q \sin\gamma}{\cos\alpha \sin\beta}$$

$$\text{und } V = \frac{P \sin(\beta + \gamma)}{\sin\beta} = \frac{Q \sin(\beta + \gamma)}{\cos\alpha \sin\beta}$$

Formeln, die für jede Richtung der Kräfte Z und V richtig sind. Ist nun mz parallel ad, und mv normal auf mz, also $\angle zmv = 90°$, so wird

$\sin\beta = \sin 90° = 1$, $\sin\gamma = \cos\alpha$ und $\sin(\beta + \gamma) = \sin\alpha$

und es ist daher in diesem Falle

$$Z = \frac{Q \cos\alpha}{\cos\alpha} = Q \text{ und } V = \frac{Q \sin\alpha}{\cos\alpha} = Q \operatorname{tg}\alpha$$

Zusatz 1. Soll die Last Q durch ein Pferd fortgeschafft werden, so ist am das Zugseil, mz parallel ad die Lage des Brustriemens und mv normal auf mz die des Tragriemens, und es geben daher die Ausdrücke $Z = Q$ und $V = Q \operatorname{tg}\alpha$ die erforderliche Kraft des Pferdes. Da $Z = Q$, so folgt, daß das Pferd immer die ganze Last Q zu ziehen hat, und $V = Q \operatorname{tg}\alpha$ giebt den normalen Druck, welchen das Pferd durch den Tragriemen erleidet: dieser Druck wird desto kleiner, je kleiner der Winkel α ist. Setzt man die Höhe des Punktes m über dem Horizonte $mc = h$, und die Länge des Zugseils $am = l$, so ist $ac = \sqrt{(l^2 - h^2)}$, und da

$ac : cm = 1 : \operatorname{tg}\alpha$, also $\sqrt{(l^2 - h^2)} : h = 1 : \operatorname{tg}\alpha$

so ist $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{\sqrt{(l^2 - h^2)}}$, und der Druck wird daher

$$V = \frac{hQ}{\sqrt{(l^2 - h^2)}}$$

Hieraus geht also hervor, daß der Druck desto geringer wird, je größer der Werth von l ist, je mehr also die Länge des Zugseils beträgt.

Zusatz 2. Sind h, Q und V gegeben, so läßt sich die entsprechende Länge l des Zugseils leicht berechnen; denn es ist

$$l^2 = \frac{h^2 Q^2}{V^2} + h^2 = \frac{h^2 (Q^2 + V^2)}{V^2}$$

$$\text{und daher } l = \frac{h\sqrt{(Q^2 + V^2)}}{V}$$

l iſt alſo in dieſem Falle der Höhe h proportionirt, und ſo findet man auch umgekehrt

$$h = \frac{l \cdot V}{\sqrt{(Q^2 + V^2)}}$$

§. 55.

Aufgaben über die durch Gewichte geſpannten Fäde

Aufgabe 1. Ein in den Punkten m und n, Fig. geſpanntes Seil iſt in mehreren Punkten b, c, d, e d Gewichte belaſtet; es ſoll das Verhältniß der Spannung einzelnen Theile deſſelben beſtimmt werden.

Auflöſung. Zieht man von den Punkten b, c, d, e Senkrechten bA, cB, dC, eD, ſo geben dieſe Linien die R tungen der Gewichte A, B, C und D, und es ſind dieſe Richt gen ſämmtlich unter ſich parallel. Außerdem ziehe man nun von den Punkten m und n, an welchen das Seil befe iſt, die Senkrechten mM und nN, ſetze die Winkel, welche Senkrechten mM, bA, cB ꝛc. mit den einzelnen Theilen mb, cd ꝛc. des Seiles bilden, a, b, c, d... und die Spannung Theile des Seiles α, β, γ, δ ꝛc., ſo iſt A mit α und β Gleichgewicht, B mit β und γ, C mit γ und δ u. ſ. w., und e

$\angle mbA = 180° - a$, $\angle bcB = 180° - b$ ꝛc.

daher iſt

$$\alpha : \beta = \sin b : \sin a$$
$$\beta : \gamma = \sin c : \sin b$$
$$\text{alſo } \alpha : \gamma = \sin c : \sin a$$
$$\text{ferner } \gamma : \delta = \sin d : \sin c$$
$$\text{alſo } \alpha : \delta = \sin d : \sin a$$
$$\text{ferner } \delta : \varepsilon = \sin e : \sin d$$
$$\text{folglich } \alpha : \varepsilon = \sin e : \sin a$$

Hieraus geht alſo hervor, daß die Spannungen der einzel Theile des Fadens zu einander ſich umgekehrt verhalten, w die Sinus der Winkel, welche die Richtungen dieſer Thei den Senkrechten bilden. Es iſt nämlich

$$\alpha : \beta = \sin b : \sin a$$
$$\alpha : \gamma = \sin c : \sin a$$
$$\alpha : \delta = \sin d : \sin a$$
$$\beta : \delta = \sin d : \sin b \text{ ꝛc.}$$

Aufgabe 2. Es soll die Abhängigkeit der Spannung der einzelnen Theile eines Seiles von den Gewichten angegeben werden, durch welche dasselbe gespannt wird.

Auflösung. Es ist $\angle mbc = 360^\circ - (b + 180^\circ - a) = 180^\circ - b + a$

und daher $\sin(mbc) = \sin(b - a)$

eben so ist $\sin(bcd) = \sin(c - b)$, $\sin(cde) = \sin(d - c)$ ꝛc.

Hiernach ist

$$A : \alpha = \sin(b - a) : \sin b$$
$$B : \beta = \sin(c - b) : \sin c$$
$$C : \gamma = \sin(d - c) : \sin d$$
$$D : \delta = \sin(e - d) : \sin e \text{ ꝛc.}$$

Hieraus folgt nun $A = \frac{\alpha \sin(b - a)}{\sin b} =$

$\frac{\alpha}{\sin b}(\sin b \cos a - \cos b \sin a) = \alpha \cos a - \frac{\alpha \cos b \sin a}{\sin b}$

und weil $\alpha : \beta = \sin b : \sin a$, also $\alpha \sin a = \beta \sin b$, so ist auch $\frac{\alpha \cos b \sin a}{\sin b} = \beta \cos b$, und es wird daher

$$A = \alpha \cos a - \beta \cos b$$

und aus demselben Grunde $B = \beta \cos b - \gamma \cos c$

folglich $A + B = \alpha \cos a - \gamma \cos c$

ferner $C = \gamma \cos c - \delta \cos d$

und sonach $A + B + C = \alpha \cos a - \delta \cos d$

endlich $D = \delta \cos d - \varepsilon \cos e$

folglich $A + B + C + D = \alpha \cos a - \varepsilon \cos e$

Die Summe der Gewichte wird also erhalten, wenn man die Spannung des ersten Theils und die des letzten, jede mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, welchen die Richtung dieser Spannung mit der Senkrechten bildet, und beide Produkte von einander abzieht. Nämlich es ist

$$A = \alpha \cos a - \beta \cos b$$
$$A + B = \alpha \cos a - \gamma \cos c$$

$$A + B + C = \alpha \cos a - \delta \cos d$$
$$B + C = \beta \cos b - \delta \cos d \text{ ꝛc.}$$

Aufgabe 3. Zwei Theile eines durch mehrere Gewichte geſpannten Fadens haben die Spannungen α und ε; es ſoll die Größe und Richtung einer Kraft X gefunden werden, die mit denſelben im Gleichgewicht iſt.

Auflöſung. Verlängert man die Richtungen der beiden Theile, deren Spannungen α und ε ſein ſollen, bis ſie ſich in x ſchneiden, Fig. 92., ſo iſt $\angle mxn = x = a + \varphi$, und es muß nun, weil X mit α und ε im Gleichgewichte ſein ſoll,

$$\alpha : \varepsilon = \sin \psi : \sin \psi' \text{ ſein.}$$

Nach Aufgabe 1. iſt aber auch

$$\alpha : \varepsilon = \sin e : \sin a = \sin \varphi : \sin a$$

folglich iſt $\sin \psi : \sin \psi' = \sin \varphi : \sin a$

und hieraus folgt unmittelbar

$$\psi + \varphi = \psi' + a = 180°$$

die Richtung von X iſt alſo parallel zu mM und nN, und es hat ſonach X dieſelbe Richtung mit den ſpannenden Gewichten, nämlich ſenkrecht gegen den Horizont.

Ferner iſt $\alpha : X = \sin \psi : \sin x$

und daher auch $\alpha : X = \sin \varphi : \sin (a + \varphi)$

folglich iſt $X = \frac{\alpha \sin (a + \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{\alpha (\sin a \cos \varphi + \cos a \sin \varphi)}{\sin \varphi}$

nämlich es iſt $X = \frac{\alpha \sin a \cos \varphi}{\sin \varphi} + \alpha \cos a$

und weil $\alpha \sin a = \varepsilon \sin \varphi$, ſo iſt auch

$$X = \varepsilon \cos \varphi + \alpha \cos a$$

Es iſt aber $\cos \varphi = -\cos e$, folglich iſt endlich

$$X = \alpha \cos a - \varepsilon \cos e$$

Nach Aufgabe 2. iſt aber auch, Fig. 91.,

$$A + B + C + D = \alpha \cos a - \varepsilon \cos e$$

folglich iſt $X = A + B + C + D$

Hieraus geht alſo hervor, daß die zu den Spannungen α und ε erforderliche dritte Kraft X der Summe der ſpannenden Kräfte gleich iſt, und zu denſelben eine parallele Richtung hat; werden alſo die Richtungen zweier geſpannten Theile des Seiles verlängert, bis ſie ſich ſchneiden, ſo giebt der Durchſchnittspunkt

punkt die mittlere Richtung der zwischen diesen beiden Theilen liegenden spannenden Gewichte.

Aufgabe 4. Der Theil cd des Seiles, Fig. 91., ist horizontal; es soll das Verhältniß der Spannung γ dieses Theils zu der des ersten Theils $= \alpha$, und das Verhältniß dieser Spannungen zu den spannenden Gewichten bestimmt werden.

Auflösung. Nach Aufgabe 1. ist $\alpha : \gamma = \sin c : \sin a$ und nach Aufgabe 2. wird $A + B = \alpha \cos a - \gamma \cos c$ Da nun cd horizontal sein soll, so ist $\angle c = 90°$, und es wird daher

$$\alpha : \gamma = 1 : \sin a, \text{ folglich } \alpha = \frac{\gamma}{\sin a}$$

$$\text{und } A + B = \alpha \cos a$$

oder, wenn überhaupt die Summe der spannenden Gewichte $= S$ gesetzt wird, $S = \alpha \cos a$

Aus den beiden Gleichungen erhält man endlich noch

$$S = \gamma \cot a$$

Aufgabe 5. Ein vollkommen biegsames schweres Seil ist mit seinen Endpunkten in m und n, Fig. 93., befestigt und hängt frei herunter; es sollen die Grundeigenschaften der von demselben gebildeten Curve mcn angegeben werden.

Auflösung. Wird die Spannung irgend eines Theils y des Seiles $= T$ gesetzt, so muß man diese Spannung als in der Richtung der Tangente Tt des Punktes y wirkend ansehen; zieht man also durch y eine Senkrechte und bildet diese mit der Tangente einen Winkel $= \varphi$, so ist, wenn die Spannung des horizontalen Theils des Seiles $= \gamma$ gesetzt wird, wie bei einem mit Gewichten belasteten, an und für sich gewichtlosen Faden, nach Aufgabe 4., $\alpha = \frac{\gamma}{\sin a}$ und also hier, wo $\alpha = T$ und $a = \varphi$ sein soll,

$$T = \frac{\gamma}{\sin \varphi} \text{ und daher } T \sin \varphi = \gamma$$

Die Summe der Gewichte, durch welche die Spannung zwischen y und c erzeugt wird, ist hier das Gewicht des Theils dem Seile, und wird dieses Gewicht $= V$ gesetzt, so (nach Aufgabe 4.) $S = \gamma \cot a$ sein muß und hier $S = V$ und $a = \varphi$ sein soll,

$$V = \gamma \cot \varphi$$

Durch die beiden Gleichungen

$$T \sin \varphi = \gamma \text{ und } V = \gamma \cot \varphi$$

und die hieraus abgeleiteten $T \sin \varphi = \frac{V}{\cot \varphi}$, also

$$V = T \cos \varphi$$

sind nun die Eigenschaften der von einem schweren Seile gebildeten Curve vollkommen bestimmt. Man nennt diese Curve **die Kettenlinie.**

§. 56.

Aufgaben und Uebungen von der Kettenlinie.

Aufgabe 1. Es sollen die Grundeigenschaften der Kettenlinie, unabhängig von den Sätzen des vorhergehenden §, abgeleitet werden.

Auflösung. Es sei in der Curve mcn, Fig. 93, m und n in derselben Horizontale; c der Scheitel, also der niedrigste horizontale Punkt der Curve; die Spannung desselben $= \gamma$ und die irgend eines andern Punktes $y = T$; die Richtung der Tangente von y bilde mit der Vertikalen durch y einen Winkel $= \varphi$, und es sei durch c die Abscissenlinie ca senkrecht auf mn, die zu dem Punkte y gehörige Abscisse $cx = x$ und die Ordinate $xy = y$. Ferner gehöre zu einem folgenden Punkte die Abscisse $cx' = x'$; es werde die dazu gehörige Ordinate $= y'$; die Spannung des Punktes y', dem diese Coordinaten entsprechen, $= T'$ und der Winkel, den die Richtung der Tangente desselben mit der Vertikalen bildet, $= \varphi'$. Außerdem sei das Gewicht von $cy = V$ und das von $cy' = V'$. Setzt man nun $x' = x + dx$, so wird $y' = y + dy$, $T' = T + dT$, $\varphi' = \varphi + d\varphi$ (also $d\varphi$ negativ, weil hier $\varphi > \varphi'$ sein muß) und $V' = V + dV$, also $V' - V = dV$. Das Gleichgewicht der Curve wird nicht aufgehoben, wenn man das Seil irgendwo, z. B in c durchschneidet und an dem Durchschnittspunkte eine Kraft in der Richtung der Tangente dieses Punktes anbringt, welche der hier stattfindenden Spannung gleich ist. Wird demnach das Seil bei c und bei y durchschnitten, so müssen an dem Theilchen $= dV$ die Kräfte T und T' mit dV im Gleichgewichte sein, und der Winkel, welchen die Richtung von T mit der Senk-

rechten bildet, iſt = φ und der, welchen T′ mit derſelben macht, = φ'; das Gewicht von dV aber wirkt in der ſenkrechten Richtung vV. Es müſſen alſo jetzt die drei Kräfte T, T′ und dV in den, Fig. 93ª, angegebenen Richtungen unter ſich im Gleichgewichte ſein und weil der der Kraft

T gegenüberliegende Winkel = $180^0 - \varphi'$

dV " " = $180^0 - (\varphi - \varphi')$

ſo iſt $T : T' : dV = \sin \varphi' : \sin \varphi : \sin (\varphi - \varphi')$

nämlich es iſt, weil $\sin (\varphi - \varphi') = \sin (- d\varphi) = - d\varphi$,

$$T : dV = \sin \varphi' : - d\varphi$$

und hieraus folgt $- Td\varphi = dV \sin \varphi' \ldots$ (a)

aber, weil $\sin \varphi' = \sin (\varphi + d\varphi) = \sin \varphi \cdot \cos d\varphi + \cos \varphi \cdot \sin d\varphi$

$$= \sin \varphi + \cos \varphi \, d\varphi,$$

$$- Td\varphi = dV \sin \varphi + dV \cos \varphi \, d\varphi$$

wo das Glied $dV \cos \varphi \cdot d\varphi$ als ein Differential der zweiten Ordnung verſchwindet; daher iſt

$$\text{I.} \quad - Td\varphi = dV \sin \varphi$$

ferner iſt $T : T' = \sin \varphi' : \sin \varphi$

und daher auch $T : T' - T = \sin \varphi' : \sin \varphi - \sin \varphi'$

alſo, da $T' - T = dT$,

$$dT \sin \varphi' = T [\sin \varphi - \sin \varphi']$$

$$= T [\sin \varphi - \sin (\varphi + d\varphi)]$$

$$= T [\sin \varphi - \sin \varphi \cos d\varphi - \cos \varphi \sin d\varphi]$$

und weil $\cos d\varphi = 1$ und $\sin d\varphi = d\varphi$, ſo wird

$$dT \sin \varphi' = - T \cos \varphi \, d\varphi$$

Es iſt aber nach (a)

$- Td\varphi = dV \sin \varphi'$, folglich iſt auch

$dT \sin \varphi' = \cos \varphi \cdot dV \sin \varphi'$

folglich wird II. $dT = dV \cos \varphi$.

Die beiden Differentialgleichungen

I. $- Td\varphi = dV \sin \varphi$ und II. $dT = dV \cos \varphi$

laſſen nun auf folgende Art ſich integriren: Es folgt

aus I. $- Td\varphi \cos \varphi = dV \sin \varphi \cos \varphi$

aus II. $\sin \varphi dT = dV \sin \varphi \cos \varphi$

folglich iſt $- Td\varphi \cos \varphi = \sin \varphi dT$

und daher wird

$$\sin \varphi \cdot dT + Td\varphi \cos \varphi = 0$$

nämlich es iſt $d (T \sin \varphi) = 0$

und hieraus erhält man unmittelbar

$$T \sin \varphi + \text{Const} = 0$$

Für $\varphi = 90°$ aber fällt y mit c zuſammen, und es iſt alsdann $T = \gamma$ die Spannung des horizontalen Punktes, folglich iſt

$$\gamma + \text{Const} = 0 \text{ und alſo } \text{Const} = -\gamma$$

dieſes giebt die Gleichung

$$T \sin \varphi = \gamma$$

welche mit der erſten, §. 55. Aufgabe 5., erhaltenen Formel übereinſtimmt.

Nach der zweiten Differentialgleichung iſt

$$dT = dV \cos \varphi$$

da man nun hier $T = \frac{\gamma}{\sin \varphi}$ gefunden hat, ſo iſt auch

$$d\left(\frac{\gamma}{\sin \varphi}\right) = dV \cos \varphi$$

nämlich, weil hier γ eine Conſtante iſt,

$$\frac{-\gamma \cos\varphi \, d\varphi}{\sin^2 \varphi} = dV \cos \varphi$$

$$\text{und daher } dV = -\frac{\gamma d\varphi}{\sin^2 \varphi}$$

$$\text{alſo } V = \gamma \int \frac{-d\varphi}{\sin^2 \varphi} = \gamma \cot \varphi + \text{Const}$$

man findet aber Const. $= 0$, weil, für $\varphi = 90°$, $V = 0$ werden muß; daher iſt

$$V = \gamma \cot \varphi$$

und dieſes iſt die zweite, §. 55. in der 5ten Aufgabe, gefundene Gleichung.

Zuſatz. Wird die in y wirkende Kraft der Spannung $= T$, die in der Richtung der Tangente wirkt, in eine horizontale Kraft $= X$ und in eine vertikale $= Z$ zerlegt, ſo findet man

$$X = T \sin \varphi \text{ und } Z = T \cos \varphi$$

und es iſt daher $X = \gamma$ und $Z = \frac{\gamma}{\sin \varphi} \cdot \cos\varphi = \gamma \cot\varphi = V$

Hieraus geht alſo hervor, daß der horizontale Theil der Spannung eines jeden Punktes y, der Spannung γ des horizontalen Punktes c, und der vertikale Theil der Spannung, dem

Gewichte von cy gleich ist. Der Werth von T wird also desto größer, je weiter der Punkt y von c abliegt, und es ist derselbe daher bei m am größten.

Aufgabe 2. Es soll angegeben werden, wie die Abscisse cx = x und die dazu gehörige Ordinate xy = y von der Länge des Bogens cy = S und von dem Gewichte desselben = V abhängt.

Auflösung. Es ist, Fig. 93.,

$$tx : xy = 1 : tg\ \varphi$$

also, da tx die Subtangente des Punktes y ist,

$$St : y = 1 : tg\ \varphi$$

und weil ganz allgemein $St = \frac{ydx}{dy}$, so ist

$$dx : dy = 1 : tg\ \varphi$$

und daher $tg\ \varphi = \frac{dy}{dx}$

Da nun $V = \gamma\ cot\ \varphi$, also $tg\ \varphi = \frac{\gamma}{V}$ ist, so wird

$$\frac{\gamma}{V} = \frac{dy}{dx} \text{ und daher } \gamma dx = Vdy$$

Ferner ist, weil S die Länge des Bogens cy sein soll,

$$(dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

wo nun hier entweder für dy der Werth $= \frac{\gamma dx}{V}$ oder $dx = \frac{Vdy}{\gamma}$ gesetzt werden kann, wodurch man die beiden Gleichungen erhält

$$1)\quad dx = \frac{VdS}{V(V^2 + \gamma^2)}$$

$$\text{und } 2)\quad dy = \frac{\gamma dS}{V(V^2 + \gamma^2)}$$

Diese Ausdrücke sind vollkommen bestimmt, sobald die Abhängigkeit des Gewichts V des Bogens cy von der Länge S desselben bekannt ist, sobald man also die Function kennt, welche den Werth von V durch S ausdrückt. Gewöhnlich ist V der Länge S proportionirt, indem das Gewicht eines überall gleich starken Seils direct mit der Länge desselben wächst; setzt man bei dieser Voraussetzung das Gewicht der Längeneinheit des Seiles = g, so wird V = gS, und die Curve wird in diesem Falle eine **gemeine Kettenlinie** genannt.

Aufgabe 3. Es iſt $V = gS$; man ſoll beſtimmen, wie unter dieſer Bedingung x und y von der Länge S des Seiles abhängen.

Auflöſung. Die Formeln für dx und dy enthalten außer V und S noch die Conſtante γ als eine Kraft, und es iſt daher, weil man das Gewicht der Längeneinheit des Seiles $= g$ kennt, auch die Länge c von dem Seile beſtimmt, deren Gewicht $= \gamma$ ſein muß; man kann daher $\gamma = gc$ ſetzen. Nun iſt, nach Aufgabe 2.,

$$dx = \frac{V dS}{\sqrt{(V^2 + \gamma^2)}}$$

folglich iſt auch $dx = \frac{gS dS}{\sqrt{(g^2S^2 + g^2c^2)}} = \frac{S dS}{\sqrt{(c^2 + S^2)}}$

und daher wird $x = \int \frac{S dS}{\sqrt{(c^2 + S^2)}} = \sqrt{(c^2 + S^2)} + \text{Const}$

und weil für $x = 0$ auch $S = 0$ wird, ſo iſt

$0 = \sqrt{c^2} + \text{Const}$ und daher $\text{Const} = -c$

ſonach iſt 1) $x = -c + \sqrt{(c^2 + S^2)}$

Ferner iſt $dy = \frac{\gamma dS}{\sqrt{(V^2 + \gamma^2)}} = \frac{gc dS}{\sqrt{(g^2S^2 + g^2c^2)}} = \frac{c dS}{\sqrt{(c^2 + S^2)}}$

und daher wird $y = c \int \frac{dS}{\sqrt{(c^2 + S^2)}}$

Nach Meier Hirſch's Integraltafeln S. 141. iſt aber

$$\int \frac{dS}{\sqrt{(c^2 + S^2)}} = \log [S + \sqrt{(c^2 + S^2)}]$$

folglich iſt auch $y = c \log [S + \sqrt{(c^2 + S^2)}] + \text{Const}$

und weil für $y = 0$ auch $S = 0$ iſt, ſo wird

$0 = c \log c + \text{Const}$ und daher $\text{Const} = -c \log c$

alſo iſt $y = c \log [S + \sqrt{(c^2 + S^2)}] - c \log c$

nämlich 2) $y = c \log \left[\frac{S + \sqrt{(c^2 + S^2)}}{c}\right]$

Aufgabe 4. Es ſoll angegeben werden, wie bei einer Kettenlinie und der Vorausſetzung, daß $V = gS$ iſt, x und y von einander abhängen.

Auflöſung. Nach Aufgabe 3. No. 1. iſt

$$x = -c + \sqrt{(c^2 + S^2)}$$

folglich $(x + c)^2 = c^2 + S^2$, alſo $S = \sqrt{(x^2 + 2cx)}$

Nach No. 2. derſelben Aufgabe aber iſt

$$y = c \log \left[\frac{S + \sqrt{(c^2 + S^2)}}{c}\right]$$

es ist also auch, wenn man hier für S den Werth setzt,

$$1)\quad y = c \log \left[\frac{\sqrt{(x^2 + 2cx)} + x + c}{c}\right]$$

die gesuchte Gleichung, durch welche ausgedrückt wird, wie y von x und c abhängt. Will man umgekehrt ermitteln, wie x von y und c abhängt, so muß aus dieser Gleichung der Werth von x durch Reduction bestimmt werden. Es ist also

$$\frac{y}{c} = \log \left[\frac{\sqrt{(x^2 + 2cx)} + x + c}{c}\right]$$

und daraus folgt, weil hier überall natürliche Logarithmen verstanden werden, wenn man die Grundzahl der natürlichen Logarithmen = e setzt,

$$e^{\frac{y}{c}} = \frac{\sqrt{(x^2 + 2cx)} + x + c}{c}$$

Hiernach ist, wenn man einstweilen $e^{\frac{y}{c}} = Y$ setzt,

$$cY - (c + x) = \sqrt{(x^2 + 2cx)}$$

und daher

$$c^2Y^2 - 2cY\,(c + x) + (x + c)^2 = x^2 + 2cx$$

$$\text{also } c^2Y^2 - 2cY\,(c + x) + c^2 = 0$$

$$\text{folglich ist } 2cY\,(c + x) = c^2Y^2 + c^2$$

$$\text{und sonach } 2Yx = cY^2 + c - 2cY$$

daher wird

$$x = c\left[\frac{Y^2 + 1 - 2Y}{2Y}\right] = \frac{c}{2}\left[Y + Y^{-1} - 2\right]$$

$$\text{und endlich 2)}\quad x = \frac{c}{2}\left[e^{\frac{y}{c}} + e^{-\frac{y}{c}} - 2\right].$$

Aufgabe 5. Es soll angegeben werden, wie y, unabhängig von c, durch S und x bestimmt werden kann.

Auflösung. Nach Aufgabe 3. ist

$$x = -c + \sqrt{(S^2 + c^2)}$$

$$\text{und daher } (x + c)^2 = S^2 + c^2$$

$$\text{also ist } x^2 + 2cx = S^2 \text{ und } c = \frac{S^2 - x^2}{2x}$$

Wird dieser Werth von c substituirt in der Gleichung

$$y = c \log \left[\frac{\sqrt{(x^2 + 2cx)} + c + x}{c}\right]$$

ſo erhält man

$$y = \left(\frac{S^2 - x^2}{2x}\right) \log \left\{\frac{S + \frac{S^2 - x^2}{2x} + x}{\frac{S^2 - x^2}{2x}}\right\}$$

$$= \left(\frac{S^2-x^2}{2x}\right)\log\left[\frac{2Sx+S^2+x^2}{S^2-x^2}\right]=\left(\frac{S^2-x^2}{2x}\right)\log\left(\frac{(S+x)^2}{(S+x)(S-x)}\right)$$

und daher iſt endlich

$$y = \frac{S^2 - x^2}{2x} \log \left(\frac{S + x}{S - x}\right)$$

Aufgabe 6. Es iſt der Werth von $\gamma = gc$ gegeben; man ſoll die entſprechende Curve verzeichnen.

Auflöſung 1. Nach Aufgabe 3. iſt

$$x = - c + \sqrt{(c^2 + S^2)}$$

und $y = c \log \left[\frac{S + \sqrt{(c^2 + S^2)}}{c}\right] = c \log \left[\frac{S + c + x}{c}\right]$

Setzt man nun in dieſen Gleichungen nach und nach S = a, 2a, 3a, 4a..., ſo erhält man für x und y die zuſammengehörigen Werthe

$$x = - c + \sqrt{(c^2 + a^2)}; \quad y = c \log \left(\frac{a + c + x}{c}\right)$$

$$x = - c + \sqrt{(c^2 + 4a^2)}; \quad y = c \log \left(\frac{2a + c + x}{c}\right)$$

$$x = - c + \sqrt{(c^2 + 9a^2)}; \quad y = c \log \left(\frac{3a + c + x}{c}\right)$$

$$x = - c + \sqrt{(c^2 + 16a^2)}; \quad y = c \log \left(\frac{4a + c + x}{c}\right)$$

u. ſ. w., u. ſ. w.

wo jedes Mal, um y zu finden, der dazu gehörige Werth von x benutzt wird, und der von y durch natürliche Logarithmen ausgedrückt iſt.

Berechnet man auf dieſe Weiſe eine hinreichende Anzahl von Coordinaten, und nimmt für a einen ſehr geringen Werth, ſo werden mehrere nahe nebeneinander liegende Punkte der Curve gefunden, durch welche dieſelbe ſich conſtruiren läßt. Uebrigens verſteht es ſich von ſelbſt, daß jedem Werthe von x zwei gleich große, nach entgegengeſetzten Richtungen liegende

rdinaten zugehören, daß also ca, Fig. 93., eine Axe der urve ist.

Auflösung 2. Nach §. 55. Aufgabe 5. ist $V = \gamma \cot\varphi$

und daher auch $\cot\varphi = \frac{gS}{gc} = \frac{S}{c}$

etzt man nun einen sehr kleinen Theil der Curve, Fig. 93., $y' = a$, $cy = S$, $cx = x$, $xy = y$, die Zunahme der Abissse, während die Curve um a wächst, $= \Delta x$, und die Zuahme der Ordinate $= \Delta y$, so wird

$a : \Delta x = 1 : \cos\varphi$ und $a : \Delta y = 1 : \sin\varphi$

ıglich ist für $\cot\varphi = \frac{S + a}{c}$

$$\Delta x = a\cos\varphi \text{ und } \Delta y = a\sin\varphi$$

s ist also jetzt für

$S = 0$, $\cot\varphi' = \frac{a}{c}$; $\Delta x' = x' = a\cos\varphi'$; $\Delta y' = y' = a\sin\varphi'$

$S = a$, $\cot\varphi'' = \frac{2a}{c}$; $\Delta x'' = a\cos\varphi''$; $\Delta y'' = a\sin\varphi''$

$S = 2a$, $\cot\varphi''' = \frac{3a}{c}$; $\Delta x''' = a\cos\varphi'''$; $\Delta y''' = a\sin\varphi'''$

$S = 3a$, $\cot\varphi^{IV} = \frac{4a}{c}$; $\Delta x^{IV} = a\cos\varphi^{IV}$; $\Delta y^{IV} = a\sin\varphi^{IV}$

u. s. w., u. s. w.

emnach ist, wenn nach und nach die Abscissen mit x', x'', $''$, x^{IV} ꝛc., und die dazu gehörigen Ordinaten mit y', y'', $'''$, y^{IV} ꝛc. bezeichnet werden,

ot $\varphi' = \frac{a}{c}$; $x' = a\cos\varphi'$ und $y' = a\sin\varphi'$

ot $\varphi'' = \frac{2a}{c}$; $x'' = x' + a\cos\varphi''$ und $y'' = y' + a\sin\varphi''$

ot $\varphi''' = \frac{3a}{c}$; $x''' = x'' + a\cos\varphi'''$ und $y''' = y'' + a\sin\varphi'''$

ot $\varphi^{IV} = \frac{4a}{c}$; $x^{IV} = x''' + a\cos\varphi^{IV}$ und $y^{IV} = y''' + a\sin\varphi^{IV}$

u. s. w., u. s. w.

man kann auch auf diese Weise jede beliebige Anzahl von unkten der Curve bestimmen. Nimmt man übrigens für a

einen solchen Werth, daß c ein Vielfaches von a wird, c=na, so sind die Cotangenten der Hülfswinkel nach und nach

$$\varphi' = \frac{1}{n};\ \varphi'' = \frac{2}{n};\ \varphi''' = \frac{3}{n};\ \varphi^{IV} = \frac{4}{n}\ \text{ꝛc.}$$

Zusatz. Ist c nicht bekannt, sondern soll die C aus einigen andern gegebenen Stücken bestimmt werden kommt es bloß darauf an, aus diesen Stücken den W von c zu berechnen, und man kann, sobald dieses gesch ist, alsdann die Curve nach den obigen Anleitungen entwe Uebrigens ist bei der Construction der Curve noch immer in der ersten Auflösung angegebene Verfahren vorzuzi weil hierbei für jeden beliebigen Werth von S der entsprech Punkt der Curve richtig gefunden wird, während die z Auflösung nur bei unendlich kleinen Differenzen der auf ei der folgenden Werthe von S richtig ist, aber unbedingt fa Resultate giebt, sobald die Differenz zweier auf einander genden Werthe von S nur einigermaßen bedeutend ist; erhält alsdann immer die Abscissen zu groß.

Aufgabe 7. Man kennt die Länge des ganzen C men = 2L, Fig. 93., und den Abstand der, die beiden in ei Horizont liegenden Aufhängepunkte verbindenden Linie mn c, ca = 2g; es soll hieraus der Werth von c, das Verhä der Spannung vom Scheitel c zu der am Aufhängepunkt oder n und die Linie mn berechnet werden.

Auflösung. Setzt man in der Formel 1. Aufgabe

$$x = -c + \sqrt{(c^2 + S^2)}$$

$x = (ac) = g$ und $S = mc = L$, so wird

$$g + c = \sqrt{(c^2 + L^2)}$$

und hieraus erhält man unmittelbar

$$1)\quad c = \frac{L^2 - g^2}{2g}$$

Ferner ist $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\gamma}{V} = \frac{c}{S}$ und die Spannung $T = \frac{}{\sin}$

Da nun $\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}}$, so ist hier

$$\sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{(c^2 + S^2)}}$$

$$\text{alſo } T = \frac{\gamma\sqrt{(c^2 + S^2)}}{c}$$

und daher wird

$$\gamma : T = c : \sqrt{(c^2 + S^2)}$$

nämlich es iſt, weil

$$c^2+S^2=\frac{(L^2-g^2)^2}{4g^2}+L^2=\frac{L^4-2L^2g^2+g^2+4g^2L^2}{4g^2}=\left(\frac{L^2+g^2}{2g}\right)^2,$$

$$2)\ \gamma : T = \frac{L^2 - g^2}{2g} : \frac{L^2 + g^2}{2g} = L^2 - g^2 : L^2 + g^2$$

Endlich iſt

$$y = c \log\left[\frac{S + \sqrt{(c^2 + S^2)}}{c}\right]$$

alſo, da hier $\sqrt{(c^2 + S^2)} = \frac{L^2 + g^2}{2g}$ und $S = L$,

$$y = c \log\left[\frac{(L + g)^2}{2gc}\right] = c \log\left[\frac{(L + g)^2}{L^2 - g^2}\right]$$

und daher, wenn man die Linie am mit h bezeichnet,

$$3)\ h = \frac{L^2 - g^2}{2g} \log\left(\frac{L + g}{L - g}\right)$$

eine Formel, die auch unmittelbar aus Aufgabe 5. ſich ergiebt, wenn man dort $S = L$ und $x = g$ ſetzt.

Aufgabe 8. Von einer gemeinen Kettenlinie mcn, Fig. 93., iſt die obere Weite $mn = 2g$ und die Höhe $ac = h$ gegeben; es ſoll dieſelbe conſtruirt werden.

Auflöſung. Es kommt hier darauf an, aus der Abſciſſe $ac = x = h$ und der dazu gehörigen Ordinate $am = y = g$ entweder den Werth von S oder den von c zu beſtimmen, weil, wenn dieſe Größen bekannt ſind, die Conſtruction jedenfalls bewerkſtelligt werden kann. Es iſt aber, wie aus Aufgabe 4. und 5. ſich ergiebt, ſowohl die Gleichung zwiſchen x, y und c, als auch die zwiſchen x, y und S transcendent; nämlich es iſt

$$\frac{y}{c} = \log\left[\frac{\sqrt{(x^2 + 2cx)} + x + c}{c}\right]$$

$$\text{und } y = \frac{S^2 - x^2}{2x} \log\left(\frac{S + x}{S - x}\right)$$

und der Werth von S oder c kann daher aus x und y durch eine unendliche Reihe näherungsweiſe gefunden werden.

Ein ſolcher Näherungswerth läßt ſich auf folgende Art ableiten: Es iſt

$$y = \frac{S^2 - x^2}{2x} \log\left(\frac{S + x}{S - x}\right)$$

und daher auch $\frac{2xy}{S^2 - x^2} = \log\left\{\frac{1 + \frac{x}{S}}{1 + \frac{x}{S}}\right\}$

folglich iſt, wenn man $\frac{x}{S} = z$ ſetzt,

$$\frac{2xy}{S^2 - x^2} = \log\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} \ldots\right)$$

und daher wird

$$xy = (S^2 - x^2)\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} \ldots\right)$$

und $Szy = S^2 (1 - z^2)\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} \ldots\right)$

Hiernach iſt

$$y = S (1 - z^2)\left(1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} + \frac{z^6}{7} \ldots\right).$$

folglich $\frac{y}{S} = 1 - (1 - \frac{1}{3}) z^2 - (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) z^4 - (\frac{1}{5} - \frac{1}{7}) z^6 \ldots$

$$= 1 - \frac{2}{1 \cdot 3} z^2 - \frac{2}{3 \cdot 5} z^4 - \frac{2}{5 \cdot 7} z^6 - \frac{2}{7 \cdot 9} z^8 \ldots$$

und hieraus erhält man, wenn beide Theile der Gleichung zum Quadrat erhoben werden,

$$\frac{y^2}{S^2} = 1 - \frac{4}{3} z^2 + \frac{8}{45} z^4 + \frac{4}{63} z^6 + \frac{16}{525} z^8 \ldots$$

daher iſt auch

$$\frac{S^2 - y^2}{S^2} = \frac{4}{3} z^2 - \frac{8}{45} z^4 - \frac{4}{63} z^6 - \frac{16}{525} z^8 \ldots$$

und weil $S^2 = \frac{x^2}{z^2}$ iſt, ſo wird

$$\frac{S^2 - y^2}{x^2} = \frac{4}{3} - \frac{8}{45} z^2 - \frac{4}{63} z^4 - \frac{16}{525} z^6 \ldots$$

Hieraus findet Eytelwein in dem Anhange zu ſ Statik S. 112. den Näherungswerth

$$\frac{S^2 - y^2}{x^2} = \frac{4 (210 - 103 z^2)}{45 (14 - 5 z^2)}$$

und dieses giebt durch Reduction, wenn man z und S durch y und x ausdrückt,

$$y^2 = \frac{x\,(2520c^2 + 390cx - 23x^2)}{45\,(28c + 9x)}$$

oder genauer noch

$$y^2 = \frac{79888c^2x + 6913cx^2 - 157x^3}{39939c + 10000x}$$

woraus nun für die gegebenen Werthe von $x = g$ und $y = h$ der entsprechende Werth von c berechnet werden kann.

Zusatz. Man hat verschiedene praktische Methoden in Vorschlag gebracht, um aus x und y die dazu gehörigen Werthe von c und S kennen zu lernen, von welchen die einfachste die ist, daß man ein sehr biegsames Seil aufhängt, so daß mn und ac, Fig. 93., die gegebenen Dimensionen haben, und nun die Länge des Seiles mißt. Die Hälfte hiervon ist alsdann = S, woraus c leicht gefunden werden kann.

Außerdem hat man versucht, Hülfstabellen zur Bestimmung des Werthes von c zu berechnen, deren Einrichtung in Folgendem besteht: Nach Aufgabe 4. No. 2. ist

$$x = \frac{c}{2}\left[e^{\frac{y}{c}} + e^{-\frac{y}{c}} - 2\right]$$

und es ist daher, wenn man $y = mc$ setzt,

$$x = \frac{c}{2}\left[e^{m} + e^{-m} - 2\right]$$

wofür man $x = nc$ setzen kann,

$$\text{daher wird } \frac{x}{y} = \frac{n}{m}$$

Berechnet man also für verschiedene Werthe von m die dazu gehörigen von n, so ist für $\frac{x}{y} = \frac{n}{m}$ immer

$$y = mc \text{ und } x = nc$$

Wird nun eine Tabelle angefertigt, welche zu verschiedenen Werthen von $\frac{x}{y}$ die dazu gehörigen Werthe von y und x enthält, so läßt sich mit Hülfe derselben für jeden Fall der Werth von c leicht finden. Ist nämlich $x = h$ und $y = g$ gegeben, so sucht man in der Tabelle in der Spalte $\frac{x}{y}$ den

Werth $= \frac{g}{h}$ auf und findet nun daneben in der Spalte für y den Werth $y = mc$. Es ist also

$$g = mc \text{ und daher } \frac{g}{m} = c.$$

Eine solche Tabelle findet man in Eytelwein's Statik Bd. III. S. 107 u. f.

Aufgabe 9. Es sollen die Formeln für die Hülfslinien einer gemeinen Kettenlinie angegeben werden.

Auflösung. Die Formeln für die Subtangente und Subnormale sind ganz allgemein

$$St = \frac{ydx}{dy} \text{ und } Sn = \frac{ydy}{dx}$$

Nach Aufgabe 2. ist aber

$$dx = \frac{VdS}{V(V^2 + \gamma^2)} \text{ und } dy = \frac{\gamma dS}{V(V^2 + \gamma^2)}$$

folglich wird, wenn man diese Werthe benutzt,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{V}{\gamma} = \frac{S}{c}$$

und es ist daher 1) $St = \frac{Sy}{c}$ und 2) $Sn = \frac{cy}{S}$

Ferner ist, wie bekannt, die Formel für den Krümmungshalbmesser

$$\varrho = -\frac{[(dy)^2 + (dx)^2]^{\frac{3}{2}}}{dx \cdot d^2y} = \frac{-(dS)^3}{dx \cdot d^2y}$$

Da nun $\frac{dx}{dy} = \frac{S}{c}$

also $cdx = Sdy$

und daher, weil hier dx als constant angenommen wird, also $d^2x = 0$ ist,

$$0 = d(Sdy) = dSdy + Sd^2y$$

$$\text{und } d^2y = -\frac{dSdy}{S}$$

$$\text{so ist auch } \varrho = \frac{-(dS)^3}{-dx\left(\frac{dSdy}{S}\right)} = \frac{S(dS)^2}{dx \cdot dy}$$

$$= \frac{S[(dx)^2 + (dy)^2]}{dx \cdot dy} = S\left(\frac{dx}{dy} + \frac{dy}{dx}\right)$$

nämlich es ist $\varrho = S\left(\frac{S}{c} + \frac{c}{S}\right)$

und daher 3) $\varrho = \frac{S^2 + c^2}{c}$

weil $S^2 = x^2 + 2cx$, so wird endlich

$$\varrho = \frac{(x + c)^2}{c}$$

Aufgabe 10. Es soll der Schwerpunkt einer gemeinen tenlinie angegeben werden.

Auflösung. Ist für den Bogen mc, Fig. 93., die e des Schwerpunktes z durch $cx' = x'$ und $x'z = y'$ immt, so ist nach §. 35.

$$x' = \frac{\int x dS}{S} \text{ und } y' = \frac{\int y dS}{S}$$

n ist nach Aufgabe 3.

$c^2 + S^2 = (x + c)^2$, also $S^2 = x^2 + 2cx$

und daher $SdS = xdx + cdx$

folglich $xdS = \frac{x^2dx + cxdx}{S} = \frac{x^2dx + cxdx}{\sqrt{(2cx + x^2)}}$

emnach ist also $\int xdS =$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(2cx + x^2)}} + c\int \frac{xdx}{\sqrt{(2cx + x^2)}}$$

Nach Meier Hirsch's Integraltafeln S. 164. aber ist

$$\int \frac{x^2dx}{2cx + x^2} = \left(\frac{x}{2} - \frac{6c}{4}\right)\sqrt{X} + \frac{12c^2}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$c\int \frac{xdx}{2cx + x^2} = c\sqrt{X} - c^2\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

daher auch

$$\int xdS = \left(\frac{x - c}{2}\right)\sqrt{(x^2 + 2cx)} + \frac{c^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$= \frac{(x - c)\,S}{2} + \frac{c^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x+x^2)}} = \log\left[\frac{2x + 2c + 2\sqrt{(2cx + x^2)}}{2c}\right]$$

$$= \log\left[\frac{x + c + \sqrt{(2cx + x^2)}}{c}\right] = \frac{y}{c}$$

lich wird

$$\int x dS = \frac{(x - c)\,S}{2} + \frac{cy}{2}$$

$$\text{und } \frac{\int x dS}{S} = \frac{(x - c)\,S + cy}{2S} = x'$$

wodurch alſo die Lage des Schwerpunkts der Curve für die Axe ca beſtimmt iſt.

Ferner iſt $d(Sy) = Sdy + ydS$

$$\text{alſo } ydS = d(Sy) - Sdy$$

und weil, nach Aufgabe 2., $dx : dy = V : \gamma = S : c$ iſt, und daher $Sdy = cdx$, ſo iſt auch

$$ydS = -cdx + d(Sy)$$

$$\text{und daher } \int ydS = -cx + Sy$$

$$\text{folglich wird } \frac{\int ydS}{S} = \frac{Sy - cx}{S} = y'$$

wodurch auch die Lage des Schwerpunktes in Beziehung auf die Axe am beſtimmt iſt.

Aufgabe 11. Es ſoll die Formel für die Fläche des Raumes acm angegeben werden.

Auflöſung. Die allgemeine Formel für die Quadraturen iſt, wenn man die Fläche mit Z bezeichnet, nach §. 108. des erſten Bandes,

$$Z = \int ydx$$

und da $d(xy) = ydx + xdy$, ſo iſt

$$ydx = d(xy) - xdy$$

weil ferner $Sdy = cdx$, ſo iſt $xdy = \frac{cxdx}{S} = \frac{cxdx}{V(2cx + x^2)}$

und daher auch $ydx = d(xy) - \frac{cxdx}{V(2cx + x^2)}$

$$\text{folglich iſt } Z = \int ydx = xy - c\int \frac{xdx}{V(2cx + x^2)}$$

nämlich es iſt, wenn man das bereits in der vorigen Aufgabe gefundene Integral benutzt,

$$c\int \frac{xdx}{V(2cx + x^2)} = cV X - c^2 \int \frac{dx}{VX} = cS - c^2 \cdot \frac{y}{c}$$

und daher wird

$$Z = xy - cS + cy = (x + c)\,y - cS$$

oder, wenn man für S den Werth ſetzt,

$$Z = (x + c)\,y - cV(2cx + x^2)$$

Es läßt sich daher sehr leicht die Fläche acm berechnen, wenn die Abscisse ca und die dazu gehörige Ordinate, so wie der dazu gehörige Werth von c bekannt ist.

Zusatz. Setzt man

$$ca = h,\ am = g,\ \text{die Fläche } cam = F$$
$$cx = x,\ xy = y,\ \text{»}\ cxy = Z$$

so ist nach der gefundenen Formel

$$F = (h + c)\, g - c\sqrt{(2ch + h^2)}$$
$$\text{und } Z = (x + c)\, y - c\sqrt{(2cx + x^2)}$$

und wird nun Z von F abgezogen, so erhält man

$$F - Z = hg - xy + c(g - y) - c\,[\sqrt{(2ch + h^2)} - \sqrt{(2cx + x^2)}]$$

als die Formel für die Fläche von axym.

Aufgabe 12. Es soll die Lage des Schwerpunktes der von einem Bogen cm der Kettenlinie, Fig. 93., und den dazu gehörigen Coordinaten eingeschlossenen Fläche acm bestimmt werden.

Auflösung. Wird die Fläche acm = Z gesetzt und ist für den Schwerpunkt z die Abscisse $cx' = x'$ und die Ordinate $x'z = y'$, so ist nach §. 35.

$$x' = \frac{\int xydx}{Z} \text{ und } y' = \frac{\int y^2dx}{2Z}$$

Da nun Z bereits, Aufgabe 11., gefunden ist, so kommt es bloß noch darauf an, die Werthe der Integralien $\int xydx$ und $\int y^2dx$ zu ermitteln. Es ist aber bekanntlich

$$S^2 = 2cx + x^2, \text{ also } SdS = cdx + xdx$$
$$\text{und daher } xdx = SdS - cdx$$
$$\text{folglich ist } xydx = ySdS - cydx$$
$$\text{und daher } \int xydx = \int ySdS - c\int ydx$$

nämlich es ist, weil $\int ydx = Z$,

$$1)\quad \int xydx = \int ySdS - cZ$$

wo es also nur noch darauf ankommt, den Werth von $\int ySdS$ zu bestimmen.

Es ist aber $d(S^2y) = S^2dy + 2ySdS$

$$\text{also } 2ySdS = d(S^2y) - S^2dy$$
$$\text{folglich ist } \int ySdS = \frac{S^2y}{2} - \tfrac{1}{2}\int S^2dy$$

und man erhält hiernach aus No. 1.

$$2)\quad \int xydx = \frac{S^2y}{2} - cZ - \tfrac{1}{2}\int S^2dy$$

Nach Aufgabe 2. No. 2. aber iſt $dy = \frac{cdS}{\sqrt{(c^2 + S^2)}}$

folglich wird $\int S^2dy = \int \frac{cS^2dS}{\sqrt{(c^2 + S^2)}}$

Nach Meier Hirſch's Integraltafeln Seite 142. iſt, wenn $X = a + bx^2$,

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X}} = \frac{x\sqrt{X}}{2b} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

und es iſt alſo hier

$$\int \frac{S^2dS}{\sqrt{(c^2 + S^2)}} = \frac{S\sqrt{(c^2 + S^2)}}{2} - \frac{c^2}{2}\int \frac{dS}{\sqrt{(c^2 + S^2)}}$$

Setzt man dieſen Werth in No. 2., ſo wird erhalten

$$\int xydx = \frac{S^2y}{2} - cZ - \frac{cS\sqrt{(c^2 + S^2)}}{4} + \frac{c^2}{4}\int \frac{dS}{\sqrt{(c^2 + S}}$$

oder weil $\sqrt{(c^2 + S^2)} = c + x$, ſo wird

$$3)\quad \int xydx = \frac{S^2y}{2} - cZ - \frac{cS(c + x)}{4} + \frac{c^2}{4}\int \frac{dS}{\sqrt{(c^2 + S}}$$

Endlich iſt

$$\int \frac{dS}{\sqrt{(c^2 + S^2)}} = \log\,[S + \sqrt{(c^2 + S^2)}] + \text{Const}$$

und weil dieſes Integral $= 0$ werden muß, wenn man $S =$ nimmt, ſo iſt $\text{Const} = -\log c$, und daher

$$\int \frac{dS}{\sqrt{(c^2 + S^2)}} = \log\left(\frac{S + \sqrt{(c^2 + S^2)}}{c}\right) = \frac{y}{c}$$

folglich wird

$$4)\quad \int xydx = \frac{S^2y}{2} - cZ - \frac{cS\,(c + x)}{4} + \frac{c^2y}{4}$$

Da nun, nach Aufgabe 11., $Z = xy - cS + cy$, ſo wird

$$\int xydx = \frac{S^2y}{2} - c\,(xy - cS + cy) - \frac{cS\,(c + x)}{4} + \frac{c^2y}{4}$$

$$= \tfrac{1}{4}\,[2y\,(S^2 - 2cx) + 3c^2S - 3c^2y - cSx]$$

oder weil $S^2 - 2cx = x^2$, ſo wird endlich

$$\int xydx = \tfrac{1}{4}\,[2x^2y + 3c^2S - 3c^2y - cSx]$$

und daher I. $x' = \frac{\int xydx}{Z} = \frac{2x^2y + 3c^2S - 3c^2y - cSx}{4\,(xy - cS + cy)}$

Um nun auch den Werth von $y' = \frac{\int y^2 dx}{2Z}$ zu finden, muß das Integral $\int y^2 dx$ näher bestimmt werden. Es ist aber

$$d(y^2x) = y^2dx + 2xydy$$

folglich wird $y^2dx = d(y^2x) - 2xydy$

und daher 1) $\int y^2dx = y^2x - 2\int xydy$

Nun ist $xydy + dy\int xdy = d[y\int xdy]$

und es ist daher auch

$$\int xydy = y\int xdy - \int[dy\int xdy]$$

also wird, wenn man diesen Werth in No. 1. setzt,

2) $\int y^2dx = y^2x - 2y\int xdy + 2\int[dy\int xdy]$

wo es nun für's erste darauf ankommt, den Werth von $\int xdy$ näher zu bestimmen.

Es ist aber $dy = \frac{cdS}{\sqrt{(c^2 + S^2)}}$ und $x = -c + \sqrt{(c^2+S^2)}$

also $xdy = \frac{[-c + \sqrt{(c^2 + S^2)}]\, cdS}{\sqrt{(c^2 + S^2)}} = \frac{-c^2dS}{\sqrt{(c^2+S^2)}} + cdS$

folglich ist $\int xdy = cS - c^2\int \frac{dS}{\sqrt{(c^2 + S^2)}} = cS - cy$

und es wird daher, wenn man diesen Werth in No. 2. setzt,

3) $\int y^2dx = y^2x - 2y(cS - cy) + 2\int(cS - cy)dy$

$= y^2x - 2cSy + 2cy^2 + 2c\int Sdy - cy^2$

$= y^2x - 2cSy + cy^2 + 2c\int Sdy$

ferner ist $\int Sdy = \int \frac{cSdS}{\sqrt{(c^2 + S^2)}} = c\cdot\sqrt{(c^2 + S^2)} + Const$

und weil für $S = 0$ das Integral $= 0$ werden muß, so ist $Const = -c\sqrt{c^2} = -c^2$, und es ist daher

$$\int Sdy = c\sqrt{(c^2 + S^2)} - c^2 = cx$$

Hiernach ist endlich, wenn dieser Werth in No. 3. gesetzt wird,

4) $\int y^2dx = y^2x - 2cSy + cy^2 + 2c^2x$

Da nun $y' = \frac{\int y^2dx}{2Z}$, so wird

$$\text{II.}\quad y' = \frac{y^2x - 2cSy + cy^2 + 2c^2x}{2(xy - cS + cy)}$$

Aufgabe 13. Die Kettenlinie cm, Fig. 93., dreht sich um ihre Axe ca; es soll der Kubikinhalt des dadurch erzeugten Körpers angegeben werden.

Auflösung. Die Formel für den Kubikinhalt X eines

durch Axendrehung erzeugten Körpers ist, nach §. 122. ersten Bandes,

$$X = \pi \int y^2 dx$$

Nun ist, nach der vorigen Aufgabe, der Werth von y^2dx reits gefunden; es ist also, wenn man diesen Werth benu

$$X = \pi\,(y^2x - 2cSy + cy^2 + 2c^2x)$$

die Formel für den Kubikinhalt des Körpers.

Zusatz. Ist Z die den Körper erzeugende Fläche und der Abstand des Schwerpunktes derselben von der Axe, so bekanntlich auch

$$X = 2y'\pi \cdot Z$$

Da nun, nach der vorigen Aufgabe No. II.,

$$y' = \frac{y^2x - 2cSy + cy^2 + 2c^2x}{2Z}$$

so erhält man hieraus ebenfalls

$$X = 2y'Z\pi = \pi\,(y^2x - 2cSy + cy^2 + 2c^2x).$$

Aufgabe 14. Es soll der Schwerpunkt des in der rigen Aufgabe bestimmten Körpers angegeben werden.

Auflösung. Wird der Abstand des Schwerpun vom Scheitel $= x'$ gesetzt, so ist, nach §. 35., $x' = \frac{\int xy}{\int y}$ und da der Werth von $\int y^2dx$ bereits gefunden ist, so kon es hier nur noch darauf an, den von $\int xy^2dx$ näher zu bes men. Es ist aber

$$d\,(x^2y^2) = 2xy^2dx + 2x^2ydy$$

und daher

$$1)\quad \int xy^2dx = \frac{x^2y^2}{2} - \int x^2ydy$$

Da nun $d\,(y\int x^2dy) = dy\int x^2dy + yx^2dy$

also $\int x^2ydy = y\int x^2dy - \int[dy\int x^2dy]$

so ist auch

$$2)\quad \int xy^2dx = \tfrac{1}{2}x^2y^2 - y\int x^2dy + \int[dy\int x^2dy]$$

und weil $dx : dy = S : c$, so ist $dy = \frac{cdx}{S}$

$$\text{also } x^2dy = \frac{cx^2dx}{S} = \frac{cx^2dx}{\sqrt{(x^2 + 2cx)}}$$

folglich ist $\int x^2 dy = c\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2+2cx)}} =$

$$c\left[\frac{x}{2}-\frac{3c}{2}\right]S + \frac{3c^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+2cx)}} = \frac{c(x-3c)S}{2} + \frac{3c^2}{2}\cdot\frac{y}{c}$$

$$= \tfrac{1}{2}cxS - \tfrac{3}{2}c^2S + \tfrac{3}{2}c^2y$$

und es wird nun, wenn man diesen Werth in No. 2. setzt,

$$\int xy^2dx = \tfrac{1}{2}x^2y^2 - y[\tfrac{1}{2}cxS - \tfrac{3}{2}c^2S + \tfrac{3}{2}c^2y] + \int(\tfrac{1}{2}cxS - \tfrac{3}{2}c^2S + \tfrac{3}{2}c^2y)\,dy$$

nämlich es ist

3) $$\int xy^2dx = \tfrac{1}{2}[x^2y^2 - cxSy + 3c^2Sy - 3c^2y^2] + \frac{c}{2}\int xSdy$$

$$-\frac{3c^2}{2}\int Sdy + \frac{3c^2}{2}\int ydy$$

Werden diese einzelnen Integralien gesucht und alles gehörig integrirt, so findet man endlich

4) $$\int xy^2dx = \tfrac{1}{4}[2x^2y^2 - 2cxSy + 6c^2Sy - 3c^2y^2 + c^2x^2 - 6c^2x]$$

und hieraus folgt für die gesuchte Lage des Schwerpunktes

$$x' = \frac{\int xy^2dx}{\int y^2dx} = \frac{2x^2y^2 - 2cxSy + 6c^2Sy - 3c^2y^2 + c^2x^2 + 6c^2x}{4(y^2x - 2cSy + cy^2 + 2c^2x)}$$

Aufgabe 15. Es soll die Formel für die krumme Oberfläche eines Kettenkonoids angegeben werden.

Auflösung. Die Formel für die krumme Oberfläche W eines jeden durch Axendrehung erzeugten Körpers ist, nach §. 129. des ersten Bandes,

$$W = 2\pi\int ydx\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]} = 2\pi\int y\sqrt{[(dx)^2+(dy)^2]}$$

nämlich es ist

$$W = 2\pi\int ydS$$

und mit Hülfe der bereits gefundenen Integrale wird hieraus erhalten

$$W = 2\pi\,(Sy - cx)$$

Aufgabe 16. Die Lage des Schwerpunktes der krummen Oberfläche eines Kettenkonoids soll bestimmt werden.

Auflösung. Die Formel für die Lage dieses Schwerpunktes ist

$$x' = \frac{\int xydS}{\int ydS}$$

und man findet für den gegenwärtigen Fall

$$x' = \frac{2c^2x - cx^2 + cy^2 - 2cSy + 2xSy}{4\,(Sy - cx)}$$

Anmerkung. Eine ausführliche Abhandlung über die Kett
findet man in dem bereits mehrmals angeführten dritten
der Statik feſter Körper von Eytelwein.

Berlin, gedruckt bei A. Petſch.

Inhalt.

Einleitung, §. 1—7. . . . . Seite 1

Erste Abtheilung.

Die mathematische Theorie der Statik betreffende Uebungen.

Erster Abschnitt.

Von den auf einen Punkt wirkenden Kräften, §. 8—19. . Seite 32

Zweiter Abschnitt.

Aufgaben und Uebungen, welche sich auf den Hebel und die davon abhängenden Erscheinungen beziehen, §. 20—28. » 86

Dritter Abschnitt.

Der Schwerpunkt und die davon abhängenden Erscheinungen §. 29—41. . . . . » 128

Vierter Abschnitt.

Erläuterungen und Uebungen über verschiedene, noch zur Statik der festen Körper gehörige Gegenstände, §. 42—50. » 213

Fünfter Abschnitt.

Die Statik der biegsamen Fäden, §. 51—56. . . . . » 267

Tab. I.

Fig. 23.

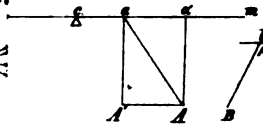


Fig. 24.

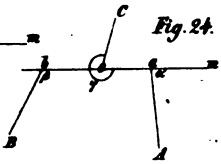


Fig. 25.

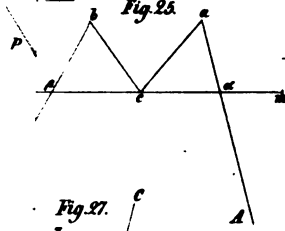


Fig. 25 b.

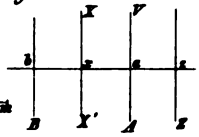


Fig. 26.

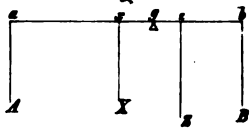


Fig. 27.

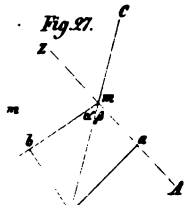


Fig. 28.

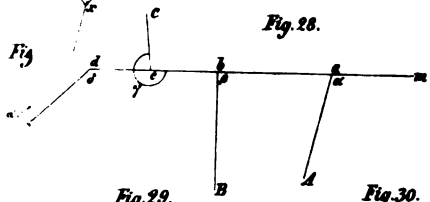


Fig. 29.

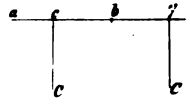


Fig. 30.

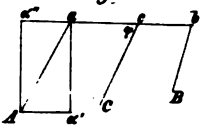
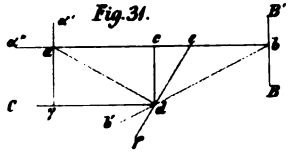


Fig. 31.



THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

Uebungen

aus der

angewandten Mathematik

für

Techniker und besonders für Architekten, Artilleristen, Ingenieure, Forst- und Bergbau-Beamte ꝛc.,

bearbeitet

von

Dr. Ephraim Salomon Unger.

Zweiter Band.

Uebungen aus der Statik und Mechanik der festen Körper.

Zweite, dritte und vierte Abtheilung.

(Mit drei Figurentafeln.)

Berlin,

bei J. A. List.

1834.

Uebungen

aus der

Statik und Mechanik

der

festen Körper

für

Techniker und besonders für Architekten, Artilleristen, Ingenieure, Forst- und Bergbau-Beamte ꝛc.,

bearbeitet

von

Dr. Ephraim Salomon Unger.

2 - 3 - 4

Zweite, dritte und vierte Abtheilung.

Mit drei Figurentafeln.

Berlin,
bei J. A. Lisk.

1834.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

Inhalt.

Zweite Abtheilung.

…rkung des physischen Zustandes der Körper auf die Gesetze der Statik.

Erster Abschnitt.

…r Friction, §. 57—60. . . . . Seite 311

Zweiter Abschnitt.

…n Seilen, §. 61—63. 343

Dritter Abschnitt.

…r Festigkeit der Körper, §. 64—72. 367

Dritte Abtheilung.

Anwendungen.

Erster Abschnitt.

…en von dem Räderwerke und der zweckmäßigsten …stalt der Zähne, §. 73—78. 441

Zweiter Abschnitt.

…en aus der Statik der Gewölbe, §. 79—82. . . . 485

Vierte Abtheilung.

…ben und Uebungen aus der Mechanik der festen Körper.

Erster Abschnitt.

…r gleichförmigen Bewegung, §. 83—87. 538

Zweiter Abſchnitt.

Die gleichförmig veränderliche Bewegung, §. 88—93. . Seite

Dritter Abſchnitt.

Die veränderliche Bewegung, §. 94—98. . . . . .

Vierter Abſchnitt.

Einiges von dem Stoße der Körper, §. 99—104. . . .

Inhalt:

Erſter Band: Zueignung. — Vorrede. — Verſuch in ſcherzhaften Liedern — Lieder — Volkslieder.

Zweiter Band: Lieder — Nachahmungen.

Dritter Band: Die Schäferwelt — die Bürgerwelt — Auf den Tod des Generals von Stille — Der blöde Schäfer — Der Apfeldieb — Romanzen und romantiſche Lieder — Fabeln — Erzählungen.

Vierter Band: Preußiſche Kriegslieder — Friedrichs Feier — Marſchlieder — Soldatenlieder — Die letzten Lieder des Grenadiers.

Fünfter Band: Sinngedichte — Epiſteln — Die goldenen Sprüche des Pythagoras.

Sechſter Band: Halladat — Amor und Pſyche — Vermiſchte Gedichte.

Siebenter Band: Vorrede — das Hüttchen.

Vater Gleim, der Preußiſche Barde, der Sänger Friedrichs, der echte Ur- und Groß-Deutſche, der Dichter der Grazien, wie ihn Klopſtock, Leſſing, Jean Paul und Joh. Heinr. Voß, ſeine Freunde und Vertraute genannt haben, darf in unſeren Tagen, — die ſich ein ehrendes Denkmal ſetzen durch Verbreitung und Würdigung deſſen, was Deutſche aller Jahrhunderte Treffliches in Wiſſenſchaft und Kunſt geleiſtet haben, — einer freundlichen Aufnahme gewiß ſein.

Gedruckt bei A. Petsch.

Zweite Abtheilung.

Einwirkung des physischen Zustandes der Körper auf die Gesetze der Statik.

Erster Abschnitt.

Von der Friction.

§. 57.

Einleitung.

1. Es ist kein Körper absolut glatt, so daß er ganz frei von Erhöhungen und Vertiefungen auf seiner Oberfläche wäre; hieraus erwächst bei jeder Bewegung eines Körpers über einen andern ein Hinderniß, zu dessen Beseitigung ein Kraftaufwand erfordert wird. Dieses Hinderniß der Bewegung nennt man die Friction oder die Reibung.

2. Die Friction kann als eine passive Kraft angesehen werden, welche verursacht, daß das Gleichgewicht bereits eintritt, bevor noch die Momente gleich sind, und auch alsdann noch besteht, wenn nach der Theorie schon längst eine Bewegung erfolgen müßte. Ist z. B. zur Herstellung eines Gleichgewichts eine Kraft = P erforderlich, und ist die zur Ueberwindung der Friction nöthige Kraft = F, so findet bereits bei der Einwirkung einer Kraft = P — F Gleichgewicht statt, und es wird dasselbe erst alsdann aufgehoben, wenn die Kraft > P + F ist. Die Friction hindert also die Bewegung innerhalb gewisser Gränzen, und während theoretisch unter gegebenen Umständen eine bestimmte Kraft = P zur Erhaltung des Gleichgewichts erforderlich ist, so daß dieses nicht bestehen kann,

wenn man statt P eine Kraft $= P \pm \delta$ setzt, wie klein auch der Werth von δ sein mag; so besteht wegen des Einflusses der Reibung das Gleichgewicht auch bei der Einwirkung einer Kraft $= P \pm \alpha$, für bestimmte Werthe von α. Es giebt daher in allen Fällen, wo Friction statt findet, ein Minimum der Kraft, durch welche Gleichgewicht hergestellt, und ein Maximum, durch welche es aufgehoben wird. Ist, theoretisch genommen, P die zu dem Gleichgewicht erforderliche Kraft, und tritt dasselbe bereits bei einer Kraft $= P - \alpha$ ein, und erfolgt erst Bewegung bei einer Kraft $= P + \beta$, so ist α die Friction für das Eintreten der Ruhe und β für das Eintreten der Bewegung.

3. So einleuchtend es ist, daß die Friction zur Beförderung der Ruhe und zur Verzögerung der Bewegung beitragen muß, so schwer wird es, mathematisch genaue Resultate für die Wirkung derselben zu erhalten, da die Umstände, von welchen sie abhängt, mannigfach verschieden sind und zum Theil gar keiner genauen Berechnung unterworfen werden können. Zunächst hängt die Friction davon ab, ob die über einander sich bewegenden Flächen mehr oder weniger rauh sind, und daher ist die Einwirkung derselben verschieden, nicht nur, je nachdem der Stoff verschieden ist, aus welchem die Körper bestehen, sondern selbst bei denselben Stoffen ändert sich die Friction, wenn die Oberfläche geglättet oder polirt wird ꝛc. Ferner hängt die Friction von der Größe des Druckes ab, welchen die Unterlage von dem bewegten Körper erleidet; auch glaubte man früher, daß die Friction von der Größe der berührenden Flächen abhängig sei, doch hat die Erfahrung gelehrt, daß dieses nicht oder doch nur in einem sehr geringen Grade der Fall sei: ein Umstand, worauf zuerst Amontons in einer Abhandlung von den Feuermühlen aufmerksam macht. Gewöhnlich sucht man die Friction dadurch zu vermindern, daß man eine fremde Masse, z. B. Fett oder Oel ꝛc. zwischen die sich reibenden Flächen bringt, allein wenn gleich hierdurch der Zweck großen Theils erreicht wird, so entsteht doch dadurch zugleich ein anderes, wenn auch unbedeutendes Hinderniß der Bewegung, indem die Adhäsion dadurch vermehrt wird, die Flächen also gewissermaßen an einander kleben ꝛc.

4. Besonders zu berücksichtigen ist bei Beurtheilung der riction, daß, wenn ein Körper auf horizontaler Ebene erst in Bewegung gesetzt werden soll, hierzu ein größerer Kraftaufwand rforderlich ist, als den bereits bewegten Körper in Bewegung u erhalten; es ist also die **Friction der Ruhe** größer als ie **der Bewegung**, und zwar giebt es für die erstere ein Maximum, was bei einigen Stoffen bald erreicht wird, und ei andern erst, nachdem sie bereits einige Zeit geruhet haben.

5. Man muß zwei Gattungen von Friction unterscheien: nämlich die **gleitende**, welche entsteht, wenn ein Körer bei der Bewegung über einen andern hinweggleitet, und ie **rollende**, indem der bewegte Körper sich um eine Axe reht und daher die Fläche immer mit anderen Punkten berührt. Es ist leicht einzusehen, daß die zweite Gattung um ieles geringer als die erste sein muß, weßwegen man auch ters, um die Friction zu vermindern, eine gleitende Bewegung n eine rollende zu verändern sucht: so bewegt man schwere Massen durch untergelegte Walzen oder Kugeln ꝛc. Die gleinde Bewegung ist ferner eine **schiebende** oder **drehende**; as letztere ist der Fall bei der Bewegung der Zapfen in den nterlagen, einer Rolle um den Bolzen u. s. w.

6. Von allen Umständen, welche die Friction hervorbrinen, hat man ausschließlich den Einfluß des Druckes in Rechung gebracht, und hier hat die Erfahrung gelehrt, **daß bei brigens gleichen Umständen die Größe der Friction immer der Größe des Druckes proportionirt ist.** Wenn daher bei einer gleitenden Bewegung der Druck des örpers gegen die Fläche, über welche er hinweggleitet, = P t, und zur Ueberwältigung der Friction eine Kraft = F erordert wird, so findet man bei derselben Fläche und bei einem bewegten Körper von demselben Stoffe, der einen Druck = Q ausübt, die entsprechende Friction X durch die Proportion

$$P : Q = F : X$$

$$\text{und es ist daher } X = \frac{F}{P} \cdot Q$$

wo nun Q jeden beliebigen Werth haben kann, während $\frac{F}{P}$

eine durch die Erfahrung gefundene unveränderliche Zahl iſt. Dieſe Zahl wird daher der Frictions-Coefficient genannt. Gewöhnlich bezeichnet man dieſen Coefficienten mit μ. So hat man z. B. durch Verſuche gefunden, daß wenn Eichen- auf Eichenholz hingleitet und die Bewegung in der Richtung der Faſern erfolgt, die Friction $= 0{,}45$ iſt, bei einem Druck $= 1$, und es iſt daher in dieſem Falle der Frictions-Coefficient $= 0{,}45$. Beträgt nu[illegible] einer ſolchen Bewegung der Druck 100 Pfund, ſo iſt die [illegible] Ueberwältigung der Friction erforderliche Kraft $= 0{,}45 \cdot 10$[illegible] $= 45$ Pfd. Den Frictionscoefficient bei der Bewegung v[illegible] Eiſen auf Meſſing hat man $= 0{,}26$ gefunden ꝛc.

7. Die Größe der Friction bei rollenden oder wälzenden Körpern iſt ebenfalls der Größe [illegible]es Druckes proportionirt; ſie hängt aber außerdem noch von dem Radius der Walze ab, ſo daß ſie ſich umgekehrt wie dieſer Radius verhält. Findet man alſo bei gewiſſen Stoffen, wenn der Radius der Walze $= r$ und die Größe des ganzen Druckes $= P$ iſt, die zur Ueberwältigung der Friction erforderliche Kraft $= F$, ſo iſt nun für eben dieſe Stoffe, bei einem Radius $= \varrho$ und einem Drucke $= Q$, die Friction durch die zuſammengeſetzte Proportion beſtimmt

$$F : X = \left\{\begin{matrix} P : Q \\ \varrho : r \end{matrix}\right\}$$

$$\text{alſo } F : X = P\varrho : Qr$$

$$\text{und es iſt daher } X = \frac{QrF}{P\varrho} = \frac{rF}{P} \cdot \frac{Q}{\varrho}$$

wo alſo $\frac{rF}{P} = \mu$ den Frictionscoefficienten bildet; dieſer mit dem Drucke multiplicirt und durch den Radius der Walze getheilt, giebt die Größe der Friction in einem beſonderen Fall. So hat man durch Erfahrung gefunden, daß wenn eine Walze von Ulmenholz über eine Unterlage von Eichenholz hinwegrollt, bei einem Drucke von 500 Pfd. und einem Halbmeſſer der Walze von 3 Zoll, die Friction 5 Pfd. beträgt; alſo iſt hier der Frictionscoefficient $= \frac{3 \cdot 5}{500} = 0{,}03$. Iſt nun in einem andern Falle der Halbmeſſer der Walze von Ulmenholz =

= 5 Zoll und der Druck = 600 Pfd., so wird die Friction $= 0{,}03 \cdot \frac{600}{5} = 3{,}6$ Pfd.

§. 58.

Einige Aufgaben zur Ermittelung des Frictionscoefficienten.

Es sind vielfache Versuche gemacht worden, um für die verschiedenen, besonders im praktischen Leben vorkommenden Fälle die Frictionscoefficienten zu bestimmen, und man findet die Resultate dieser Versuche in jedem Werke über Baukunst oder Maschinenkunde, worauf hier verwiesen werden muß. Die folgenden Aufgaben sollen bloß dazu dienen, zu zeigen, wie dergleichen Versuche durch die Rechnung unterstützt und abgekürzt werden können.

Aufgabe 1. Es soll angegeben werden, wie es möglich ist, den Frictionscoefficienten für eine schiebende Bewegung zu bestimmen.

Auflösung. Das gewöhnliche Verfahren, durch welches dieser Coefficient ermittelt wird, besteht darin, daß man der Fläche, über welche der Körper hinweggleitet, eine horizontale Lage giebt, an den zu bewegenden Körper einen Faden anbringt, diesen parallel zur Grundfläche über eine Rolle führt und das zweite Ende desselben so lange mit Gewichten belastet, bis durch dieselben eine Bewegung des Körpers erfolgt. Die hierzu erforderlichen Gewichte durch das Gewicht des Körpers, welches hier der Druck ist, getheilt, giebt den gesuchten Frictionscoefficient. Es läßt sich derselbe aber auch mit Hülfe einer geneigten Ebene ermitteln, die unter beliebigem Neigungswinkel gegen den Horizont festgestellt werden kann. Findet keine Friction statt, so müßte ein Körper von einer jeden geneigten Ebene hinabgleiten, wie klein auch der Winkel sein mag, den dieselbe mit dem Horizonte bildet; wegen der Friction aber erfolgt die Bewegung erst, wenn dieser Winkel eine bestimmte Größe erreicht hat. Kennt man nun diesen Winkel = β, bei welchem ein Hinabgleiten des Körpers beginnt, so läßt sich hieraus der Frictionscoefficient unmittelbar berechnen. Setzt man nämlich das ganze Gewicht des Körpers = M, so ist nach §. 43, weil der Neigungswinkel der Ebene

gegen den Horizont $= \beta$ ſein ſoll, der normale Druck des Körpers gegen die Ebene $(gy) = y = M\sin\alpha = M\cos\beta$, Fig. 66, und die bewegende Kraft iſt $(gx) = x = M\sin\beta$. Es iſt alſo in der Formel für den Frictionscoefficienten $\mu = \frac{F}{P}$, der Druck $P = y = M\cos\beta$, und die zur Ueberwältigung der Friction erforderliche Kraft $F = x = M\sin\beta$, folglich iſt

$$\mu = \frac{M\sin\beta}{M\cos\beta} = \operatorname{tg}\beta.$$

Der Frictionscoefficient bei einer ſchiebenden Bewegung iſt alſo der Tangente des Neigungswinkels gleich, bei welchem auf der geneigten Ebene eine Bewegung des Körpers beginnt. Es verſteht ſich übrigens von ſelbſt, daß die Fläche der geneigten Ebene aus der Maſſe beſtehen muß, für welche bei der Bewegung des Körpers die Friction beſtimmt werden ſoll. Findet man ſonach z. B. in einem beſtimmten Falle den Winkel der geneigten Ebene, bei welchem die Bewegung beginnt, $= 20°\ 24'$, ſo iſt für dieſen Fall der Frictionscoefficient $= \operatorname{tg} 20°\ 24' = 0{,}3718967$, oder es iſt hinreichend genau $\mu = 0{,}372$.

Aufgabe 2. Es ſoll der Frictionscoefficient für eine drehende Bewegung, alſo für das Reiben der Zapfen an der Pfanne beſtimmt werden.

Auflöſung. Setzt man den Druck eines Zapfens gegen die Pfanne im Zuſtande des Gleichgewichts $= P$, und den Radius des Zapfens $= r$, und muß an einen Punkte, deſſen Entfernung von der Axe des Zapfens $= R$ iſt, ein Gewicht $= F$ angebracht werden, wenn ein Drehen des Zapfens erfolgen ſoll, ſo iſt der ganze Druck, welchen der Zapfen erleidet $= P + F$, und für einen Frictionscoefficienten $= \mu$ iſt die Größe der Friction $\mu(P + F)$, welche an einem Hebelarme $= \varrho$ wirkt, während F an einem Hebelarme $= R$ angebracht iſt. Das Moment der Friction iſt folglich $= \mu(P+F)r$ und das von $F = FR$, und es iſt daher

$$\mu(P + F)r = FR,$$

woraus unmittelbar erhalten wird

$$\mu = \frac{FR}{(P + F)r}$$

Iſt z. B. der Druck gegen einen Zapfen = 600 Pfd., der Radius deſſelben = $\frac{1}{3}$ Zoll, und muß in einer Entfernung von der Axe des Zapfens = 20 Zoll ein Uebergewicht von $3\frac{3}{4}$ Pfd. angebracht werden, wenn Bewegung erfolgen ſoll, ſo wird $F = 3\frac{3}{4} : R = 20$; $P + F = 603\frac{3}{4}$ und $r = \frac{1}{3}$ und es iſt daher

$$\mu = \frac{3\frac{3}{4} \cdot 20}{603\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{150}{603\frac{3}{4}} = \frac{600}{2415} = \frac{40}{161} = \frac{1}{4} \text{ circa.}$$

Bei dem Gebrauche dieſer Formel wird übrigens vorausgeſetzt, daß R und r durch dieſelbe Längeneinheit ausgedrückt iſt, und daß das Gewicht F normal gegen den Hebelarm R wirkt.

Zuſatz. Iſt μ bereits gefunden, ſo läßt ſich, wenn P, R und r gegeben ſind, auch leicht das zur Erzeugung der Bewegung erforderliche Gewicht F berechnen. Man erhält nämlich unmittelbar aus der obigen Formel

$$F = \frac{Pr\mu}{R - r\mu}$$

Aufgabe 3. Der Frictionscoefficient für die rollende Bewegung ſoll beſtimmt werden.

Auflöſung. Man lege die Walze auf zwei horizontale Unterlagen von der Maſſe, über welche dieſelbe rollen ſoll, und umſchlinge ſie einigemal mit einem dünnen biegſamen Faden, an deſſen beiden Endpunkten man gleiche Gewichte anbringt. Wird nun das eine dieſer beiden Gewichte hinreichend vermehrt, ſo ſinkt daſſelbe und es erfolgt ein Rollen der Walze, indem der Faden auf der Seite, wo das Uebergewicht iſt, ſich abwickelt und auf der andern aufgewickelt wird. Iſt nun das Gewicht der Walze = W, jedes der beiden gleichen an den beiden Endpunkten des Fadens angebrachten Gewichte = Q, und das erforderliche Uebergewicht, damit ein Rollen der Walze beginne, = F, ſo iſt der ganze Druck der Walze gegen die Unterlage = W + 2Q + F, und daher, wenn r der Radius der Walze iſt, nach §. 57. No. 7, der Frictionscoefficient

$$\mu = \frac{rF}{P} = \frac{rF}{W + 2Q + F} = \left(\frac{F}{W + 2Q + F}\right) r$$

womit nun bei denſelben Maſſen, wenn der Druck = M und

der Radius der Walze = R ist, $\frac{M}{R}$ multiplicirt werden muß, um in einem besondern Falle die Größe der Friction kennen zu lernen.

Bei dem Ausdruck $\mu = \left(\frac{F}{W + 2Q + F}\right) r$ ist übrigens zu berücksichtigen, daß für den Bruch $\frac{F}{W + 2Q + F}$ immer derselbe Werth erhalten wird, welche Gewichtseinheit zur Bestimmung von F, W und Q auch gebraucht werde, wenn nur alle drei Größen durch dasselbe Gewicht bestimmt sind. Dagegen ändert sich der Werth von μ, sobald der Radius r durch eine andere Längeneinheit gemessen wird, und es muß daher bestimmt angegeben werden, welche Längeneinheit für r der Größe μ zum Grunde liegt; oder vielmehr, man muß hier μ selbst als einen Ausdruck für eine Länge ansehen. Bei Bestimmung der Friction X durch die Formel $X = \mu \cdot \frac{M}{R}$ muß nun R mit μ, oder was dasselbe ist, mit r gleichartig sein, und man erhält alsdann den Werth von X durch dieselbe Gewichtseinheit ausgedrückt, welche bei der Bestimmung des Druckes M gebraucht wird.

Ist z. B. das Gewicht einer Walze in einem besondern Falle = 89,4 Pfd., das an jedem der beiden Enden des Fadens angehängte Gewicht = 5 Pfd. und das zur Erzeugung der Bewegung erforderliche Uebergewicht = 0,6 Pfd., der Radius der Walze aber = 3 franz. Zoll, so wird

$$\mu = \frac{rF}{W + 2Q + F} = \frac{3 \cdot 0{,}6}{89{,}4 + 10 + 0{,}6} = \frac{3 \cdot 0{,}6}{100} \text{ franz. Zoll,}$$

nämlich es ist $\mu = 0{,}018$ franz. Zoll.

Wenn nun eine Walze von derselben Masse auf derselben Unterlage einen Druck von 600 Pfd. äußert, und es ist der Radius derselben = 4 preuß. Zoll, so muß man in dem Ausdrucke für die erforderliche Kraft X zur Ueberwältigung der Friction $X = \mu \cdot \frac{M}{R}$, den Werth von R in franz. Zoll ausdrücken, und es ist daher hier $R = \frac{139{,}13}{144} \cdot 4$ franz. Zoll = 3,8647, also wird

$$X = 0{,}018 \cdot \frac{600}{3{,}8647} = \frac{108000}{38674} = 2{,}79 \text{ Pfd.}$$

Anmerkung. Es ist §. 57 No. 2 die Friction für das Eintreten der Ruhe von der für das Eintreten der Bewegung unterschieden worden, was man nicht verwechseln darf mit der Friction der Ruhe und der Friction der Bewegung, von welcher in §. 57 No. 4 die Rede ist. Die letzteren beiden sind in vielen Fällen bedeutend verschieden von einander, und es läßt sich die eine aus der andern berechnen, wenn man die Verzögerung der Geschwindigkeit kennt, welche ein Körper durch die Friction erleidet, worüber das nähere in der mechanischen Abtheilung dieses Werkes mitgetheilt werden soll. Uebrigens findet man in den Frictionstabellen den Coefficient für beide Gattungen unmittelbar angegeben, so wie dieselben auch den Unterschied der Frictionen enthalten, je nachdem eine schlüpfrig machende Materie zur Verminderung der Friction angewendet wird oder nicht. So findet man z. B. in den Tabellen für die schiebende Bewegung von Kupfer auf Eisen ohne Zwischenmaterie, den Frictionscoefficient der Ruhe $= \frac{1}{17}$ und den der Bewegung $= \frac{1}{5}$. Wenn aber die Fläche mit Talg beschmiert wird, so ist der Coefficient für die Friction der Ruhe $= \frac{1}{10}$ und für die der Bewegung $= \frac{1}{11}$ ꝛc.

§. 59.

Uebungen zur Berechnung des Einflusses der Friction.

Aufgabe 1. Ein Körper, Fig. 94, dessen Gewicht $= P$ ist, ruhet auf einer horizontalen Fläche und soll durch eine Kraft $= X$, welche in der Richtung ax wirkt, die mit dem Horizonte einen Winkel $= \varphi$ bildet, bewegt werden; es soll der Werth von X unter der Voraussetzung bestimmt werden, daß der Frictionscoefficient $= \mu$ ist.

Auflösung. Zerlegt man die in der Richtung ax wirkende Kraft $= X$ in zwei Kräfte in der horizontalen Richtung ab und in der vertikalen ac, so ist die erstere $= X' = X\cos\varphi$ und die andere $= X'' = X\sin\varphi$. Der Druck des Körpers gegen den Horizont ist $= P$, und da X'' demselben gerade entgegenwirkt, so bleibt ein Druck $= P - X''$, wodurch eine Friction entsteht $\mu(P - X'')$, die in der Richtung ad widersteht, und es muß daher sein

$$X' = \mu(P - X'')$$

oder

$$X\cos\varphi = \mu(P - X\sin\varphi)$$

werden, leicht ableiten, und es können hier dieſelben Fälle n
§. 43 unterſchieden werden.

Zuſatz 2. Mit Hülfe der gefundenen Formel kann je
der 5 Größen V, P, μ, α und γ beſtimmt werden, wenn
vier übrigen gegeben ſind. Die Reduction iſt für alle Fä
einfach, wenn man die Formel auf eine einfachere Form
bringen ſucht, was auf folgende Art geſchehen kann. Es

$$\cos(\gamma - \alpha) \pm \mu \sin(\gamma - \alpha) = \frac{P}{V}(\cos\alpha \mp \mu \sin\alpha)$$

und daher auch, wenn man $\mu = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ ſetzt,

$$\cos(\gamma - \alpha) \pm \frac{\sin\varphi \sin(\gamma - \alpha)}{\cos\varphi} = \frac{P}{V}\left(\cos\alpha \mp \frac{\sin\varphi \sin\alpha}{\cos\varphi}\right.$$

und daher iſt $\cos\varphi \cos(\gamma - \alpha) \pm \sin\varphi \sin(\gamma - \alpha) =$

$$\frac{P}{V}(\cos\varphi \cos\alpha \mp \sin\varphi \sin\alpha)$$

Bedient man ſich nun hier der oberen Zeichen, wird al
$V = V'$ die erforderliche Kraft für das Eintreten der Ru
ſo erhält man

$$\cos(\varphi + \alpha - \gamma) = \frac{P}{V'} \cos(\varphi + \alpha)$$

und wenn man die untern Zeichen benutzt, ſo daß $V = V''$
die erforderliche Kraft für das Eintreten der Bewegung b
deutet, ſo wird

$$\cos(\varphi + \gamma - \alpha) = \frac{P}{V''} \cos(\varphi - \alpha)$$

und es iſt daher ganz allgemein

$$\cos(\varphi \pm \alpha \mp \gamma) = \frac{P}{V} \cos(\varphi \pm \alpha)$$

wodurch unmittelbar γ beſtimmt iſt, wenn man die übrige
Größen kennt, und man erhält hieraus auch unmittelbar b
queme Formeln zur Berechnung des Werthes von V oder
Aber auch der Werth von α läßt ſich leicht beſtimmen, den
es iſt

$$\cos(\varphi \pm \alpha)\cos\gamma \pm \sin(\varphi \pm \alpha)\sin\gamma = \frac{P}{V}\cos(\varphi \pm \alpha)$$

$$\text{und daher } \cos\gamma \pm \operatorname{tg}(\varphi \pm \alpha)\sin\gamma = \frac{P}{V}$$

folglich ist $\pm \operatorname{tg}(\varphi \pm \alpha) = \frac{P}{V \sin\gamma} - \cot\gamma$.

Zusatz 3. Die einfachste Formel zur Bestimmung des erthes von V ist nach dem vorigen Zusatze

$$V = \frac{P \cos(\varphi \pm \alpha)}{\cos(\varphi \pm \alpha \mp \gamma)}$$

φ durch den gegebenen Frictionscoefficienten $\mu = \operatorname{tg}\varphi$ timmt ist, und es läßt sich hieraus nun unmittelbar erken-, für welchen Werth von γ die Kraft V ein Mini- rm wird. Dieses ist nämlich der Fall, wenn der Nenner $\cos(\varphi \pm \alpha \mp \gamma)$ den möglichst größten Werth erhält, wenn

$$\cos(\varphi \pm \alpha \mp \gamma) = 1 = \cos 0^0$$

und daher $\varphi \pm \alpha \mp \gamma = 0$

woraus unmittelbar folgt $\mp\gamma = \mp\alpha - \varphi$

und also auch $\mp(\mp\gamma) = \mp(\mp\alpha - \varphi)$

und daher endlich $\gamma = \alpha \pm \varphi$.

Setzt man nämlich $\gamma = \alpha + \varphi$, so wird V' für das Eintre- der Ruhe, und wenn man $\gamma = \alpha - \varphi$ setzt, so wird V'' das Eintreten der Bewegung ein Minimum.

Zusatz 4. Daß der hier direct für γ gefundene Werth, durch V ein Minimum wird, mit dem übereinstimmt, den n gewöhnlich für γ in mechanischen Werken angiebt, und mittelst der Differentialrechnung gefunden wird, läßt sich folgende Art nachweisen:

Es ist $V = \frac{P(\cos\alpha \mp \mu \sin\alpha)}{\cos(\gamma - \alpha) \pm \mu \sin(\gamma - \alpha)}$

für man auch setzen kann:

$$V = \frac{P(\cos\alpha \mp \mu \sin\alpha)}{\cos\psi \pm \mu \sin\psi}$$

Soll nun V ein Minimum werden, so muß der Nenner $= \cos\psi \pm \mu \sin\psi$ ein Maximum sein, also

$$\frac{dN}{d\psi} = -\sin\psi \pm \mu\cos\psi = 0$$

woraus erhalten wird $\operatorname{tg}\psi = \pm\mu$

, weil oben $\mu = \operatorname{tg}\varphi$ gesetzt worden ist,

$\psi = \pm\varphi$ oder $\gamma - \alpha = \pm\varphi$

und hieraus erhält man ebenfalls $\gamma = \alpha \pm \varphi$.

$$X = (R - \mu X)\,\mathrm{tg}\varphi \text{ und } W = \frac{R - \mu X}{\cos\varphi}$$

Aus der erſten Gleichung erhält man

$$2)\quad X = \frac{R\,\mathrm{tg}\varphi}{1 + \mu\,\mathrm{tg}\varphi}$$

W kann als an b in der Richtung ab wirkend angeſehen werden, und man kann dieſe Kraft in eine Theilkraft W′ normal auf bd und eine Th V in der Richtung bV zerlegen; man erhält alsdann

$W' = W\cos\varphi = R - \mu$ und $V = W\sin\varphi = X$

wie bereits zur Ableitung der eichung No. 1 angenommen worden iſt.

Der normale Druck auf b = Z iſt alſo

$$Z = Q + W' = Q + R - \mu X$$

oder, weil $Q + R = P$,

$$Z = P - \mu X$$

und es iſt daher

$$3)\quad \mu Z = \mu(P - \mu X)$$

Wird dieſer Werth in No. 1 geſetzt, ſo erhält man

$$\mu(P - \mu X) = X$$

alſo $\mu P = (1 + \mu^2)\,X$

und in dieſer Gleichung für X den Werth aus No. 2 geſetzt, giebt

$$\mu P = (1 + \mu^2) \cdot \frac{R\,\mathrm{tg}\varphi}{1 + \mu\,\mathrm{tg}\varphi}$$

Aus dieſer Gleichung nun erhält man durch Reduction den geſuchten Winkel φ, bei welchem die Friction noch hinreicht, um das Ausgleiten zu verhindern,

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\mu P}{(1 + \mu^2)R - \mu^2 P}$$

wo nun in jedem beſondern Falle für R der von der Belaſtung der Stange auf a kommende Theil geſetzt werden muß.

Zuſatz. Um einige Anwendungen von der hier gefundenen Formel zu machen, ſo nehme man an:

1) Es ſei die Stange überall gleich ſtark und bloß durch ihr Gewicht belaſtet = P, ſo iſt ac = cb und daher $R = \frac{1}{2}P$. In dieſem Falle wird alſo

tgφ

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mu P}{(1+\mu^2)\cdot\frac{1}{2}P - \mu^2 P} = \frac{2\mu}{1-\mu^2}$$

2. Liegt der Schwerpunkt der ganzen Belaſtung = P in c, wo der Werth von c auch leicht in dem Fall gefunden wird, wenn die Belaſtung auf verſchiedenen Punkten vertheilt iſt, und man ſetzt ca = a und cb = b, ſo iſt $R = \frac{bP}{a+b}$

Die Formel wird alſo

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mu P}{(1+\mu^2)\cdot\frac{bP}{a+b} - \mu^2 P} = \frac{\mu}{\frac{b(1+\mu^2)}{a+b} - \mu^2}$$

nämlich es iſt

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(a+b)\mu}{b - a\mu^2}$$

Da nun a + b die Länge der ganzen Stange ab ausdrückt, und alſo conſtant iſt, ſo folgt, wenn man dieſe Länge mit m bezeichnet,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m\mu}{m - a(1+\mu^2)}$$

Der Nenner wird alſo deſto größer, je kleiner der Werth von a iſt, und es wird daher tgφ und alſo auch φ kleiner, wenn a einen kleineren Werth erhält. Die Stange iſt alſo deſto weniger dem Ausgleiten ausgeſetzt, je näher c bei b liegt.

Für a = m, wenn alſo die ganze Belaſtung in b angebracht iſt, wird $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\mu}$ und für a = 0 erhält man tgφ = μ.

Anmerkung. Eytelwein hat dieſe Aufgabe §. 214 ſeiner Statik gelöſet, doch iſt die von demſelben gefundene Formel zuſammengeſetzter, und die Auflöſung, welche derſelbe mit Hülfe des Princips der virtuellen Geſchwindigkeit giebt, nicht ſo einfach als die hier mitgetheilte.

Aufgabe 5. Es ſei da'b', Fig. 97, der Durchſchnitt des Zapfens einer liegenden Welle, an welcher die Kräfte A und B normal gegen die Hebelarme ca = a und cb = b wirken; es ſollen die Bedingungen für das Gleichgewicht, mit Rückſicht auf die Friction des Zapfens gegen die Pfanne, angegeben werden.

Auflöſung. Man ſetze, um ſogleich eine ganz allgeme für alle Fälle geltende Formel zu erhalten, das Gewicht der We mit allem Zubehör = C, die alſo, als eine dritte in der ſenkrec ten Richtung cC wirkende Kraft, zu A und B noch hinzukomm und es werde durch die vereinte Wirkung der Kräfte A, B und ein normaler Druck des Zapfens gegen die Pfanne an dem Punkt d, = P erzeugt, und ein Druck in der Richtung der Tangent dm′ des Punktes d, = Q; ſo ißt, wenn man den Friction coefficienten = μ ſetzt, $\mu P = Q$ werden. Das Moment von A in Beziehung auf die Axe der Welle iſt = aA, das von B = Bb, und das von Q, wenn man den Radius cd de Zapfens = r ſetzt, iſt = rQ = μrP. Soll daher A mit B und der Friction im Gleichgewicht ſein, ſo muß die Gleichung ſtatt finden

$$1)\quad aA = bB + \mu rP.$$

Wird nun die Tangente mm′ des Punktes d geſchnitten von der Richtung der Kraft A unter dem Winkel α', von B unter dem Winkel β', und von C unter dem Winkel γ', ſo entſteht, weil die Kräfte parallel zu ihren Richtungen als an d wirkend gedacht werden können, durch A ein normaler Druck in der Richtung $dd' = A\sin\alpha'$, und der Druck von A in der Richtung der Tangente $mm' = A\cos\alpha'$. Eben ſo ſind die Theilkräfte von $B = B\sin\beta'$ und $B\cos\beta'$, und von C ſind dieſelben $C\sin\gamma'$ und $C\cos\gamma'$. Folglich iſt, da der normale Druck mit P und der in der Richtung der Tangente mit Q bezeichnet worden iſt,

$$P = A\sin\alpha' + B\sin\beta' + C\sin\gamma' \text{ und}$$
$$Q = \mu P = A\cos\alpha' + B\cos\beta' + C\cos\gamma'.$$

Hiernach iſt

$$P^2 = (A\sin\alpha' + B\sin\beta' + C\sin\gamma')^2$$
$$\text{und } Q^2 = \mu^2P^2 = (A\cos\alpha' + B\cos\beta' + C\cos\gamma')^2$$

wodurch, wenn man beide Gleichungen addirt, erhalten wird

$$(1+\mu^2)P^2 = A^2 + 2AB(\sin\alpha'\sin\beta' + \cos\alpha'\cos\beta')$$
$$+ 2AC(\sin\alpha'\sin\gamma' + \cos\alpha'\cos\gamma') + B^2$$
$$+ 2BC(\sin\beta'\sin\gamma' + \cos\beta'\cos\gamma') + C^2$$

nämlich es iſt

$$(1+\mu^2)P^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB\cos(\alpha'-\beta')$$
$$+ 2AC\cos(\alpha'-\gamma') + 2BC\cos(\beta'-\gamma')$$

ach No. 1 aber ist

$$P = \frac{aA - bB}{\mu r}$$

glich ist auch, wenn man für P diesen Werth setzt,

$$\left(\frac{1+\mu^2}{\mu^2}\right)\left(\frac{aA-bB}{r}\right)^2 = A^2+B^2+C^2+2AB\cos(\alpha'-\beta') + 2AC\cos(\alpha'-\gamma') + 2BC\cos(\beta'-\gamma')$$

gesuchte Gleichung, in welcher nur noch die Werthe der kommenden Winkel näher bestimmt werden müssen. Es aber, wenn man die Richtungen Aa, Bb und Cc verlän- t, bis sie sich schneiden, und (Fig. 97a) den Winkel, unter lchem Aa und Bb zusammentreffen, $= \delta$ setzt, den, unter lchem A die Senkrechte Cc schneidet, $= \alpha$, und den, unter lchem B von derselben geschnitten wird, $= \beta$,

$-\alpha' = \delta$, und daher $\cos(\alpha' - \beta') = \cos(\beta' - \alpha') = \cos\delta$

oder (weil $\delta = \alpha + \beta$); $\cos(\beta' - \alpha') = \cos(\alpha + \beta)$.

rner ist $\alpha' - \gamma' = -\alpha$, also $\cos(\alpha' - \gamma') = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

und $\beta' - \gamma' = \beta$, also $\cos(\beta' - \gamma') = \cos\beta$.

tzt man außerdem noch den Frictionscoefficient $\mu = \operatorname{tg}\varphi$, ist

$$\frac{1+\mu^2}{\mu^2} = \frac{1+\operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{\sec^2\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\varphi}$$

d es wird nun, wenn man diese Werthe in der Gleichung o. 2 setzt,

$$\left(\frac{aA-bB}{r\sin\varphi}\right)^2 = A^2+B^2+C^2+2AB\cos(\alpha+\beta) + 2AC\cos\alpha + 2BC\cos\beta$$

gesuchte Gleichung, aus welcher nun der Werth von A rch Reduction, so wie auch, wenn A gegeben ist, der Werth er jeden andern der hier vorkommenden Größen ermittelt rden kann.

Diese Gleichung kann man benutzen, um die erforderliche ast, mit Rücksicht auf die Friction, bei dem Rade an der elle und allen davon abhängenden Maschinen zu berechnen, nn die Welle eine horizontale Lage hat. Um einige An- ndungen von dieser Gleichung zu machen, sollen nun meh- re Fälle näher bestimmt werden.

1. Der Werth der Kraft A wird durch eine quadratische

Gleichung beſtimmt, welche durch gehörige Reduction die Form erhält

$$A^2 - \frac{2[(B\cos(\alpha+\beta)+C\cos\alpha)r^2\sin^2\varphi+abB]}{a^2-r^2\sin^2\varphi}\cdot A - \frac{(B^2+C^2+2BC\cos\beta)r^2\sin^2\varphi-b^2B^2}{a^2-r^2\sin^2\varphi}=0.$$

Dieſe Formel läßt ſich wenigſtens dadurch noch etwas abkürzen, daß der in dem dritten Gliede vorkommende Ausdruck $B^2+C^2+2BC\cos\beta$ aus Fig. 97a. ſich ergiebt, der Werth, für das Quadrat einer B und C äquipollenten Mittelkraft iſt, und es wird, wenn man dieſe Mittelkraft mit M bezeichnet, das dritte Glied

$$= \frac{M^2r^2\sin^2\varphi-b^2B^2}{a^2-r^2\sin^2\varphi}$$

Uebrigens kann man jeden Falls der Gleichung die einfachere Form geben

$$A^2 - \frac{2P}{a^2-r^2\sin^2\varphi}\cdot A - \frac{Q}{a^2-r^2\sin^2\varphi}=0$$

wo für P und Q die aus der obigen Gleichung ſich ergebenden Werthe geſetzt werden müſſen. Hiernach wird

$$A = \frac{P+\sqrt{[Q(a^2-r^2\sin^2\varphi)+P^2]}}{a^2-r^2\sin^2\varphi}$$

2. Wirken die Kräfte A, B und C alle drei parallel, iſt alſo die Richtung ſowohl von A als von B ſenkrecht gegen den Horizont, ſo wird $\alpha=\beta=0$, und daher $\cos\alpha=\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)=1$, alſo

$$A^2-\frac{2[(B+C)r^2\sin^2\varphi+abB]}{a^2-r^2\sin^2\varphi}\cdot A-\frac{(B+C)^2r^2\sin^2\varphi-b^2B^2}{a^2-r^2\sin^2\varphi}=0$$

eine Formel, die für den praktiſchen Gebrauch bedeutend abgekürzt werden kann, wenn man berückſichtigt, daß r als Radius des Zapfens im Verhältniß zu a und b ſehr klein iſt, und daß man daher a^2 ſtatt $a^2-r^2\sin^2\varphi$ im Nenner ſetzen kann, wodurch nun die Gleichung wird

$$A^2-\frac{2[(B+C)r^2\sin^2\varphi+abB]A}{a^2}=\frac{(B+C)^2r^2\sin^2\varphi-b^2B^2}{a^2}$$

und dieſes giebt für $r^2\sin^2\varphi=g^2$

Nach No. 1 aber ist

$$P = \frac{aA - bB}{\mu r}$$

folglich ist auch, wenn man für P diesen Werth setzt,

$$2)\ \left(\frac{1+\mu^2}{\mu^2}\right)\left(\frac{aA-bB}{r}\right)^2 = A^2+B^2+C^2+2AB\cos(\alpha'-\beta') + 2AC\cos(\alpha'-\gamma')+2BC\cos(\beta'-\gamma')$$

die gesuchte Gleichung, in welcher nur noch die Werthe der vorkommenden Winkel näher bestimmt werden müssen. Es ist aber, wenn man die Richtungen Aa, Bb und Cc verlängert, bis sie sich schneiden, und (Fig. 97 a) den Winkel, unter welchem Aa und Bb zusammentreffen, $= \delta$ setzt, den, unter welchem A die Senkrechte Cc schneidet, $= \alpha$, und den, unter welchem B von derselben geschnitten wird, $= \beta$,

$\beta' - \alpha' = \delta$, und daher $\cos(\alpha' - \beta') = \cos(\beta' - \alpha') = \cos\delta$

oder (weil $\delta = \alpha + \beta$); $\cos(\beta' - \alpha') = \cos(\alpha + \beta)$.

Ferner ist $\alpha' - \gamma' = -\alpha$, also $\cos(\alpha' - \gamma') = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

und $\beta' - \gamma' = \beta$, also $\cos(\beta' - \gamma') = \cos\beta$.

Setzt man außerdem noch den Frictionscoefficient $\mu = \operatorname{tg}\varphi$, so ist

$$\frac{1+\mu^2}{\mu^2} = \frac{1+\operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{\sec^2\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\varphi}$$

und es wird nun, wenn man diese Werthe in der Gleichung No. 2 setzt,

$$\left(\frac{aA-bB}{r\sin\varphi}\right)^2 = A^2+B^2+C^2+2AB\cos(\alpha+\beta) + 2AC\cos\alpha+2BC\cos\beta$$

die gesuchte Gleichung, aus welcher nun der Werth von A durch Reduction, so wie auch, wenn A gegeben ist, der Werth einer jeden andern der hier vorkommenden Größen ermittelt werden kann.

Diese Gleichung kann man benutzen, um die erforderliche Kraft, mit Rücksicht auf die Friction, bei dem Rade an der Welle und allen davon abhängenden Maschinen zu berechnen, wenn die Welle eine horizontale Lage hat. Um einige Anwendungen von dieser Gleichung zu machen, sollen nun mehrere Fälle näher bestimmt werden.

1. Der Werth der Kraft A wird durch eine quadratische

Gleichung bestimmt, welche durch gehörige Reduction die Form erhält

$$A^2 - \frac{2[(B\cos(\alpha+\beta)+C\cos\alpha)r^2\sin^2\varphi+abB]}{a^2-r^2\sin^2\varphi}\cdot A - \frac{(B^2+C^2+2BC\cos\beta)r^2\sin^2\varphi-b^2B^2}{a^2-r^2\sin^2\varphi}=0.$$

Diese Formel läßt sich wenigstens dadurch noch etwas abkürzen, daß der in dem dritten Gliede vorkommende Ausdruck $B^2+C^2+2BC\cos\beta$, wie aus Fig. 97a. sich ergiebt, der Werth, für das Quadrat einer B und C äquipollenten Mittelkraft ist, und es wird, wenn man diese Mittelkraft mit M bezeichnet, das dritte Glied

$$=\frac{M^2r^2\sin^2\varphi-b^2B^2}{a^2-r^2\sin^2\varphi}$$

Uebrigens kann man jeden Falls der Gleichung die einfachere Form geben

$$A^2-\frac{2P}{a^2-r^2\sin^2\varphi}\cdot A-\frac{Q}{a^2-r^2\sin^2\varphi}=0$$

wo für P und Q die aus der obigen Gleichung sich ergebenden Werthe gesetzt werden müssen. Hiernach wird

$$A=\frac{P+\sqrt{[Q(a^2-r^2\sin^2\varphi)+P^2]}}{a^2-r^2\sin^2\varphi}$$

2. Wirken die Kräfte A, B und C alle drei parallel, ist also die Richtung sowohl von A als von B senkrecht gegen den Horizont, so wird $\alpha=\beta=0$, und daher $\cos\alpha=\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)=1$, also

$$A^2-\frac{2[(B+C)r^2\sin^2\varphi+abB]}{a^2-r^2\sin^2\varphi}\cdot A-\frac{(B+C)^2r^2\sin^2\varphi-b^2B^2}{a^2-r^2\sin^2\varphi}=0$$

eine Formel, die für den praktischen Gebrauch bedeutend abgekürzt werden kann, wenn man berücksichtigt, daß r als Radius des Zapfens im Verhältniß zu a und b sehr klein ist, und daß man daher a^2 statt $a^2-r^2\sin^2\varphi$ im Nenner setzen kann, wodurch nun die Gleichung wird

$$A^2-\frac{2[(B+C)r^2\sin^2\varphi+abB]A}{a^2}=\frac{(B+C)^2r^2\sin^2\varphi-b^2B^2}{a^2}$$

und dieses giebt für $r^2\sin^2\varphi=g^2$

$$\left(A - \frac{(B+C)g^2+abB}{a^2}\right)^2 =$$

$$\frac{(B+C)^2g^4+2abB(B+C)g^2+a^2b^2B^2}{a^4} + \frac{(B+C)^2g^2a^2-a^2b^2B^2}{a^4}$$

$$= \frac{(B+C)^2g^2(a^2+g^2)+2abB(B+C)g^2}{a^4}$$

oder, weil auch hier a^2 für a^2+g^2 gesetzt werden kann,

$$\left(A - \frac{(B+C)g^2+abB}{a^2}\right)^2 = \frac{g^2}{a^4}\left((B+C)^2a^2+2abB(B+C)\right)$$

und hieraus erhält man endlich

$$A = \frac{(B+C)g^2+abB+gV[(B+C)^2a^2+2abB(B+C)]}{a^2}$$

3. Einfach wird die Formel, wenn man das Gewicht der Maschine selbst nicht mit in Rechnung bringt, also $C=0$ setzt; bei dieser Voraussetzung wird die Gleichung aus No. 2.

$$A^2 - \frac{2(B\cos(\alpha+\beta)\cdot r^2\sin^2\varphi+abB)}{a^2-r^2\sin^2\varphi}\cdot A - \frac{B^2r^2\sin^2\varphi-b^2B^2}{a^2-r^2\sin^2\varphi} = 0$$

und ist nun die Richtung von A und von B senkrecht, also $\cos(\alpha+\beta) = 1$, so wird

$$A^2 - \frac{2B(r^2\sin^2\varphi+ab)}{a^2-r^2\sin^2\varphi}\cdot A + \frac{B^2(b^2-r^2\sin^2\varphi)}{(a^2-r^2\sin^2\varphi)} = 0$$

Nämlich es ist, wenn man alles gehörig ordnet,

$$(aA-Bb)^2 - r^2\sin^2\varphi\,(A+B)^2 = 0$$

und daher $aA-bB = r\sin\varphi\,(A+B)$

$$\text{also } A = \frac{(b+r\sin\varphi)B}{a-r\sin\varphi}$$

4. Nimmt man in der zuletzt gefundenen Formel $a=b$, so wird

$$A = \frac{(a+r\sin\varphi)B}{a-r\sin\varphi}$$

$$\text{und daher auch } A = B\left(1+\frac{2r\sin\varphi}{a-r\sin\varphi}\right)$$

$$\text{folglich ist } A-B = \frac{2r\sin\varphi}{a-r\sin\varphi}\cdot B$$

der Ausdruck für den Unterschied beider Kräfte, welcher nothwendig zur Ueberwindung der Friction erforderlich ist. Nennt man also diesen Unterschied $A-B=D$, so wird

Iſt nun die an dem Hebelarm ca = a normal gegen denſelben angebrachte Kraft = A, ſo muß, wenn A mit der Friction im Gleichgewicht ſein ſoll,

$$aA = \tfrac{2}{3}\mu r \cdot C$$

werden, und hieraus folgt $A = \frac{2\mu rC}{3a}$

Aufgabe 7. Eine Welle, deren Belaſtung = C ſein ſoll, hat eine geneigte Lage gegen den Horizont, ſo daß die Axe derſelben mit dem Hori[zont] einen Winkel = ψ bildet; es ſoll die Größe der Kraft angegeben werden, durch welche die Friction an dem untern Z[apfen] im Gleichgewicht erhalten wird.

Auflöſung. Wird der [ge]rechte Druck = C zerlegt in die Richtung der Axe der W[elle] alſo normal gegen die Grundfläche des Zapfens und in ei[ne] Richtung normal gegen dieſe Axe, ſo iſt die erſtere Theilkraft $C' = C\sin\psi$ und die andere $C'' = C\cos\psi$. Setzt man nun die an dem Hebelarm a erforderliche Kraft für das Gleichgewicht mit der durch C' entſtehenden Friction = A', und die zur Ueberwältigung der Friction, welche durch C'' entſteht, = A'', ſo iſt, nach Aufgabe 6,

$$A' = \frac{2\mu rC'}{3a} = \frac{2\mu rC\sin\psi}{3a}$$

Durch C'' entſteht eine Friction gegen die Seite der Pfanne, wie bei einer liegenden Welle, und es iſt hier der Druck = $A'' + C'' = A'' + C\cos\psi$, alſo die Friction, wenn der Frictionscoefficient für dieſen Fall $= \mu'$ geſetzt wird, $= \mu'(A'' + C\cos\psi)$, und das Moment derſelben, weil der Radius des Zapfens = r angenommen iſt, $= \mu' r(A'' + C\cos\psi)$. Es muß daher

$$aA'' = \mu' r(A'' + C\cos\psi)$$

ſein; folglich iſt $A'' = \frac{\mu' rC\cos\psi}{a - \mu' r}$

Nun iſt die ganze für das Gleichgewicht mit der Friction erforderliche Kraft $A = A' + A''$, folglich iſt auch

$$A = \frac{2\mu rC\sin\psi}{3a} + \frac{\mu' rC\cos\psi}{a - \mu' r} = Cr\left(\frac{2\mu\sin\psi}{3a} + \frac{\mu'\cos\psi}{a - \mu' r}\right)$$

und für $\mu' = \mu$ wird

$$A = \mu Cr\left(\frac{2\sin\psi}{3a} + \frac{\cos\psi}{a-\mu r}\right)$$

Zusatz. Da der Radius des Zapfens gegen den Hebelarm a unbedeutend ist, so kann man $a-\mu r = a$ setzen, wodurch der gefundene Ausdruck die einfachere Form erhält

$$A = \frac{\mu Cr}{a}\left(\tfrac{2}{3}\sin\psi + \cos\psi\right)$$

Hieraus läßt sich nun auch leicht der Werth von ψ ermitteln, für welchen die erforderliche Kraft A ein Maximum wird. Es ist nämlich, wenn man

$$dA = \frac{\mu Cr}{a}\cdot d\left(\tfrac{2}{3}\sin\psi + \cos\psi\right) = \frac{\mu Cr}{a}\left(\tfrac{2}{3}\cos\psi - \sin\psi\right)d\psi = 0$$

setzt,

$$\tfrac{2}{3}\cos\psi - \sin\psi = 0$$

und daher

$$\tfrac{2}{3} = \operatorname{tg}\psi$$

und man findet, daß für diesen Winkel $= \psi$ der Werth von A ein Maximum wird. Da nun $\frac{2}{3} = \operatorname{tg} 33^\circ\, 41' 24''$, so erhält A, bei dieser Neigung der Axe der Welle gegen den Horizont, den größten Werth.

Aufgabe 8. Es soll die Bedingung für das Gleichgewicht einer Wage mit Rücksicht auf die Friction bestimmt werden.

Auflösung. Ist m, Fig. 76, der Ruhepunkt einer Schnellwage, $ma = a$ der kürzere Arm, an welchem die Last X angebracht ist, und es wirkt das Laufgewicht $= P$ an dem Hebelarm $mx = x$, und man setzt das Gewicht des ganzen Wagebalkens $= W$, und den Abstand seines Schwerpunktes n von m, also $mn, = n$, so ist der ganze Druck $= X + P + W$ und die hieraus entstehende Friction $= \mu(X + P + W)$, und das Moment derselben, wenn der Radius der Zapfen, mit welchen die Wage in der Pfanne ruhet, $= r$ gesetzt wird, $\mu r(X + P + W)$. Soll nun P mit der Belastung sowohl als mit der Friction im Gleichgewicht sein, so ist, weil P noch von W unterstützt wird,

$$1)\quad xP + nW = aX + \mu r(X + P + W)$$

Diese Gleichung läßt sich noch vereinfachen, wenn man die Last $= Q$ setzt, welche ohne Laufgewicht durch den längern Arm des Balkens im Gleichgewicht erhalten wird; denn es ist alsdann auch

Ist nun die an dem Hebelarm ca = a normal gegen denselben angebrachte Kraft = A, so muß, wenn A mit der Friction im Gleichgewicht sein soll,

$$aA = \tfrac{2}{3}\mu r \cdot C$$

werden, und hieraus folgt $A = \frac{2\mu rC}{3a}$

Aufgabe 7. Eine Welle, deren Belastung = C sein soll, hat eine geneigte Lage gegen den Horizont, so daß die Axe derselben mit dem Horizont einen Winkel $= \psi$ bildet; es soll die Größe der Kraft angegeben werden, durch welche die Friction an dem untern Zapfen im Gleichgewicht erhalten wird.

Auflösung. Wird der senkrechte Druck = C zerlegt in die Richtung der Axe der Welle, also normal gegen die Grundfläche des Zapfens und in eine Richtung normal gegen diese Axe, so ist die erstere Theilkraft $C' = C\sin\psi$ und die andere $C'' = C\cos\psi$. Setzt man nun die an dem Hebelarm a erforderliche Kraft für das Gleichgewicht mit der durch C' entstehenden Friction = A', und die zur Ueberwältigung der Friction, welche durch C'' entsteht, = A'', so ist, nach Aufgabe 6,

$$A' = \frac{2\mu rC'}{3a} = \frac{2\mu rC\sin\psi}{3a}$$

Durch C'' entsteht eine Friction gegen die Seite der Pfanne, wie bei einer liegenden Welle, und es ist hier der Druck $= A'' + C'' = A'' + C\cos\psi$, also die Friction, wenn der Frictionscoefficient für diesen Fall $= \mu'$ gesetzt wird, $= \mu'(A'' + C\cos\psi)$, und das Moment derselben, weil der Radius des Zapfens = r angenommen ist, $= \mu' r(A'' + C\cos\psi)$. Es muß daher

$$aA'' = \mu' r(A'' + C\cos\psi)$$

sein; folglich ist $A'' = \frac{\mu' rC\cos\psi}{a - \mu' r}$

Nun ist die ganze für das Gleichgewicht mit der Friction erforderliche Kraft $A = A' + A''$, folglich ist auch

$$A = \frac{2\mu rC\sin\psi}{3a} + \frac{\mu' rC\cos\psi}{a - \mu' r} = Cr\left(\frac{2\mu\sin\psi}{3a} + \frac{\mu'\cos\psi}{a - \mu' r}\right)$$

und für $\mu' = \mu$ wird

$= P \sin\alpha$, und für den Frictionscoefficient $= \mu$ ist die zu überwindende Friction, weil die Bewegung der Walze rollend ist, (nach §. 57 No. 7) $= \mu \cdot \frac{P \sin\alpha}{R}$. Die aus dem Gewicht der Walze entstehende Kraft parallel zur geneigten Ebene ist $= P \cos\alpha$, und es ist daher die zu dem Gleichgewicht erforderliche Kraft

$$X = P\cos\alpha \pm \frac{\mu P \sin\alpha}{R}$$

und es ist hier, wenn das obere Zeichen angenommen wird, die Vermehrung von X hinreichend, um ein Hinaufrollen der Walze zu bewirken; benutzt man aber das untere Zeichen, so wird durch dieses das Herabrollen verhindert.

Zusatz 1. Aus der Gleichung $X' = P\cos\alpha - \frac{\mu P \sin\alpha}{R}$ folgt für $X' = 0$

$$P\cos\alpha = \frac{\mu P \sin\alpha}{R}$$

und daher $\frac{R}{\mu} = \operatorname{tg}\alpha$, also $\mu = R \cot\alpha$.

Kennt man sonach den Winkel, bei welchem eine Walze von selbst von der geneigten Ebene herabrollt, so läßt sich hieraus der Frictionscoefficient berechnen.

Zusatz 2. Für $\alpha = 90^0$ wird $X = \frac{\mu P}{R}$, welches die erforderliche Kraft ist, um die Walze auf horizontalem Boden fortzurollen.

Aufgabe 10. Eine große Last soll auf horizontalem Boden durch untergelegte Walzen fortgeschafft werden, und man kennt den Druck der Last auf jede Walze besonders; es soll die erforderliche Kraft berechnet werden.

Auflösung. Das Fortschaffen einer Last durch untergelegte Walzen geschieht dadurch, daß die Walzen mittelst eines Hebels um ihre Axen gedreht werden und die aufliegende Last durch ihre Friction gegen die Walze zugleich mit fortbewegt wird. Bei dem Fortrollen der Walze geschieht die Bewegung, Fig. 100, um den Punkt m, oder vielmehr um die gerade Linie, mit welcher die Walze den Horizont berührt, und

$$2)\ nW = aQ + \mu r(Q + W)$$

Aus der Gleichung No. 1 folgt

$$(n - \mu r)W = aX - xP + \mu r(X + P)$$

und aus No. 2 erhält man

$$(n - \mu r)W = aQ + \mu rQ$$

folglich iſt auch, wenn man beide Werthe von $(n - \mu r)W$ einander gleich ſetzt,

$$aX - xP + \mu r(X + P) = aQ + \mu rQ$$

nämlich es iſt

$$(a + \mu r)X - (x - \mu r)P = (a + \mu r)Q$$

und daher iſt endlich

$$\frac{(a + \mu r)(X - Q)}{x - \mu r} = P$$

die geſuchte Gleichung.

Zuſatz. Will man die Gleichung für die gemeine Wage kennen lernen, ſo muß, in der Gleichung No. 1, $n = 0$ und $x = a$ geſetzt werden, und es wird daher

$$aP = aX + \mu r(X + P + W)$$

$$\text{alſo } (a - \mu r)P = (a + \mu r)X + \mu rW$$

und, von beiden Theilen der Gleichung $(a - \mu r)X$ abgezogen, giebt

$$(a - \mu r)(P - X) = 2\mu rX + \mu rW$$

und hieraus erhält man

$$P - X = \frac{\mu r(2X + W)}{a - \mu r}$$

das auf der einen Seite erforderliche Uebergewicht wegen der Friction. Dieſes Uebergewicht iſt alſo immer der ganzen Belaſtung der Wage proportionirt, und es wird daſſelbe deſto kleiner, je größer a iſt, je länger alſo die Arme der Wage ſind, und einen je geringeren Werth r hat.

Aufgabe 9. Eine Walze, deren Gewicht $= P$, und von welcher der Radius der Grundfläche $= R$ iſt, wird durch eine Kraft X, welche auf die Axe m derſelben, Fig. 99, parallel zur geneigten Ebene ab wirkt, mit Rückſicht auf die Friction im Gleichgewicht erhalten; es ſoll der Werth von X beſtimmt werden.

Auflöſung. Da das ganze Gewicht der Walze $= P$ ſein ſoll, ſo iſt der normale Druck gegen die geneigte Ebene

in Beziehung auf den Punkt $p = R \times \frac{\mu' Q}{R} = \mu' Q$.

nun für dieses Moment bei a in der Richtung az eine
ft $= X$ erforderlich, so läßt sich diese in X' und X'' eben
zerlegen, wie z in z' und z'' zerlegt worden ist, und man
ält sonach

$$X' = X\cos\alpha \text{ und } X'' = X\sin\alpha$$

den Punkt p ist jetzt das Moment von $X' = (pn) \cdot X'$
$(cn - cp) \cdot X' = (a\cos\alpha - R) X'$, und das von X'' ist
bei $z'' = (mz'') \cdot X'' = (na) \cdot X'' = a\sin\alpha \cdot X''$, und
er die Gleichung

$$(a\cos\alpha - R) X' + a\sin\alpha \cdot X'' = \mu' Q$$

mlich es ist

$$(a\cos\alpha - R) \cdot X\cos\alpha + a\sin\alpha \cdot X\sin\alpha = \mu' Q$$

raus erhalten wird

$$X = \frac{\mu' Q}{a - R\sin\alpha}$$

ie ganze zu dem Fortrollen der Walze erforderliche Kraft an
m Hebel $ca = a$ ist folglich

$$Z + X = \frac{\mu P}{a + R\sin\alpha} + \frac{\mu' Q}{a - R\sin\alpha}$$

ier unterscheiden sich P und Q bloß dadurch von einander,
ß Q bloß den durch die auf der Walze aufliegende Last er-
ugten Druck bedeutet, und P den Druck, welcher durch diese
ist und das Gewicht der Walze zusammengenommen erzeugt
rd. Setzt man also das Gewicht der Walze $= W$, so
rd $P = Q + W$, und es ist daher auch

$$Z + X = \frac{\mu(Q + W)}{a + R\sin\alpha} + \frac{\mu' Q}{a - R\sin\alpha}$$

Zusatz. Der hier gefundene Ausdruck wird einfacher,
nn $\mu' = \mu$ ist. Bei dieser Voraussetzung erhält man

$$Z + X = \mu Q\left[\frac{1}{a + R\sin\alpha} + \frac{1}{a - R\sin\alpha}\right] + \frac{\mu W}{a + R\sin\alpha}$$

mlich es ist

$$X + Z = \frac{2a\mu Q}{a^2 - R^2\sin^2\alpha} + \frac{\mu W}{a + R\sin\alpha}$$

o der Theil $\frac{\mu W}{a + R\sin\alpha}$ die Kraft angiebt, welche zur Ue-

es iſt, wenn der ganze Druck der Walze gegen den Horizont $= P$ geſetzt wird, die an c parallel zur Grundfläche erforderliche Kraft für $cm = R$, (nach Aufgabe 9 Zuſatz 2) $= \frac{\mu P}{R}$. Das Moment dieſes Wiederſtandes in Beziehung auf den Punkt m iſt alſo $= R \times \frac{\mu P}{R} = \mu P$.

Iſt nun $ca = a$ der Hebelarm, durch welchen das Rollen der Walze bewirkt werden ſoll, und die Kraft z normal gegen denſelben, ſo kann man dieſe Kraft in zwei Theilkräfte z' und z'' zerlegen, von welchen die eine parallel gegen den Horizont und die andere normal auf demſelben iſt, und es wird für $\angle nca = \alpha$

$$z' = z\cos\alpha \text{ und } z'' = z\sin\alpha$$

Die erſtere kann als an dem Punkte n und die andere an z'' wirkend gedacht werden. Es iſt alſo in Beziehung auf m das Moment von $z' = (mn) \cdot z'$ und das von z'' iſt $= (mz'') \cdot z'' = (na)\, z''$. Dieſen beiden Momenten zuſammen widerſteht die Friction am horizontalen Boden, deren Moment $= \mu P$ iſt, folglich erhält man die Gleichung

$$(mn) \cdot z' + (na) \cdot z'' = \mu P$$

oder weil $mn = mc + nc = R + a\cos\alpha$ und $na = a\sin\alpha$, ſo iſt

$$(R + a\cos\alpha)\, z' + a\sin\alpha \cdot z'' = \mu P$$

nämlich es iſt, wenn man für z' und z'' die Werthe ſetzt,

$$(R + a\cos\alpha) \cdot z\cos\alpha + a\sin\alpha \cdot z\sin\alpha = \mu P$$

$$\text{oder } R\cos\alpha \cdot z + a\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\, z = \mu P$$

$$\text{alſo } (R\cos\alpha + a)z = \mu P$$

$$\text{und hieraus folgt } z = \frac{\mu P}{R\cos\alpha + az}$$

der Ausdruck für die erforderliche Kraft zur Ueberwindung der Friction bei m.

Wegen der auf der Walze aufliegenden Laſt iſt nun auch noch bei p die Friction zu überwinden, zu welcher, wenn die Laſt $= Q$ und der Frictionscoefficient $= \mu'$ iſt, bei c eine Kraft $= \frac{\mu' Q}{R}$ erfordert wird; das Moment dieſer Kraft iſt

also in Beziehung auf den Punkt $p = R \times \frac{\mu' Q}{R} = \mu' Q$.

Ist nun für dieses Moment bei a in der Richtung az eine Kraft $= X$ erforderlich, so läßt sich diese in X' und X'' eben so zerlegen, wie z in z' und z'' zerlegt worden ist, und man erhält sonach

$$X' = X\cos\alpha \text{ und } X'' = X\sin\alpha$$

Für den Punkt p ist jetzt das Moment von $X' = (pn) \cdot X' = (cn - cp) \cdot X' = (a\cos\alpha - R) X'$, und das von X'' ist wie bei $z'' = (mz'') \cdot X'' = (na) \cdot X'' = a\sin\alpha \cdot X''$, und daher die Gleichung

$$(a\cos\alpha - R) X' + a\sin\alpha \cdot X'' = \mu' Q$$

nämlich es ist

$$(a\cos\alpha - R) \cdot X\cos\alpha + a\sin\alpha \cdot X\sin\alpha = \mu' Q$$

woraus erhalten wird

$$X = \frac{\mu' Q}{a - R\sin\alpha}$$

Die ganze zu dem Fortrollen der Walze erforderliche Kraft an dem Hebel $ca = a$ ist folglich

$$Z + X = \frac{\mu P}{a + R\sin\alpha} + \frac{\mu' Q}{a - R\sin\alpha}$$

Hier unterscheiden sich P und Q bloß dadurch von einander, daß Q bloß den durch die auf der Walze aufliegende Last erzeugten Druck bedeutet, und P den Druck, welcher durch diese Last und das Gewicht der Walze zusammengenommen erzeugt wird. Setzt man also das Gewicht der Walze $= W$, so wird $P = Q + W$, und es ist daher auch

$$Z + X = \frac{\mu(Q + W)}{a + R\sin\alpha} + \frac{\mu' Q}{a - R\sin\alpha}$$

Zusatz. Der hier gefundene Ausdruck wird einfacher, wenn $\mu' = \mu$ ist. Bei dieser Voraussetzung erhält man

$$Z + X = \mu Q\left[\frac{1}{a + R\sin\alpha} + \frac{1}{a - R\sin\alpha}\right] + \frac{\mu W}{a + R\sin\alpha}$$

nämlich es ist

$$X + Z = \frac{2a\mu Q}{a^2 - R^2\sin^2\alpha} + \frac{\mu W}{a + R\sin\alpha}$$

wo der Theil $\frac{\mu W}{a + R\sin\alpha}$ die Kraft angiebt, welche zur Ue-

$$= \frac{2\mu P}{3(R^2-r^2)}(x^3-r^3) \text{ für } x = R$$

und es ist dasselbe daher =

$$\frac{2\mu P(R^3-r^3)}{3(R^2-r^2)} = \frac{2\mu P(R^2+Rr+r^2)}{3(R+r)} = \tfrac{2}{3}\mu P\left[(R+r)-\frac{2Rr}{R+r}\right]$$

Aufgabe 6. Wie läßt sich die Friction eines concentrisch ausgehöhlten Cylinders in dem Falle berechnen, wenn die Axe desselben gegen den Horizont unter einen Winkel = q geneigt ist?

Aufgabe 7. Es soll die zur Ueberwindung der Friction an den Rädern eines Fuhrwerks erforderliche Kraft berechnet werden.

Auflösung. Es sei, Fig. 101, abp der Umfang des Rades, und $\alpha\beta m$ der Durchschnitt der Axe. Die Belastung auf einem jeden Rade sei = r', und die zur Bewegung desselben erforderliche Kraft = X wirke an c in der zu der horizontalen pn parallelen Richtung cx, so entsteht durch P und X eine Mittelkraft in der Richtung cm = $\sqrt{(P^2+X^2)}$, und für cm = r ist das Moment der Friction an der Nabe des Rades = $\mu r\sqrt{(P^2+X^2)}$. Wird nun cp = R gesetzt, und das Gewicht des Rades = W, so erleidet p einen Druck = Q + W, wodurch eine Friction = $\mu'(Q+W)$ auf der horizontalen Fläche erzeugt wird, und es ist das Moment derselben = $R\mu'(Q+W)$. Weil aber die ganze Bewegung um p erfolgt und die Kraft X an c wirkt, so ist das Moment der Kraft = RX, und hieraus erhält man die Gleichung

$$RX = R\mu'(Q+W) + \mu r\sqrt{(P^2+X^2)}$$

woraus nun der Werth von X leicht berechnet werden kann.

Aufgabe 8. Wie ändert sich das Resultat der vorigen Aufgabe, bei der Voraussetzung, daß die Kraft X in schiefer Richtung wirkt, und welche Resultate werden erhalten, wenn das Fuhrwerk auf einer geneigten Ebene fortgeschafft werden soll?

Zweiter Abschnitt.

Von den Seilen.

§. 61.

Einleitung.

Die Seile oder Stricke werden vielfach bei den Maschinen gebraucht, um dadurch für die Kraft oder Last bequeme Angriffspunkte zu erhalten und denselben eine vortheilhafte Richtung zu verschaffen. Sollen dieselben nun keinen besondern Einfluß auf den Zustand des Gleichgewichts äußern, so müssen sie als vollkommen biegsam angenommen werden, so daß die geringste Kraft hinreicht, die Richtung einzelner Theile derselben zu ändern. Dieses ist nun zwar bei feinen Fäden allerdings der Fall, doch können solche, da ihnen die erforderliche Festigkeit fehlt, nicht gebraucht werden, sondern man muß Stricke öfters von bedeutender Stärke anwenden, und diese haben immer eine gewisse Steifigkeit, durch welche sie dem Biegen widerstehen; es ist daher immer ein gewisser Kraftaufwand erforderlich, um diesen Widerstand zu überwältigen: eine Kraft, die um so weniger bei der Berechnung außer Acht gelassen werden darf, da sie in vielen Fällen nicht unbedeutend ist. Der Einfluß der Steifigkeit der Seile läßt sich im Allgemeinen auf folgende Art übersehen: Ist adb, Fig. 102, eine Rolle, um welche ein Seil geschlagen ist, an dessen Enden die Gewichte P und X sich befinden, so muß, wenn P sinken und X sinken soll, die Rolle sich also um ihre Axe c in der Richtung adb umdreht, immerwährend ein Theil des Seiles die gerade Richtung verlassen und sich um den Umfang der Rolle krümmen, und zugleich muß der bei b abgewickelte Theil, welcher vorher die Krümmung der Rolle hatte, wieder eine gerade Richtung erhalten. Zu beiden ist ein gewisser Kraftaufwand erforderlich, indem die Steifigkeit des Seiles dieser Veränderung der Richtung widersteht. Bei a be-

hält das Seil noch eine Zeit lang die gerade Richtung, und die Normale von P auf dem horizontalen Durchmesser ba trifft daher nicht den Punkt a, sondern α, und es wirkt P daher an dem größern Hebelarm $c\alpha > cb$, weßwegen $X > P$ sein muß, wenn Gleichgewicht statt finden soll, so daß jede bei X hinzukommende Kraft Bewegung erzeugt, und außerdem wird der Hebelarm, an welchem X wirkt, noch dadurch etwas verkürzt, daß der bei b abgewickelte Theil des Seiles noch eine Zeit lang die Krümmung beibehält, wodurch die Normale von X auf ab diese Linie in β trifft. Hiernach muß für das Gleichgewicht zur Erzeugung der Bewegung eigentlich sein

$$X : P = c\alpha : c\beta, \text{ also } X = \left(\frac{c\alpha}{c\beta}\right) \cdot P.$$

Indessen ist der Unterschied $cb - c\beta$ so unbedeutend, daß derselbe ganz außer Acht gelassen wird, und man nur die Differenz $a\alpha$ berücksichtigt. Man hat vielfache Versuche gemacht, um den Einfluß dieses Umstandes genau kennen zu lernen, also eigentlich, um das wahre Verhältniß von $c\beta : c\alpha$ zu ermitteln, doch ist es nicht gelungen ein für alle Fälle richtiges Resultat zu erhalten. Nur soviel lehrt die Erfahrung, daß der Einfluß der Steifigkeit eines Seils bei einem Stricke von größerem Durchmesser auch größer wird, und daß derselbe geringer sein muß, wenn die Rolle, über welche das Seil geht, einen größeren Radius hat, weil die Krümmung eines größeren Kreises nicht so bedeutend als die eines kleinern ist. Da nun außerdem die obige Proportion $X = \left(\frac{c\alpha}{c\beta}\right) \cdot P$ giebt, so folgt, daß auch P und also die Spannung des Seils Einfluß hat. Setzt man nun den Radius der Rolle $ca = R$, den Durchmesser des Seils $= \delta$, und das bei X erforderliche Uebergewicht zur Ueberwältigung der Steifigkeit des Seils $= Z$, so muß

$$Z = F(P, R, \delta)$$

es muß nämlich Z eine Function der drei Größen P, R und δ sein.

Genauere Versuche geben zu erkennen, daß für den Gebrauch mit ziemlicher Zuverläßigkeit angenommen werden kann, es ist Z direct der Spannung P und dem Quadrate des Durch-

nesſers δ des Seils, und indirect dem Radius der Rolle proportionirt. Wird also bei dem Radius der Rolle $= R'$, dem Durchmesſer des Seils $= \delta'$, und der Spannung desſelben $= P'$, das erforderliche Uebergewicht $= Z'$ gesetzt, so ist nach dem so eben angegebenen Gesetze

$$Z : Z' = \frac{P\delta^2}{R} : \frac{P'(\delta')^2}{R'}$$

und hiernach ist $Z = \left(\frac{Z'R'}{P'(\delta')^2}\right) \cdot \frac{P\delta^2}{R}$

und es ist hier $\frac{Z'R'}{P'(\delta')^2}$ ein durch Versuche bestimmter Coefficient, der gewöhnlich mit k bezeichnet wird. Hiernach ist also

$$Z = k \cdot \frac{\delta^2}{R} \cdot P.$$

Ist der Werth von k gefunden, so läßt sich zwar mittelst dieſer Formel in jedem Falle der Werth von Z berechnen; es muß aber der Werth von R und der von δ durch dieſelben Maaße ausgedrückt werden, durch welche R' und δ', bei der Ermittelung von k ausgedrückt worden sind; hieraus geht also hervor, daß k einen andern Werth erhält, sobald R und δ durch andere Maaße ausgedrückt werden.

Wird der Radius R der Rolle durch franzöſische Zoll, und der Durchmesſer δ des Seils in franzöſischen Linien ausgedrückt, so ist als arithmetiſches Mittel mehrerer Verſuche $k = \frac{1}{288,88}$ gefunden worden, woraus die Größe des Coefficienten für jedes andere Maaß leicht berechnet werden kann, wenn das Verhältniß desſelben zu dem franzöſiſchen bekannt ist.

Um für dieſe Reduction eine allgemeine Formel zu erhalten, nehme man an, es sei R durch Einheiten ausgedrückt, von welchen jede m franzöſiſche Zoll hält, und δ durch Einheiten, jede zu n franzöſiſchen Linien, so ist der Werth

von $R = mR$ franz. Zoll, und der
von $\delta = n\delta$ franz. Linien,

folglich ist alsdann $Z = k \cdot \frac{(n\delta)^2}{mR} \cdot P$

nämlich es ist $Z = \frac{n^2k}{m} \cdot \frac{\delta^2}{R} \cdot P$

und daher wird bei dieser Voraussetzung $\frac{n^2k}{m} = k'$ der beständige Coefficient.

Beispiele. 1. Ist δ durch französische Linien und R durch pariser Fuß ausgedrückt, so wird, weil 1 paris. Fuß = 12 franz. Zoll, m = 12 und n = 1, also

$$k' = \frac{k}{12} = \frac{1}{12 \cdot 285{,}98} = \frac{1}{3431{,}76}$$

2. Ist δ in preuß. Linien und R in preuß. Zoll gegeben, so wird, weil 1 preuß. Linie $= \frac{139{,}13}{144}$ franz., und eben so auch 1 preuß. Zoll $= \frac{139{,}13}{144}$ franz., $m = n = \frac{13913}{14400}$ und es ist daher

$$k' = \frac{n^2k}{m} = nk = \frac{13913}{14400} \cdot \frac{1}{285{,}98} = \frac{1}{295{,}989}$$

3. Ist δ in preuß. Linien und R in preuß. Fuß gegeben, so findet man $k' = \frac{1}{3551{,}8716}$; es wird aber in diesem Falle gewöhnlich $k' \quad \frac{1}{3500}$ angenommen.

§. 62.

Uebungen zur Berechnung des Einflusses der Steifigkeit der Seile.

Aufgabe 1. Es soll die erforderliche Kraft X berechnet werden, welche bei einer festen Rolle mit der Last P, der Friction und der Steifigkeit des Seils im Gleichgewicht ist.

Auflösung. Setzt man das Gewicht der Rolle = A, und nimmt man an, daß P und X nach vertikaler Richtung wirken, so ist der Druck der Zapfen der Rolle gegen die Pfanne = X + P + A, also die Friction = μ(X + P + A), und das Moment derselben, wenn man den Radius der Zapfen = r setzt, = μr(X + P + A). Die Last ist = P, und eben so groß ist also auch die Spannung des Seils, an welchem die Last angebracht ist, und die zur Ueberwindung der Steifigkeit des Seils erforderliche Kraft ist daher = $\frac{k\delta^2P}{R}$. Das Mo-

ient hiervon und von der Last P ist, weil der Radius der olle = R sein soll, = $R\left[P + \frac{k\delta^2 P}{R}\right]$, und das Moment er Kraft X ist = RX, daher wird die Gleichung

$$RX = \mu r(X + P + A) + R\left[P + \frac{k\delta^2 P}{R}\right]$$

nd es ist hiernach

$$(R - \mu r)X = \mu rA + P[R + \mu r + k\delta^2]$$

oraus folgt

$$X = \frac{\mu rA + P(R + \mu r + k\delta^2)}{R - \mu r}$$

r Ausdruck für die erforderliche Kraft, durch welche an der ften Rolle die Last, die Friction und die Steifigkeit des Seils i Gleichgewicht erhalten werden.

Aufgabe 2. Die erforderliche Kraft X soll berechnet erden, durch welche an der beweglichen Rolle die Last Q, e Friction und die Steifigkeit des Seils im Gleichgewicht halten werden.

Auflösung. Ist, Fig. 84, A die bewegliche Rolle, so ird die ganze Last = Q + A, welche durch das Seil $a\alpha' a''B$ halten wird, und es ist daher, wenn man die Spannung des eils $a\alpha'$, das in a befestigt ist, = Z setzt, und die Kraft a dem andern Ende = X, wenn $a\alpha'$ und $\alpha''B$ in paralle- r Richtung wirken,

$$Q + A = Z + X$$

Der durch Q entstehende Druck giebt eine Friction an den Za- fen $= \mu Q$, und es ist das Moment derselben $= \mu rQ$, wenn an den Radius des Zapfens = r setzt. Da ferner die Span- ung von dem Seile $a\alpha'$, welches bei der erzeugten Bewegung krümmt werden muß, = Z ist, so wird die zur Ueberwin- ung der Steifigkeit dieses Seils erforderliche Kraft = $\frac{k\delta^2 Z}{R}$, so ist die ganze an α' wirkende Kraft = $Z + \frac{k\delta^2 Z}{R}$, deren oment durch $R\left(Z + \frac{k\delta^2 Z}{R}\right)$ ausgedrückt wird. Dieses so- hl, als das Moment der Friction wird durch das Moment der Kraft X im Gleichgewicht erhalten, und es ist daher

$$RX = \mu r Q + RZ\left(1 + \frac{k\delta^2}{R}\right)$$

und da $Z = Q + A - X$, so ist auch

$$RX = \mu r Q + R\,(Q + A - X)\left(\frac{R + k\delta^2}{R}\right)$$

nämlich es ist

$$RX + X(R + k\delta^2) = \mu r Q + (Q + A)(R + k\delta^2)$$

also $X(2R + k\delta^2) = (\mu r + R + k\delta^2)\,Q + A(R + k\delta^2)$

woraus endlich erhalten wird

$$X = \frac{(\mu r + R + k\delta^2)\,Q + (R + k\delta^2)\,A}{2R + k\delta^2}$$

Aufgabe 3. An der beweglichen Rolle, Fig. 83, befindet sich die Last Q, das eine Ende des Seils ist in A befestigt, und am andern Ende B befindet sich die Kraft X, durch welche die Last, Friction und die Steifigkeit des Seils im Gleichgewicht erhalten werden; es ist die Größe von X zu ermitteln für den Fall, daß aA und bB nicht parallel sind.

Auflösung. Schneiden sich Aa und Bb verlängert in c unter dem Winkel acb = c, und man setzt die Spannung von aA = Z, so ist die durch Z und X erzeugte Mittelkraft $= \sqrt{(X^2 + Z^2 - 2ZX\cos c)}$, und weil diese Mittelkraft = A + Q sein muß, wenn man das Gewicht der Rolle mit A bezeichnet, so wird

$$(Q + A)^2 = X^2 + Z^2 - 2ZX\cos c$$

Außerdem ist, wie bei der vorigen Aufgabe,

$$RX = \mu r Q + Z(R + k\delta^2)$$

$$\text{und daher } Z = \frac{RX - \mu r Q}{R + k\delta^2}.$$

Dieser Werth in der obigen Gleichung benutzt, giebt

$$(Q + A)^2 = X^2 + \left(\frac{RX - \mu r Q}{R + k\delta^2}\right)^2 - 2X\left(\frac{RX - \mu r Q}{R + k\delta^2}\right)\cos c$$

woraus nun der Werth von X gefunden werden kann.

Aufgabe 4. Es soll die bei einem Rollenzuge, Fig. 84, erforderliche Kraft X berechnet werden, durch welche die Last Q, die Friction an den Zapfen und die Steifigkeit der Seile im Gleichgewicht erhalten wird.

Auflösung. Werden die Rollen alle gleich groß und die Seile sämmtlich von gleicher Stärke angenommen, so ist

wenn man die Bezeichnung von Aufgabe 2. beibehält, die in der Richtung $\alpha''B$ erforderliche Kraft

$$X' = \left(\frac{\mu r + R + k\delta^2}{2R + k\delta^2}\right)Q + \left(\frac{R + k\delta^2}{2R + k\delta^2}\right)A$$

und es ist nun X' die an der Rolle B befindliche Last, welche durch eine Kraft X'' in der Richtung $\beta''x'$ im Gleichgewicht erhalten wird, deren Größe durch die Gleichung bestimmt ist

$$X'' = \left(\frac{\mu r + R + k\delta^2}{2R + k\delta^2}\right)X' + \left(\frac{R + k\delta^2}{2R + k\delta^2}\right)A.$$

Hiernach ist, wenn man für X' den Werth und zur Abkürzung $\frac{\mu r + R + k\delta^2}{2R + k\delta^2} = M$ und $\frac{R + k\delta^2}{2R + k\delta^2} = N$ setzt,

$$X'' = M^2Q + MNA + NA = M^2Q + NA(1 + M).$$

X'' ist nun Last an der dritten Rolle C, und die hier zu dem Gleichgewicht erforderliche Kraft X''' ist

$$X''' = MX'' + NA$$

also, wenn für X'' der Werth gesetzt wird,

$$X''' = M^3Q + NA(M + M^2) + NA = M^3Q + NA(1 + M + M^2)$$

Eben so findet man nun ferner

$$X'''' = M^4Q + NA(1 + M + M^2 + M^3)$$

$$X''''' = M^5Q + NA(1 + M + M^2 + M^3 + M^4) \text{ ꝛc.}$$

Ist also die ganze Anzahl der beweglichen Rollen $= n$, so wird die an der letzten erforderliche Kraft

$$X^{(n)} = M^nQ + NA(1 + M + M^2 \ldots + M^{n-1})$$

nämlich es ist

$$X^{(n)} = M^nQ + NA\left(\frac{M^n - 1}{M - 1}\right)$$

und dieses ist die Last an der festen Rolle X. Die zu dieser Last erforderliche Kraft X in der Richtung $x''P$ wird nach Aufgabe 1. ausgedrückt durch die Formel

$$X = \left(\frac{\mu r + R + k\delta^2}{R - \mu r}\right)X^{(n)} + \frac{\mu r}{R - \mu r} \cdot A$$

wofür man zur Abkürzung setzen kann

$$X = KX^{(n)} + \left(\frac{\mu r}{R - \mu r}\right)A$$

Wird nun hier für $X^{(n)}$ der gefundene Werth gesetzt, so erhält man

$$X = KM^nQ + KNA\left(\frac{M^n-1}{M-1}\right) + \left(\frac{\mu r}{R-\mu r}\right)A.$$

Es iſt aber in dieſem Ausdruck

$$KM^n = \left(\frac{\mu r+R+k\delta^2}{R-\mu r}\right)\left(\frac{\mu r+R+k\delta^2}{2R+k\delta^2}\right)^n = \frac{(\mu r+R+k\delta^2)^{n+1}}{(R-\mu r)(2R+k\delta^2)^n}$$

$$M-1 = \frac{\mu r+R+k\delta^2}{2R+k\delta^2} - 1 = \frac{\mu r-R}{2R+k\delta^2}$$

$$\text{alſo } \frac{K}{M-1} = \frac{\mu r+R+k\delta^2}{R-\mu r}\cdot\frac{2R+k\delta^2}{\mu r-R} = -\frac{(\mu r+R+k\delta^2)(2R+k\delta^2)}{(R-\mu r)^2}$$

$$\text{und } M^n-1 = -(1-M^n) = -1+\left(\frac{\mu r+R+k\delta^2}{2R+k\delta^2}\right)^n$$

$$= -\frac{(2R+k\delta^2)^n-(\mu r+R+k\delta^2)^n}{(2R+k\delta^2)^n}$$

Hiernach wird $K\left(\frac{M^n-1}{M-1}\right) =$

$$\frac{(\mu r+R+k\delta^2)\,[(2R+k\delta^2)^n-(\mu r+R+k\delta^2)^n]}{(R-\mu r)^2\,(2R+k\delta^2)^{n-1}}$$

und außerdem iſt endlich noch $N = \frac{R+k\delta^2}{2R+k\delta^2}$

Dieſe Werthe müſſen für die Coefficienten in der Gleichung geſetzt werden

$$X = KM^n\cdot Q + \left[KN\left(\frac{M^n-1}{M-1}\right) + \frac{\mu r}{R-\mu r}\right]A$$

wenn der Werth von X berechnet werden ſoll.

Dieſer Ausdruck wird bedeutend einfacher, wenn das Gewicht der Rolle außer Acht gelaſſen wird; denn ſetzt man $A = 0$, ſo wird

$$X = KM^n\cdot Q$$

nämlich es iſt alsdann

$$X = \frac{(\mu r+R+k\delta^2)^{n+1}}{(R-\mu r)(2R+k\delta^2)^n}\cdot Q$$

Aufgabe 5. Es iſt bei einem Rollenzuge die Laſt $= Q$, und die erforderliche Kraft X, mit Rückſicht auf Friction und die Steifigkeit der Seile gegeben; es ſoll hieraus die Anzahl der beweglichen Rollen beſtimmt werden.

Auflöſung. Aus der Gleichung

$$X = KM^n\cdot Q + KN\left(\frac{M^n-1}{M-1}\right)A + \left(\frac{\mu r}{R-\mu r}\right)A$$

ält man $KM^nQ + \frac{KM^nNA}{M-1} =$

$$X + \frac{KNA}{M-1} - \left(\frac{\mu r}{R-\mu r}\right)A$$

d es ist hiernach $K\left(Q + \frac{NA}{M-1}\right)M^n =$

$$X + \frac{KNA}{M-1} - \left(\frac{\mu r}{R-\mu r}\right)A$$

d daher wird $M^n =$

$$\left[X + \frac{KNA}{M-1} - \left(\frac{\mu r}{R-\mu r}\right)A\right] : K\left(Q + \frac{NA}{M-1}\right)$$

glich ist $n \log M =$

$$\log\left[X + \frac{KNA}{M-1} - \left(\frac{\mu r}{R-\mu r}\right)A\right] - \log\left[K\left(Q + \frac{NA}{M-1}\right)\right]$$

odurch also der Werth von n bestimmt ist, für welchen jedoch nur eine ganze Zahl brauchbar ist, und man nimmt daher für n die nächst größere ganze Zahl, und verändert X, wenn das Gleichgewicht erhalten werden soll.

Aufgabe 6. Es ist von der beweglichen Rolle A, Fig. 84, die durch die Last Q und das Gewicht der Rolle A erzeugte Spannung des Fadens $ac' = Z$ gegeben; man soll daraus die bei B erforderliche Kraft X berechnen, durch welche mit Rücksicht auf Friction und Steifigkeit des Seils Gleichgewicht erzeugt wird.

Auflösung. Nach Aufgabe 2. ist

$$X = \frac{(\mu r + R + k\delta^2)\,Q}{2R + k\delta^2} + \frac{(R + k\delta^2)\,A}{2R + k\delta^2}$$

und $X + Z = Q + A$, also $Q = X + Z - A$;

wird dieser Werth für Q gesetzt, so erhält man

$K(2R + k\delta^2) = (\mu r + R + k\delta^2)(X + Z - A) + (R + k\delta^2)A$

und es ist daher

$$X(R - \mu r) = (\mu r + R + k\delta^2)Z - \mu rA$$

$$\text{folglich } X = \frac{(\mu r + R + k\delta^2)Z}{R - \mu r} - \left(\frac{\mu r}{R - \mu r}\right)A.$$

Aufgabe 7. In einem Flaschenzuge befinden sich n Rollen von gleicher Größe, was übrigens nur alsdann möglich ist, wenn alle in einer Flasche enthaltenen Rollen sich nebeneinander befinden; es soll die zu dem Gleichgewicht erforder-

liche Kraft berechnet werden, wenn dabei auf Friction und Steifigkeit der Seile Rückſicht genommen wird.

Auflöſung. Sind, Fig. 103, a und a' ein paar Rollen, hinter welchen die übrigen ſich befinden, und man ſetzt die Spannung des erſten Seils $ma = z'$, die des zweiten $a'a'' = z''$, des dritten $= z'''$, des vierten $= z''''$, und die des unten Seils $= z^{(n)}$, ſo iſt, wenn die Laſt mit Einſchluß der unteren Flaſche $= Q$ geſetzt wird,

$$Q = z' + z'' + z''' \ldots + z^{(n)}$$

wo für eine gerade Zahl $= n$, das Seil, deſſen Spannung $= z^{(n)}$ iſt, nach oben wirkt, indem unten eine Rolle mehr als oben von dem Seile umſchlungen wird.

Es iſt aber nach Aufgabe 6., für $A = 0$,

$$z'' = \left(\frac{\mu r + R + k\delta^2}{R - \mu r}\right) z'$$

und nach Aufgabe 1,

$$z''' = \left(\frac{\mu r + R + k\delta^2}{R - \mu r}\right) z''$$

wo in beiden Ausdrücken der Coefficient derſelbe iſt; man kann alſo, wenn dieſer Coefficient mit k bezeichnet wird,

$z'' = kz'$; $z''' = kz''$; $z'''' = kz'''$ ꝛc. ſetzen

und es iſt daher auch

$$z'' = kz'; \quad z''' = k^2 z'; \quad z'''' = k^2 z' \ldots.$$

$$\text{alſo } z^{(n)} = k^{n-1} z', \text{ und daher } z' = \frac{z^{(n)}}{k^{n-1}}$$

Die Gleichung für Q wird daher, wenn man dieſe Werthe ſetzt,

$$Q = z'(1 + k + k^2 + k^3 \ldots + k^{n-1}) = z'\left(\frac{k^n - 1}{k - 1}\right)$$

$$\text{nämlich es iſt } Q = \frac{z^{(n)}}{k^{n-1}}\left(\frac{k^n - 1}{k - 1}\right)$$

$$\text{folglich } z^{(n)} = \left(\frac{k^n - k^{n-1}}{k^{n-1}}\right) Q$$

Soll nun die Kraft X in der Richtung nach unten wirken, ſo muß das Seil noch über die letzte Rolle der obern Flaſche geführt werden, und es iſt daher nach Aufgabe 1.

$$X = kz^{(n)}$$

folglich wird für die geſuchte Kraft X der Ausdruck erhalten

$$X = \left(\frac{k^{n+1} - k^n}{k^n - 1}\right) Q$$

Zusatz. Der hier gefundene Ausdruck giebt den Werth X für eine gleiche Anzahl Rollen in beiden Flaschen, n das eine Ende m des Seils an der obern Flasche be- get ist. Befindet sich das Ende des Seils an der untern sche, so wird, wenn oben und unten gleich viel Rollen von n Seile umschlungen sind, die Anzahl der gespannten Seile rade, und es wirkt die Kraft nun ebenfalls von unten h oben. Es ist also für eine ungrade Zahl = n jetzt eben- s

$$z^{(n)} = \left(\frac{k^n - k^{n-1}}{k^n - 1}\right) Q$$

, wenn man das Seil noch über eine obere Rolle führt, die Richtung der Kraft nach unten zu erhalten,

$$X = \left(\frac{k^{n+1} - k^n}{k^n - 1}\right) Q$$

enthält aber in diesem Fall die obere Flasche eine Rolle hr als die untere.

Aufgabe 8. Die an dem Flaschenzuge, Fig. 103, der s zwei Paar Rollen von verschiedener Größe besteht, zu dem leichgewicht erforderliche Kraft X soll berechnet werden.

Auflösung. Man setze die Spannung des Seils mα z', die von $\alpha'\alpha'' = z''$, von $\beta\beta' = z'''$ und von $\beta''\gamma$ z, und das Gewicht der untern Flasche mit der an derfel- n befindlichen Last = Q, so ist

$$z' + z'' + z''' + z = Q$$

d man kann setzen

$$z'' = k'z'; \; z''' = k''z'' \text{ und } z = k'''z'''$$

ist also auch

$$z'' = k'z'$$
$$z''' = k'k''z'$$
$$z = k'k''k'''z', \text{ also } z' = \frac{z}{k'k''k'''}$$

aher wird

$$z'(1 + k' + k'k'' + k'k''k''') = Q$$

raus der Werth von z leicht gefunden werden kann, wenn

die Coefficienten k', k'', k''' bekannt ſind. Im Allgemeinen iſt

$$k = \frac{\mu r + R + k\delta^2}{R - \mu r}$$

und da die Rollen a und a' gleich groß ſind, ſo iſt auch k' = k'', und es iſt daher für k' = k'' = k

$$\frac{z}{k^3 k'''}\,[1 + k + k^2 + k^2 k'''] = Q$$

Wird aber das Seil noch über die vierte Rolle A geſchlungen, ſo iſt nun, weil die Rollen A und A' gleich groß ſind,

$$X = k'''z, \text{ alſo } z = \frac{X}{k'''}$$

folglich wird auch, wenn man k''' = L ſetzt,

$$\frac{X}{k^3 L^2}\,(1 + k + k^2 + k^2 L) = Q$$

und daher iſt

$$X = \frac{k^2 L^2 Q}{1 + k + k^2 (1 + L)}$$

Setzt man nun den Radius der Rollen a und a' = a, und den Zapfen derſelben = α, ſo wird

$$k' = k'' = k = \frac{\mu\alpha + a + k\delta^2}{a - \mu\alpha}$$

und eben ſo wird, wenn von den größern Rollen A und A' der Radius = b, und der von den Zapfen = β geſetzt wird,

$$k''' = L = \frac{\mu\beta + b + k\delta^2}{b + \mu\beta}$$

Zuſatz. Es wird auch bei dieſer Aufgabe vorausgeſetzt, daß das eine Ende des Seils bei m an der obern Rolle befeſtiget ſei; es kann daſſelbe ſich aber auch an der untern Flaſche befinden, und alsdann muß, wenn X in der Richtung von oben nach unten wirken ſoll, in der obern Flaſche eine Rolle mehr als in der untern ſich befinden.

Aufgabe 9. In dem Flaſchenzuge, Fig. 103, befinden ſich bei a' und a mehrere Rollen von gleicher Größe neben einander, und eben ſo auch bei A und A'; es ſoll die zu dem Gleichgewicht erforderliche Kraft X berechnet werden.

Auflöſung. Bezeichnet man die Spannung der Faden bei den kleineren und den mit denſelben verbundenen Rollen

und es wächst also k^n mit n, wodurch allerdings ein Werth von n bestimmt ist, durch welchen X einen kleinsten Werth erhält, und dieser Werth für n wird, wie bekannt, aus der Differentialgleichung erhalten

$$\frac{dX}{dn} = 0$$

also wenn man setzt $d\left[\frac{Qk^n}{n}\right] : dn = 0.$

Nun ist $d\left[\frac{Qk^n}{n}\right] = Q \cdot d\left(\frac{k^n}{n}\right) =$

$$Q\left[\frac{ndk^n - k^n dn}{n^2}\right] \text{ und } dk^n = k^n dn \log k$$

$$\text{also ist } Q\left[\frac{nk^n \log k - k^n}{n^2}\right] = 0$$

$$\text{und hieraus erhält man } n \log k - 1 = 0$$

$$\text{folglich ist endlich } n = \frac{1}{\log k}$$

die erforderliche Anzahl der Rollen, für welche die Kraft X ein Minimum, oder bei einer gegebenen Kraft X, die zu bewegende Last Q ein Maximum wird, wo, wie sich von selbst versteht, unter log k der natürliche Logarithme dieser Größe verstanden wird.

Beispiel. Es sei der Radius R der Rollen $= 3\frac{1}{2}$ Zoll $= \frac{7}{24}$ Fuß, der Radius r der Zapfen $= \frac{1}{2}$ Zoll $= \frac{1}{24}$ Fuß, und der Durchmesser δ des Seils = 10 Linien, alles in preußischem Maaße, so wird, nach §. 61. Beisp. No. 3, $k = \frac{1}{3500}$. Ist nun der Frictionscoefficient $\mu = \frac{1}{5}$, so erhält man

$$k = \frac{R + \mu r + k\delta^2}{R - \mu r} = \frac{\frac{7}{24} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{24} + \frac{1}{35}}{\frac{7}{24} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{24}}$$

$$= \frac{\frac{9}{10} + \frac{1}{35}}{\frac{7}{24} - \frac{1}{120}} = \frac{138}{119} = 1{,}1596$$

hiernach ist log vulg k = 0,0643082

und diesen durch die Multiplication mit 2,3025851 in einen natürlichen Logarithmen verwandelt, giebt

$$\log \text{nat } k = 0{,}1480751$$

$$\text{und daher wird } n = \frac{1}{\log \text{nat } k} = \frac{1}{0{,}1480751}$$

gleich beinah 7 beträgt; es wird daher bei den hier ange-

nommenen Dimenſionen der Flaſchenzug bei 7 Rollen die mö
lichſt größte Wirkung hervorbringen. Um ſich hiervon zu übe
zeugen, braucht man nur den Werth von X für n = 6,
und 8 zu berechnen, und man findet, wenn die Formel b
nutzt wird

$$X = \frac{Q}{n} \cdot k^n$$

für n = 6, de h von X = 0,4072 × Q
„ n = 7, „ X = 0,3922 × Q
„ n = 8, „ X = 0,4087 × Q

es wird alſo wirklich n kleinſten, wenn man n =
nimmt.

Zuſatz 1. Einen hi jedenfalls hinreichenden Nä
rungswerth für n kann ma.. auch auf folgende ganz einfach
Art ermitteln:

Da $X = \frac{Q}{n} \cdot k^n$ ein Minimum ſein ſoll, ſo muß, wen
n + 1 oder n − 1 ſtatt n geſetzt wird, in beiden Fällen me
herauskommen, und es werden beide nur wenig von de
möglichſt kleinſten Werthe von X verſchieden ſein. Man kan
daher ohne merklichen Fehler ſetzen

$$\frac{Q}{n+1} \cdot k^{n+1} = \frac{Q}{n-1} \cdot k^{n-1}$$

woraus erhalten wird $n = \frac{k^2+1}{k^2-1}$

Wird hier für k der oben gefundene Werth = 1,1596 geſe
ſo findet man ebenfalls, daß n = 7 ſein muß.

Zuſatz 2. Setzt man in der Gleichung $X = \frac{Q}{n} \cdot k^n$ f
n den in dem vorigen Zuſatze gefundenen Werth, ſo erhält m

$$X = \frac{Q(k^2-1)}{k^2+1} \cdot k^{\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)}$$

als den Ausdruck für die möglichſt kleinſte Kraft, durch welc
eine gegebene Laſt mit Hülfe eines Flaſchenzuges gehoben we
den kann.

§. 63.

Uebungen von der Friction der Seile.

Es iſt bekannt, daß wenn man ein Seil ein oder mehr
mi

um einen Cylinder windet, und an beiden Enden deſſel-
Kräfte anbringt, die eine derſelben bedeutend größer als
ndere ſein muß, wenn ſie hinreichend ſein ſoll, das Gleich-
cht zur Erzeugung der Bewegung herzuſtellen, ſo daß durch
Vermehrung der Kraft eine wirkliche Bewegung erfolgt,
es wird die zu dem Gleichgewicht erforderliche Kraft deſto
er, je mehrmal das Seil um den Cylinder gewunden iſt.
nun hier eine Bewegung nicht anders erfolgen kann, als
er Art, daß das Seil über den Cylinder hingleitet, und
die Friction des Seils gegen den Cylinder überwunden
; der Druck aber keine Vermehrung dadurch erhält, daß
das Seil mehrmal um den Cylinder windet, während
urch doch die Friction einen Zuwachs erhält: ſo ſcheint
daß bei einem Seile die Friction mit der Größe der be-
enden Fläche wachſe, und alſo hier eine Ausnahme von
Regel ſtatt finde, daß die Friction, unabhängig von der
hrenden Fläche, immer nur dem Drucke proportionirt ſei.
Thatſache iſt ſo auffallend, daß ſie ſelbſt von der Aka-
e der Wiſſenſchaften in Paris dem Amonton, gegen das
ihm aufgeſtellte Geſetz der Friction, als ein ſchwer zu be-
ender Einwand entgegengeſtellt wurde, wie aus den Ab-
lungen der Akademie von 1703 ſich ergiebt.

Amonton, der anfangs dieſen Einwand dadurch zu be-
en verſuchte, daß er angab: „indem ein Seil mehrmal um
Cylinder gewunden wird, bringt man eine und dieſelbe
alt eben ſo viel mal bei demſelben an, und es wächſt ſo-
der Druck, der alſo auch eine größere Kraft erfordert" —
bald ſelbſt, daß dieſe Erklärung unzulänglich ſei, und
e nun die Erſcheinung auf folgende Art zu erklären:

Man ſchneide einen Cylinder nach ſeiner Axe in zwei
e Hälften. Die eine hänge man auf, daß ſie unbe-
ch ſei, und die andere etwas tiefer aufgehängte ſei
glich und mit einem Gewichte belaſtet. Um beide
ten ſchlinge man ein Seil ſo oft man will, und hänge
das eine Ende deſſelben eine Kraft, welche den unte-
mit Gewichten belaſteten Halbcylinder in die Höhe zu
en verſucht; ſo iſt hier die Kraft in denſelben Umſtänden,
wenn ſie die Laſt vermittelſt mehrerer Rollen zum Stei-

gen bringen ſollte. Findet alſo Gleichgewicht ſtatt, ſo muß, wie bei dem Flaſchenzuge, die Kraft zu der Laſt, wie 1 zu der Zahl der halben Umläufe des Seils um den Cylinder, ſich verhalten, und es bleiben die Umſtände dieſelben, wenn beide Halbcylinder ſich vereinigen u. ſ. w.

So ſcharfſinnig auch dieſe Erklärung iſt, ſo ſieht man doch, daß ſie keinesweges ausreicht; indem das Verhältniß der Kraft zur Laſt bei einem um einen Cylinder geſchlungenen Seile bei weitem wächſt, als bei einem Flaſchenzuge. Deſſen ungeachtet nicht zu verkennen, daß die ebenfalls blos der Druck mehrung der Friction erzeugt, und das ungemein ſchnell. ſen derſelben folgt ganz einfach aus der Eigenſchaft d den, daß ſie in allen ihren Theilen durch eine angebrachte Kraft geſpannt werden, und dieſe Spannung iſt es, welche den Druck gegen den Cylinder hervorbringt, zu deſſen Ueberwindung, wenn das Seil mehrmal um den Cylinder geſchlungen iſt, eine ſo große Kraft erfordert wird. Die Art und Weiſe, wie die zur Erzeugung der Bewegung erforderliche Kraft mit der Zahl der Umwindungen des Seils um den Cylinder zunimmt, hat man auf verſchiedenen Wegen zu berechnen geſucht, wovon hier das Weſentlichſte mitgetheilt zu werden verdient. Alſo

1. An dem einen Ende des Seils, welches um den Theil ax der Rolle, Fig. 104, gewunden iſt, befindet ſich eine Laſt = Q, und es ſei hier eine Kraft = X zur Erzeugung der Bewegung erforderlich. Setzt man den Winkel acx = φ und ca = R, ſo iſt, wenn φ nicht durch Grade, ſondern durch Theilen von π für den Radius = 1 ausgedrückt wird, die Länge des Bogens ax = x = Rφ, und für xx′ = dx iſt dx = R$d\varphi$. Iſt nun der Normaldruck auf ax = V, ſo wird derſelbe auf xx′ = dV; dieſer Druck aber kann als die Mittelkraft an dem Punkte z angeſehen werden, welche durch die Spannungen der Theile zx und zx′ des Seils erzeugt wird, und es iſt daher, wenn man die Spannung bei z = T ſetzt, weil xz = $\frac{1}{2}$(xx′), und daher $\angle$xcz = $\frac{1}{2}d\varphi$,

$$dV = 2T \sin \tfrac{1}{2}(d\varphi)$$

alſo, da $\sin \frac{1}{2}(d\varphi) = \frac{1}{2}d\varphi$, ſo wird

$$dV = T d\varphi$$

mal um einen Cylinder windet, und an beiden Enden deſſelben Kräfte anbringt, die eine derſelben bedeutend größer als die andere ſein muß, wenn ſie hinreichend ſein ſoll, das Gleichgewicht zur Erzeugung der Bewegung herzuſtellen, ſo daß durch jede Vermehrung der Kraft eine wirkliche Bewegung erfolgt, und es wird die zu dem Gleichgewicht erforderliche Kraft deſto größer, je mehrmal das Seil um den Cylinder gewunden iſt. Da nun hier eine Bewegung nicht anders erfolgen kann, als in der Art, daß das Seil über den Cylinder hingleitet, und alſo die Friction des Seils gegen den Cylinder überwunden wird; der Druck aber keine Vermehrung dadurch erhält, daß man das Seil mehrmal um den Cylinder windet, während hierdurch doch die Friction einen Zuwachs erhält: ſo ſcheint es, daß bei einem Seile die Friction mit der Größe der berührenden Fläche wachſe, und alſo hier eine Ausnahme von der Regel ſtatt finde, daß die Friction, unabhängig von der berührenden Fläche, immer nur dem Drucke proportionirt ſei. Dieſe Thatſache iſt ſo auffallend, daß ſie ſelbſt von der Akademie der Wiſſenſchaften in Paris dem Amonton, gegen das von ihm aufgeſtellte Geſetz der Friction, als ein ſchwer zu beſeitigender Einwand entgegengeſtellt wurde, wie aus den Abhandlungen der Akademie von 1703 ſich ergiebt.

Amonton, der anfangs dieſen Einwand dadurch zu beſeitigen verſuchte, daß er angab: „indem ein Seil mehrmal um einen Cylinder gewunden wird, bringt man eine und dieſelbe Gewalt eben ſo viel mal bei demſelben an, und es wächſt ſomit der Druck, der alſo auch eine größere Kraft erfordert“ — fand bald ſelbſt, daß dieſe Erklärung unzulänglich ſei, und ſuchte nun die Erſcheinung auf folgende Art zu erklären:

Man ſchneide einen Cylinder nach ſeiner Axe in zwei gleiche Hälften. Die eine hänge man auf, daß ſie unbeweglich ſei, und die andere etwas tiefer aufgehängte ſei beweglich und mit einem Gewichte belaſtet. Um beide Hälften ſchlinge man ein Seil ſo oft man will, und hänge an das eine Ende deſſelben eine Kraft, welche den unteren mit Gewichten belaſteten Halbcylinder in die Höhe zu bringen verſucht; ſo iſt hier die Kraft in denſelben Umſtänden, als wenn ſie die Laſt vermittelſt mehrerer Rollen zum Stei-

$n = 3$, den Werth von $X = 535{,}50 \cdot Q$
$n = 4$, " " $= 4348{,}56 \cdot Q$
$n = 5$, " " $= 35312{,}77 \cdot Q$

u. ſ. w.

$n = 10$, " " $= 1248142286 \cdot Q$

Dieſe Reſultate erklären es hinlänglich, wie es möglich iſt, daß z. B. ein Schiff, welches durch ein mehrmal um einen Pfahl geſchlungenes Seil an [illegible] ſtgehalten wird, ſelbſt durch die größte Gewalt de[illegible] ht losgeriſſen werden kann.

2. Eine a[illegible] Formel für die Friction der Stricke wird auf folgen[illegible]halten: Es ſei das Seil um den halben Cylinder g[illegible] und bei dieſer Vorausſetzung eine Kraft $= X$ erfor[illegible]m einer Laſt $= Q$ und der Friction das Gleichgewich[illegible]alten, ſo iſt, wenn man den Frictionscoefficienten $= \mu$ ſetzt,

$$X = Q + \mu(Q + X)$$

alſo wird $X(1-\mu) = Q(1+\mu)$

und daher $X = Q\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)$.

Es muß alſo bei einer halben Umwindung Q mit dem conſtanten Coefficienten $\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)$ multiplicirt werden, um die zu dem Gleichgewicht erforderliche Kraft kennen zu lernen. Wird nun $Q\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)$ als die Laſt angeſehen, ſo iſt bei einer fernern halben Umwindung zu dem Gleichgewicht eine Kraft nöthig $= Q\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) \times \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) = Q\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^2$, und es iſt alſo mit dieſer Kraft Q im Gleichgewicht, wenn das Seil einmal um den ganzen Cylinder geſchlungen iſt. Bei einer weiteren Umwindung um den halben Cylinder muß dieſer Ausdruck wieder mit $\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)$ multiplicirt werden u. ſ. w. Folglich iſt, wenn man das Seil n mal um den ganzen Cylinder, alſo $2n$ mal um den halben Cylinder ſchlingt, die erforderliche Kraft

$$X = Q\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{2n}$$

ei diesem Ausdrucke muß der Werth von μ durch einen Ver-
ch bestimmt werden, indem man das Seil um den halben
ylinder schlingt, und das zu der Erzeugung der Bewegung
forderliche Uebergewicht ermittelt. Ist dieses Uebergewicht
= q, so wird

$$X = Q + q = Q\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)$$

und hieraus findet man $\mu = \frac{q}{2Q+q}$.

ie Resultate, welche durch den obigen Werth von X erhal-
n werden, stimmen genau mit den in No. 1 angegebenen
erein, wie sich aus folgendem ergiebt: Nach No. 1 ist bei
ner halben Umschlingung des Cylinders

$$X = 2{,}85 \cdot Q$$

nd nach der obigen Formel wird in diesem Falle

$$X = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) \cdot Q$$

nd man kann daher durch die Gleichung

$$\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) Q = 2{,}85 \cdot Q$$

en in der hier gefundenen Formel für μ zu setzenden Werth
rechnen, wenn beide Ausdrücke übereinstimmen sollen. Es
lgt aber aus dieser Gleichung

$$1 + \mu = 2{,}85 - 2{,}85 \cdot \mu$$

$$\text{also } 3{,}85 \cdot \mu = 1{,}85$$

$$\text{und daher } \mu = \frac{185}{385} = \frac{37}{77}$$

so beinahe $\mu = \frac{1}{2}$. Doch braucht man μ selbst gar nicht
zu kennen, indem unmittelbar der Werth von $\frac{1-\mu}{1+\mu} = 2{,}85$
esetzt werden kann. Es wird hiernach bei n Umwindungen
es Cylinders

$$X = Q \cdot 2{,}85^{2n}$$

ieser Ausdruck giebt

für $n = \frac{1}{2}$, den Werth von $X = 2{,}85$
$n = 1$, " " $= 8{,}12$
$n = 2$, " " $= 65{,}97$
$n = 3$, " " $= 535{,}67$ ꝛc.

Dieſe Uebereinſtimmung beider Formeln läßt ſich übrigens erklären, denn nach No. 1 iſt

$$X = Q \cdot e^{2\mu n\pi} = Q\,(e^{\mu\pi})^{2n}$$

und es iſt für $n = \frac{1}{2}$ der Werth von $e^{\mu\pi} = 2{,}85$ gef worden, alſo iſt nach dieſer Formel

$$X = Q \cdot 2{,}85^{2n}$$

eben dieſelbe, welche a[us] $X = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{2n} \cdot Q$ erhalten wird, man $\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) = 2{,}8$

Da es nun jel ıfacher iſt, den relativen W von μ bei der Umw s Seils um den halben C der kennen zu lerne abſoluten Werth von μ, w in der Formel No. 1 t wird, ſo iſt auch der Aus $X = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{2n} \cdot Q$ dem in No. 1 vorzuziehen.

3. In dem Ausdrucke $X = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{2n} \cdot Q$ iſt μ tiv, und es ändert ſich der Werth von dieſem Coefficie wenn man nicht gerade eine halbe Umwindung des Cyli als Norm annimmt. Nimmt man ſtatt deſſen nur $\frac{1}{4}$ vo Umfange des Cylinders, und ſetzt nun den Frictionscoeff ten $= \mu'$, ſo wird der allgemeine Ausdruck für n Un dungen

$$X = \left(\frac{1+\mu'}{1-\mu'}\right)^{4n} \cdot Q$$

und daher, wenn $n = \frac{1}{2}$ geſetzt wird,

$$X = \left(\frac{1+\mu'}{1-\mu'}\right)^{2} \cdot Q = 2{,}85$$

nach No. 1. Es iſt alſo jetzt $\left(\frac{1+\mu'}{1-\mu'}\right)^{2} = 2{,}85$

und daher $\frac{1+\mu'}{1-\mu'} = \sqrt{2{,}85} = 1{,}688$

folglich iſt der relative Werth von μ' für eine Viertelu dung des Cylinders

$$\mu' = \frac{0{,}688}{2{,}688} = \frac{43}{168}$$

und die allgemeine Formel wird

$$X = 1{,}688^{n} \cdot Q.$$

Umgekehrt kann man auch aus einem bekannten relativen Werth von μ den absoluten, wie er in der Formel No. 1 gebraucht wird, leicht berechnen. Setzt man nämlich zur Unterscheidung den relativen Werth $= \mu'$ und den absoluten $= \mu$, und bezieht sich μ' auf eine halbe Umwindung, so wird

$$Q \cdot e^{2\mu n\pi} = \left(\frac{1+\mu'}{1-\mu'}\right)^{2n} \cdot Q$$

und daher ist

$$e^{\mu\pi} = \frac{1+\mu'}{1-\mu'}$$

also bei dem Gebrauch der gemeinen Logarithmen

$$\mu\pi \log e = \log\left(\frac{1+\mu'}{1-\mu'}\right)$$

$$\text{folglich ist } \mu = \log\left(\frac{1+\mu'}{1-\mu'}\right) : \pi \log e.$$

4. Auch auf folgende Art läßt sich die Friction eines um einen Cylinder geschlungenen Seils berechnen: Sind zx und zx', Fig. 104, zwei Seiten eines regelmäßigen Polygons, und sollen zwei an den Endpunkten eines Seils, das über diese Seiten geht, sich befindende Kräfte im Gleichgewicht sein, so müssen dieselben, ohne Rücksicht auf die Friction, gleiche Größe haben. Setzt man also jede derselben $= Q$, und $\angle xcx' = \psi$, so ist denselben eine Mittelkraft in der Richtung zc, deren Größe $= 2Q \sin \frac{1}{2}\psi$ sein muß, äquipollent, und dieser Ausdruck giebt die Größe des Druckes. Die hieraus entstehende Friction ist also $= 2\mu Q \sin \frac{1}{2}\psi$, und es muß daher

$$X = Q + 2\mu Q \sin \tfrac{1}{2}\psi$$

$$\text{oder } X = Q(1 + 2\mu \sin \tfrac{1}{2}\psi) \text{ sein.}$$

Kommt nun noch eine dritte Seite des Polygons x'v dazu, und soll eine Kraft X' in der Richtung x'v mit Q im Gleichgewicht sich befinden, so muß werden

$$X' = X(1 + 2\mu \sin \tfrac{1}{2}\psi)$$

$$\text{also } X' = Q(1 + 2\mu \sin \tfrac{1}{2}\psi)^2$$

Eben so wird, wenn eine vierte Seite hinzukommt, die in der Richtung derselben erforderliche Kraft

$$X'' = Q(1 + 2\mu \sin \tfrac{1}{2}\psi)^3$$

ist also die Anzahl aller Seiten, über welche das Seil geht,

= n, ſo wird der Werth der in der Richtung der letzten Seite erforderlichen Kraft

$$X = Q(1 + 2\mu \sin\tfrac{1}{2}\psi)^{n-1}$$

Es ſei nun n die Anzahl aller Seiten des Vielecks, ſo wird $\psi = \frac{360^0}{n}$, und es iſt alsdann

$$X = Q\left(1 + 2\mu \sin\frac{180^0}{n}\right)^{n-1}$$

Nimmt man nun n = 3[illegible] rd alſo angenommen, daß ein 360 Eck in den Kreis [illegible] iſt, ſo weicht die Form nicht mehr bedeutend von d[illegible] ab, und man erhält alſo für den Fall, daß das Seil [illegible] um den ganzen Cylinder geſchlungen iſt,

$$X = [illegible]\,2\mu \sin 30')^{359}$$

Da nun $\sin 30' = 0{,}0$[illegible], ſo wird, wenn man $\mu =$ [illegible] annimmt,

$$2\mu \sin 30' = 0{,}0058176$$

und daher $X = Q \cdot 1{,}0058176^{359}$

welches $X = 8{,}024 \times Q$ giebt,

was nur wenig von dem in No. 1 erhaltenen Reſultate abweicht.

Will man nun die erforderliche Kraft für den Fall berechnen, wenn das Seil 2 mal um den Cylinder geht, ſo kann für ψ der Werth = 30′ beibehalten werden, man muß aber alsdann in dem Exponenten $n = 2 \times 360$ annehmen, und es wird daher alsdann die Kraft

$$X = Q(1 + 2\mu \sin 30')^{719}$$

Setzt man alſo $1 + 2\mu \sin 30' = k$, ſo wird

$$X = Qk^{2 \cdot 360 - 1}$$

und wenn das Seil m mal um den Cylinder geht, ſo wird

$$X = Qk^{m \cdot 360 - 1}$$

wofür man ohne Fehler ſetzen kann $X = Q \cdot k^{m \cdot 360}$

nämlich es iſt $X = Q(k^{360})^m$

woraus alſo hervorgeht, daß auch hier der Werth von X ganz nach demſelben Verhältniſſe wächſt, wie bei den früher angegebenen Formeln, und man erhält hier ganz dieſelben Reſultate, wenn $k^{360} = 8{,}12$ angenommen wird.

$$X = 1{,}688^{n} \cdot Q.$$

Umgekehrt kann man auch aus einem bekannten relativen Werth von μ den abſoluten, wie er in der Formel No. 1 gebraucht wird, leicht berechnen. Setzt man nämlich zur Unterſcheidung den relativen Werth $= \mu'$ und den abſoluten $= \mu$, und bezieht ſich μ' auf eine halbe Umwindung, ſo wird

$$Q \cdot e^{2\mu n\pi} = \left(\frac{1+\mu'}{1-\mu'}\right)^{2n} \cdot Q$$

und daher iſt

$$e^{\mu\pi} = \frac{1+\mu'}{1-\mu'}$$

alſo bei dem Gebrauch der gemeinen Logarithmen

$$\mu\pi \log e = \log\left(\frac{1+\mu'}{1-\mu'}\right)$$

$$\text{folglich iſt } \mu = \log\left(\frac{1+\mu'}{1-\mu'}\right) : \pi \log e.$$

4. Auch auf folgende Art läßt ſich die Friction eines um einen Cylinder geſchlungenen Seils berechnen: Sind zx und zx', Fig. 104, zwei Seiten eines regelmäßigen Polygons, und ſollen zwei an den Endpunkten eines Seils, das über dieſe Seiten geht, ſich befindende Kräfte im Gleichgewicht ſein, ſo müſſen dieſelben, ohne Rückſicht auf die Friction, gleiche Größe haben. Setzt man alſo jede derſelben $= Q$, und $\angle xcx' = \psi$, ſo iſt denſelben eine Mittelkraft in der Richtung zc, deren Größe $= 2Q \sin\frac{1}{2}\psi$ ſein muß, äquipollent, und dieſer Ausdruck giebt die Größe des Druckes. Die hieraus entſtehende Friction iſt alſo $= 2\mu Q \sin\frac{1}{2}\psi$, und es muß daher

$$X = Q + 2\mu Q \sin\tfrac{1}{2}\psi$$

$$\text{oder } X = Q(1 + 2\mu \sin\tfrac{1}{2}\psi) \text{ ſein.}$$

Kommt nun noch eine dritte Seite des Polygons x'v dazu, und ſoll eine Kraft X' in der Richtung x'v mit Q im Gleichgewicht ſich befinden, ſo muß werden

$$X' = X(1 + 2\mu \sin\tfrac{1}{2}\psi)$$

$$\text{alſo } X' = Q(1 + 2\mu \sin\tfrac{1}{2}\psi)^2$$

Eben ſo wird, wenn eine vierte Seite hinzukommt, die in der Richtung derſelben erforderliche Kraft

$$X'' = Q(1 + 2\mu \sin\tfrac{1}{2}\psi)^3$$

Iſt alſo die Anzahl aller Seiten, über welche das Seil geht,

= n, ſo wird der Werth der in der Richtung der letzten Seite erforderlichen Kraft

$$X = Q(1 + 2\mu \sin \tfrac{1}{2}\psi)^{n-1}$$

Es ſei nun n die Anzahl aller Seiten des Vielecks, ſo wird $\psi = \frac{360^0}{n}$, und es iſt alsdann

$$X = Q\left(1 + 2\mu \sin \frac{180^0}{n}\right)^{n-1}$$

Nimmt man nun n = 360, wird alſo angenommen, daß ein 360 Eck in den Kreis gezeichnet iſt, ſo weicht die Form nicht mehr bedeutend von dem Kreiſe ab, und man erhält alſo für den Fall, daß das Seil einmal um den ganzen Cylinder geſchlungen iſt,

$$X = Q(1 + 2\mu \sin 30')^{359}$$

Da nun $\sin 30' = 0{,}0087265$, ſo wird, wenn man $\mu = \frac{1}{3}$ annimmt,

$$2\mu \sin 30' = 0{,}0058176$$

und daher $X = Q \cdot 1{,}0058176^{359}$

welches $X = 8{,}024 \times Q$ giebt,

was nur wenig von dem in No. 1 erhaltenen Reſultate abweicht.

Will man nun die erforderliche Kraft für den Fall berechnen, wenn das Seil 2 mal um den Cylinder geht, ſo kann für ψ der Werth = 30′ beibehalten werden, man muß aber alsdann in dem Exponenten $n = 2 \times 360$ annehmen, und es wird daher alsdann die Kraft

$$X = Q(1 + 2\mu \sin 30')^{719}$$

Setzt man alſo $1 + 2\mu \sin 30' = k$, ſo wird

$$X = Qk^{2 \cdot 360 - 1}$$

und wenn das Seil m mal um den Cylinder geht, ſo wird

$$X = Qk^{m \cdot 360 - 1}$$

wofür man ohne Fehler ſetzen kann $X = Q \cdot k^{m \cdot 360}$

nämlich es iſt $X = Q(k^{360})^m$

woraus alſo hervorgeht, daß auch hier der Werth von X ganz nach demſelben Verhältniſſe wächſt, wie bei den früher angegebenen Formeln, und man erhält hier ganz dieſelben Reſultate, wenn $k^{360} = 8{,}12$ angenommen wird.

Dritter Abschnitt.

Von der Festigkeit der Körper.

§. 64.

Erklärungen.

1. Ein Körper, dessen Theile sich nicht durch jede noch so kleine Kraft verschieben lassen, wird ein fester Körper genannt, und durch die zu der Trennung der Theile desselben erforderliche Kraft ist der Grad seiner Festigkeit bestimmt. Nicht alle Körper haben gleiche Festigkeit, sondern es ist dieselbe vielfach verschieden, und die Abhängigkeit derselben von dem übrigen Zustande des Körpers ist so wenig bekannt, daß man nur durch unmittelbare Versuche den Grad der Festigkeit eines Körpers kennen lernt.

2. Die Festigkeit eines Körpers darf nicht mit der Dichtigkeit desselben verwechselt werden; die letztere ist dem eigenthümlichen Gewicht proportionirt, was bei der erstern keineswegs der Fall ist, wie schon daraus hervorgeht, daß mehrere flüssige Körper, wie z. B. das Quecksilber, eine bedeutende Dichtigkeit haben. Es sind verschiedene Hypothesen aufgestellt worden, um die Erscheinungen, welche die Festigkeit oder Cohäsion der Körper darbietet, zu erklären, oder vielmehr, um den eigentlichen Grund der Festigkeit überhaupt aufzufinden, ohne daß auch nur eine derselben den Gegenstand genügend erklärt, und es ist auch der Zusammenhang der Cohäsion mit der allgemeinen Attraction und mit der Adhäsion ꝛc. noch nicht bekannt. Indessen gehört die Frage: „welches ist der eigentliche Grund der Festigkeit der Körper?“ in die Metaphysik, und die mathematischen Untersuchungen, zu welchen diese Erscheinung führt, sind von der Beantwortung jener Frage ganz unabhängig, da diese Untersuchungen sich unmittelbar an die Erfahrungen anschließen.

3. Ein Körper ist desto fester, je größer die zu der Tren-

der Grundlinie ab und der abſoluten Feſtigkeit, und indir
dem Abſtande des Angriffspunktes der Kraft X von ab.

6. Der für die relative Feſtigkeit gefundene Ausdr
$X = \frac{hFk}{l}$ hat nur Gültigkeit für vollkommen unelaſtiſ
Körper; ſobald aber, was faſt immer der Fall iſt, der Körp
gebogen wird, bevor er bricht, erleidet dieſe Formel dadur
eine Veränderung, auch die bei dem Biegen ent
gende verſchiedene ... der einzelnen Faſern mit
Rechnung gebracht uß, und es wird hierdurch d
Unterſuchung um v riger.

7. Die rückw Feſtigkeit beſteht in der z
Zerdrücken oder Zern s Körpers erforderlichen Kra
ein ſolches Zerdrücken ... zwar bei allen Körpern ſta
wenn eine hinreichend große Kraft angewendet wird, gewö
lich aber erfolgt ſchon früher ein Biegen, und in Folge deſ
ein Zerknicken.

8. Bei dem Zerreißen ſowohl als bei dem Zerbr
eines Körpers muß das Gewicht des abgeriſſenen oder ab
brochenen Stückes deſſelben mit in Rechnung gebracht w
den, wodurch die in No. 4 und 5 angegebenen Formeln
was abgeändert werden.

9. Ein an einer horizontalen Fläche befeſtigter, ſenkr
herunter hängender Körper wird durch angehängte Gewi
wenn er eine prismatiſche Form hat, an der höchſten Ste
alſo da, wo er aus der horizontalen Fläche herauskommt,
riſſen, weil hier das abgeriſſene Stück am meiſten verm
wird. Soll ein Körper daher mit Rückſicht auf ſein Ge
an allen Stellen eine gleiche Feſtigkeit haben, ſo muß er
von der prismatiſchen abweichende Form haben, und man
durch die Analyſis die hierbei erforderliche Geſtalt des Kör
beſtimmt. Alle Körper, welche eine ſolche Geſtalt ha
nennt man Körper von gleichem Widerſtande. Bem
zu werden verdient hierbei, daß man dieſe Form häufig in
Natur vorfindet, und daß dieſen Körpern die Eigenſchaft
kommt, das möglichſt kleinſte Volumen zu haben; es wird
durch dieſelben, wie Galilei bereits gezeigt hat, der Z
mit der größtmöglichſten Erſparniß der Mittel erreicht.

10. Es sind vielfache Versuche über die Festigkeit der chiedenen Körper angestellt worden, und man hat die Re- ate derselben in eigenen Tabellen gesammelt. Um diese Ta- n benutzen zu können, muß die Größe der denselben für absolute Festigkeit zum Grunde liegenden Flächeneinheit be- t sein, indem die Zahl k, durch welche das Maaß der igkeit ausgedrückt wird, mit der Größe dieser Einheit sich rt.

§. 65.
Einfache Aufgaben.

Aufgabe 1. Das Maaß der absoluten Festigkeit eines ers ist für eine gegebene Flächeneinheit durch ein bestimm- Gewicht ausgedrückt; es soll hieraus das Maaß für eine re Flächeneinheit und für ein anderes Gewicht abgeleitet en.

Auflösung. Es sei die der gegebenen Flächenein- zum Grunde liegende Längeneinheit = m franz. Linien, der dafür einzuführenden Flächeneinheit liege eine Län- inheit zum Grunde von μ franz. Linien. Von dem ge- nen Gewicht halte das Pfund a holländische As, und von dafür einzuführenden α As; das gegebene Maaß der Fe- it sei = k, und das gesuchte = k′; so ist, wenn man lächeneinheiten mit f und f′ bezeichnet,

$$k : k' = f : f'$$

leicher Gewichtseinheit, welche erhalten wird, wenn man festigkeit in beiden Fällen durch holländ. As ausdrückt. nun

k Pfd. = ak As und k′ Pfd. = αk′ As

eigentlich

$$ak : \alpha k' = f : f'$$

und weil $f : f' = m^2 : \mu^2$

so ist $ak : \alpha k' = m^2 : \mu^2$

und daher $\alpha m^2 k' = a\mu^2 k$

folglich ist $k' = \frac{a\mu^2}{\alpha m^2} \cdot k$

Beispiel. Die absolute Festigkeit des Kiefernholzes ist 065 preuß. Pfd. à 9728 As für die Flächeneinheit von

einem preuß. Quadratzoll; es soll das Maaß der Festigkeit für einen franz. Quadratzoll in Kilogrammen ausgedrückt werden.

Da der preuß. Zoll = 11,594 und der franz. = 12 franz. Linien, ein Kiliogramm aber 20812 holländ. As hält, so ist

$$k' = \frac{a\mu^2}{\alpha m^2} \cdot k = \frac{9728 \cdot 12^2}{20812 \cdot 11{,}594^2} \cdot 8065$$

und man findet hieraus $k' = 4038{,}4$.

Aufgabe 2. Es [illegible] Maaß der absoluten Festigkeit eines Körpers gegeben; [illegible] der Durchmesser eines Cylinders berechnet werden, [illegible] der Masse dieses Körpers besteht und eine gegebene [illegible] P tragen soll.

Auflösung. Es [illegible] allgemein, nach §. 64. No. [illegible] Fk

und hier ist, wenn der Du[illegible]messer des Cylinders = d gesetzt wird, $F = \frac{d^2\pi}{4}$, also wird

$$P = \frac{d^2\pi k}{4}$$

$$\text{und daher } d = 2\sqrt{\frac{P}{k\pi}}$$

Zusatz 1. Bei dem Gebrauch dieser Formel ist daran zu sehen, daß P und k durch dieselbe Gewichtseinheit ausgedrückt sind.

Zusatz 2. Für den praktischen Gebrauch nimmt man allgemein als Regel an, daß Metalle nur die Hälfte, und Holzarten nicht mehr als den dritten Theil der Last mit Sicherheit tragen können, welche das Maaß ihrer Festigkeit angiebt, und man muß daher stets $\frac{1}{2}k$ oder $\frac{1}{3}k$ statt k in Rechnung bringen.

Aufgabe 3. Es soll die Last P angegeben werden, welche an einem prismatischen Körper angebracht werden kann, ohne daß derselbe reißt, wenn das Gewicht des Köfpers mit in Rechnung gebracht wird.

Auflösung. Ist die Länge des Körpers, welcher senkrecht herabhängt, von der Stelle an gerechnet, wo er bes[illegible] ist, = l, der Querschnitt = F, und das eigenthümliche Gewicht = S, so ist, wenn l und F durch preuß. Fuß aus[illegible]

ckt werden, und k in preuß. Pfunden gegeben ist, das Ge-
ht des Körpers = 66lFS Pfd., und sind nun F Quadrat-
= f Quadrateinheiten der Art, auf welche k oder das
aß der absoluten Festigkeit sich bezieht, so ist fk die zu
Zerreißen erforderliche Kraft, und man erhält daher die
ichung

$$P + 66lFS = fk$$

raus unmittelbar folgt

$$P = fk - 66lFS$$

Zusatz. Für das eigenthümliche Gewicht = S ist das
wicht des preuß. Kubikfußes = 66 S Pfd., und daher das
dem Kubikzoll $= \frac{66S}{1728}$; man muß daher in der obi-
Formel $\frac{66}{1728}$ für 66 setzen, wenn l und F in Zoll ge-
ben sind. Setzt man überhaupt diesen Coefficienten = w,
nn f statt F gesetzt wird, so erhält man

$$P = f(k - wlS)$$

raus läßt sich nun auch die Länge des Prisma berechnen,
nn es durch sein eigenes Gewicht reißen soll. Man braucht,
diese Länge kennen zu lernen, nur P = 0 zu setzen, hier-
ch erhält man

$$0 = f(k - wlS)$$

und daher $l = \frac{k}{wS}$

ist also diese Länge von der Größe des Querschnitts ganz
abhängig. Bei dem Gebrauch dieser Formel ist zu berück-
tigen, daß w das Gewicht der Kubikeinheit Wasser aus-
ckt, von welcher die Flächeneinheit der Größe k zum Grunde
gt, und es wird l durch eben diese Längeneinheit gefunden.

Aufgabe 4. Ein Balken, dessen Querschnitt ein Rechteck
ist in einer vertikalen Wand eingemauert, so daß er seiner
ge nach parallel mit dem Horizont ist; die Länge desse-
, mit welcher er aus der Wand hervorragt, ist gegeben:
n die relative Festigkeit desselben, also das Gewicht be-
mmt werden, mit welchem er bis zum Brechen belastet wer-
n.

Auflösung. Nach §. 64 No. 5. ist die allgemeine For-

mel für die relative Feſtigkeit eines Körpers, der hier als kommen unelaſtiſch angenommen wird,

$$X = \frac{hkF}{l}$$

Da nun hier die Brechungsfläche abcd, Fig. 105, ein Re ſein ſoll, ſo iſt, wenn man die Grundlinie deſſelben ab und die Höhe ad = bc = p ſetzt, F = gp, und Abſtand des Schwerpunkts g von der Grundlinie, alſo = h = ½p; folglich

$$\frac{\cdot pg}{l} = \frac{p^2gk}{2l}$$

die relative Feſtigkei in dieſem Fall dem Qu der Höhe proportion

Zuſatz 1. Iſt rſchnitt des Körpers ein R und man ſetzt die G e deſſelben = g und die = p, ſo wird in der allgemeinen Formel

$$h = \tfrac{1}{3}p \text{ und } F = \tfrac{1}{2}pg$$

$$\text{alſo } X' = \frac{\frac{1}{3}pk \cdot \frac{1}{2}pg}{l} = \frac{p^2gk}{6l}$$

Bei gleicher Grundlinie, Länge und Höhe verhält ſich al relative Feſtigkeit eines dreiſeitigen Prisma zu der eines ſeitigen, deſſen Querſchnitt ein Rechteck iſt, wie $\frac{1}{6} : \frac{1}{2} =$ während ihre Maſſen ſich verhalten wie 1 : 2.

Zuſatz 2. Iſt ein dreiſeitiges Prisma ſo eingem daß die Grundlinie oben und die Spitze des Dreiecks liegt, ſo wird $h = \frac{2}{3}p$, alſo die relative Feſtigkeit

$$X'' = \frac{\frac{2}{3}pk \cdot \frac{1}{2}pg}{l} = \frac{p^2gk}{3}$$

und es iſt nun die relative Feſtigkeit zweier dreiſeitigen men mit gleichen Dimenſionen, wenn von dem einen die G linie unten und von dem andern oben liegt,

$$X' + X'' = \frac{p^2gk}{6l} + \frac{p^2gk}{3l} = \frac{p^2gk}{2l}$$

wie bei dem vierſeitigen Prisma, deſſen Querſchnitt ein R iſt, und mit welchem beide zuſammen gleiche Maſſe ha

Aufgabe 5. Es ſoll die relative Feſtigkeit eines matiſchen Körpers mit Rückſicht auf das Gewicht de angegeben werden.

luflösung. Der Kubikinhalt des Körpers ist = lF, aher, wenn das Gewicht der Kubikeinheit Wasser = w, as eigenthümliche Gewicht des Körpers = S gesetzt wird, das ganze Gewicht desselben = wlFS, und daher das nt dieses Gewichts, weil der Schwerpunkt eines Prisma Mitte desselben ist, = $\frac{1}{2}$l · wlFS. Das Moment der ist = lP, und das aus der absoluten Festigkeit Fk ent- e Moment = hFk. Hiernach ist

$$lP + \tfrac{1}{2}l^2wFS = hFk$$

$$\text{also } P = \frac{hFk}{l} - \tfrac{1}{2}lwFS$$

s zum Brechen mögliche Belastung wird also durch das t des belasteten Körpers um die Hälfte dieses Gewichts rt.

usatz. Setzt man P = 0, so läßt sich die Länge des ischen Körpers berechnen, bei welcher er durch sein ei- Gewicht bricht; nämlich es ist

$$0 = \frac{hFk}{l} - \tfrac{1}{2}lwFS$$

$$\text{und daher } \tfrac{1}{2}l^2wS = hk$$

$$\text{folglich ist } l = \sqrt{\frac{2hk}{wS}}$$

ufgabe 6. Für gegebene Dimensionen eines Balkens, Querschnitt ein Rechteck ist, kennt man die relative Fe- es soll dieselbe hieraus für einen Balken von derselben mit andern Dimensionen berechnet werden.

uflösung. Nach Aufgabe 4. ist, wenn die relative Fe- mit Q bezeichnet wird,

$$Q = \frac{p^2gk}{2l}$$

m die Dimensionen eines andern Balkens H, G und setzt man seine Festigkeit = X, so ist $X = \frac{H^2Gk}{2L}$

er

$$Q : X = \frac{p^2g}{l} : \frac{H^2G}{L}$$

$$\text{folglich ist } X = \frac{lQ}{p^2g} \cdot \frac{H^2G}{L}$$

mel für die relative Festigkeit eines Körpers, der hier als vollkommen unelastisch angenommen wird,

$$X = \frac{hkF}{l}$$

Da nun hier die Brechungsfläche abcd, Fig. 105, ein Rechteck sein soll, so ist, wenn man die Grundlinie desselben ab = g, und die Höhe ad = bc = p setzt, F = gp, und der Abstand des Schwerpunktes g von der Grundlinie, also mg = h = $\frac{1}{2}$p; folglich ist

$$X = \frac{\frac{1}{2}pk \cdot pg}{l} = \frac{p^2gk}{2l}$$

die relative Festigkeit ist also in diesem Fall dem Quadrate der Höhe proportionirt.

Zusatz 1. Ist der Querschnitt des Körpers ein Dreieck und man setzt die Grundlinie desselben = g und die Höhe = p, so wird in der allgemeinen Formel

$$h = \frac{1}{3}p \text{ und } F = \frac{1}{2}pg$$

$$\text{also } X' = \frac{\frac{1}{3}pk \cdot \frac{1}{2}pg}{l} = \frac{p^2gk}{6l}$$

Bei gleicher Grundlinie, Länge und Höhe verhält sich also die relative Festigkeit eines dreiseitigen Prisma zu der eines vierseitigen, dessen Querschnitt ein Rechteck ist, wie $\frac{1}{6} : \frac{1}{2} = 1 : 3$, während ihre Massen sich verhalten wie 1 : 2.

Zusatz 2. Ist ein dreiseitiges Prisma so eingemauert, daß die Grundlinie oben und die Spitze des Dreiecks unten liegt, so wird h = $\frac{2}{3}$p, also die relative Festigkeit

$$X'' = \frac{\frac{2}{3}pk \cdot \frac{1}{2}pg}{l} = \frac{p^2gk}{3}$$

und es ist nun die relative Festigkeit zweier dreiseitigen Prismen mit gleichen Dimensionen, wenn von dem einen die Grundlinie unten und von dem andern oben liegt,

$$X' + X'' = \frac{p^2gk}{6l} + \frac{p^2gk}{3l} = \frac{p^2gk}{2l}$$

wie bei dem vierseitigen Prisma, dessen Querschnitt ein Rechteck ist, und mit welchem beide zusammen gleiche Masse haben.

Aufgabe 5. Es soll die relative Festigkeit eines prismatischen Körpers mit Rücksicht auf das Gewicht desselben angegeben werden.

Auf-

der Fall für $x = \frac{1}{2}L$, wie aus Euklid, Buch 2. Satz 5. ergiebt, folglich ist

$$P = \frac{NH^2GL}{(\frac{1}{2}L)^2} = \frac{4NH^2G}{L}$$

Minimum. Der Balken trägt also am wenigsten, wenn in seiner Mitte belastet wird, und es ist alsdann die Last mal so groß, als durch welche er bricht, wenn er nur in b festigt ist und an dem andern Endpunkt a belastet wird.

Aufgabe 8. Ein Balken ist in horizontaler Lage bei und b, Fig. 106, fest eingemauert, so daß die Wände nicht hgeben; es soll die bei c anzubringende Last = P bestimmt den, durch welche derselbe bricht.

Auflösung. Da die Wände nicht nachgeben, so muß Balken an den drei Stellen bei a, b und c zu gleicher t brechen. Setzt man nun ca = a und cb = b, so ist c eine Last erforderlich

$P' = N \cdot \frac{H^2G}{a}$, wenn der Balken bei a brechen soll,

$P'' = N \cdot \frac{H^2G}{b}$ " " " b "

$P''' = N \cdot \frac{H^2G(a+b)}{ab}$ " " c "

mit der Balken also an den drei Stellen zu gleicher Zeit he, ist eine Last erforderlich

$$P = P' + P'' + P''' = NH^2G\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{a+b}{ab}\right)$$

$$= \frac{2NH^2G(a+b)}{ab}$$

es ist, für $a+b = (ab) = L$,

$$P = \frac{2NH^2GL}{a(L-a)}$$

bei a und b fest eingemauerter Balken trägt also die dop= Last im Verhältniß zu einem Balken, der bei a und b frei aufliegt.

Zusatz. Auch hier wird P ein Minimum, wenn $a(L-a)$ größten Werth erhält, wenn also $a = \frac{1}{2}L$ ist, und es ist

daher $P = \frac{8NH^2G}{L}$ die kleinſte Laſt, bei welcher der B
bricht.

Aufgabe 9. Der Balken ab, Fig. 106, liegt bei
auf, iſt aber bei a feſt eingemauert; es ſoll die bei c er
liche Laſt = P, durch welche er bricht, angegeben werd

Auflöſung. Da der Balken bei b frei aufliegt, ſo
er blos bei a und c, r ca = a und cb = b iſt
eine Kraft erforderlich

$$P' = \frac{1}{a}$$, wenn er bei a brechen ſoll,

und $P''' = \frac{NH^2G(a+}{ab}$) = = c =

folglich iſt $P = P' + P''' = NH^2G\left(\frac{1}{a} + \frac{a+b}{ab}\right)$

$$= \frac{NH^2G\,(a+2b)}{ab}$$

alſo für $a+b = L$ wird

$$P = \frac{NH^2G(2L-a)}{a\,(L-a)} = \frac{2L-a}{a(L-a)} \cdot NH^2G$$

Zuſatz. Setzt man hier $a = \frac{1}{2}L$, ſo wird

$$P = \frac{6\,NH^2G}{L}$$

es iſt dieſes aber nicht die kleinſte Laſt, welche der bei
gemauerte und bei b frei aufliegende Balken tragen
Dieſe kleinſte Laſt lernt man kennen, wenn der Wer
$a = x$ geſucht wird, für welche $X = \frac{2l-a}{a\,(l-a)} = \frac{2}{x(}$
ein Minimum wird. Es iſt aber

$$dX = \frac{(lx-x^2)\,(-dx) - (2l-x)\,(ldx-2xdx)}{(lx-x^2)^2}$$

Setzt man nun $dX = 0$, ſo wird

$$-(lx-x^2) - (2l-x)\,(l-2x) = 0$$

und daher $x^2 - lx = 2l^2 - 5lx + 2x^2$

folglich iſt $x^2 - 4lx + (2l)^2 = 2l^2$

und daher $2l - x = l\sqrt{2}$

alſo wird $x = l(2-\sqrt{2}) = 0{,}586 \cdot l = a$

ist der Fall für $x = \frac{1}{2}L$, wie aus Euklid, Buch 2. Satz 5. sich ergiebt, folglich ist

$$P = \frac{NH^2GL}{(\frac{1}{2}L)^2} = \frac{4NH^2G}{L}$$

ein Minimum. Der Balken trägt also am wenigsten, wenn er in seiner Mitte belastet wird, und es ist alsdann die Last 4mal so groß, als durch welche er bricht, wenn er nur in b befestigt ist und an dem andern Endpunkt a belastet wird.

Aufgabe 8. Ein Balken ist in horizontaler Lage bei a und b, Fig. 106, fest eingemauert, so daß die Wände nicht nachgeben; es soll die bei c anzubringende Last $= P$ bestimmt werden, durch welche derselbe bricht.

Auflösung. Da die Wände nicht nachgeben, so muß der Balken an den drei Stellen bei a, b und c zu gleicher Zeit brechen. Setzt man nun $ca = a$ und $cb = b$, so ist bei c eine Last erforderlich

$P' = N.\frac{H^2G}{a}$, wenn der Balken bei a brechen soll,

$P'' = N.\frac{H^2G}{b}$ „ „ „ b „

$P''' = N.\frac{H^2G(a+b)}{ab}$ „ „ c „

Damit der Balken also an den drei Stellen zu gleicher Zeit breche, ist eine Last erforderlich

$$P = P' + P'' + P''' = NH^2G\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{a+b}{ab}\right)$$

$$= \frac{2NH^2G(a+b)}{ab}$$

und es ist, für $a + b = (ab) = L$,

$$P = \frac{2NH^2GL}{a(L-a)}$$

Ein bei a und b fest eingemauerter Balken trägt also die doppelte Last im Verhältniß zu einem Balken, der bei a und b blos frei aufliegt.

Zusatz. Auch hier wird P ein Minimum, wenn $a(L-a)$ den größten Werth erhält, wenn also $a = \frac{1}{2}L$ ist, und es ist

daher $P = \frac{8NH^2G}{L}$ die kleinſte Laſt, bei welcher der Balken bricht.

Aufgabe 9. Der Balken ab, Fig. 106, liegt bei b frei auf, iſt aber bei a feſt eingemauert; es ſoll die bei c erforderliche Laſt = P, durch welche er bricht, angegeben werden.

Auflöſung. Da der Balken bei b frei aufliegt, ſo bricht er blos bei a und c, und für ca = a und cb = b iſt bei c eine Kraft erforderlich

$$P' = \frac{NH^2G}{a}, \quad \text{wenn er bei a brechen ſoll,}$$

$$\text{und } P''' = \frac{NH^2G(a+b)}{ab} \quad \text{„ „ c „}$$

$$\text{folglich iſt } P = P' + P''' = NH^2G\left(\frac{1}{a} + \frac{a+b}{ab}\right)$$

$$= \frac{NH^2G\,(a+2b)}{ab}$$

alſo für a + b = L wird

$$P = \frac{NH^2G(2L-a)}{a\,(L-a)} = \frac{2L-a}{a(L-a)} \cdot NH^2G$$

Zuſatz. Setzt man hier $a = \frac{1}{2}L$, ſo wird

$$P = \frac{6NH^2G}{L}$$

es iſt dieſes aber nicht die kleinſte Laſt, welche der bei a eingemauerte und bei b frei aufliegende Balken tragen kann. Dieſe kleinſte Laſt lernt man kennen, wenn der Werth für a = x geſucht wird, für welche $X = \frac{2l-a}{a\,(l-a)} = \frac{2l-x}{x\,(l-x)}$ ein Minimum wird. Es iſt aber

$$dX = \frac{(lx-x^2)\,(-dx) - (2l-x)\,(ldx-2xdx)}{(lx-x^2)^2}$$

Setzt man nun dX = 0, ſo wird

$$-(lx-x^2) - (2l-x)\,(l-2x) = 0$$

$$\text{und daher } x^2 - lx = 2l^2 - 5lx + 2x^2$$

$$\text{folglich iſt } x^2 - 4lx + (2l)^2 = 2l^2$$

$$\text{und daher } 2l - x = l\sqrt{2}$$

$$\text{alſo wird } x = l(2-\sqrt{2}) = 0{,}586 \cdot l = a$$

s muß also, wenn z^2x ein Maximum oder Minimum wer-
en soll,

$$d(Dz^5 - z^6) = 0$$

also auch $5Dz^4 - 6z^5 = 0$ sein,

und hieraus erhält man $z = \frac{5}{6}D = (de)$

Die Höhe des Dreiecks ist also $\frac{5}{6}$ des Durchmessers, und man
indet hieraus die Grundlinie

$$(ab) = 2x = 2\sqrt{(Dz - z^2)} = 2\sqrt{\tfrac{5}{6}D^2 - \tfrac{25}{36}D^2)} = \frac{D}{3}\sqrt{5}.$$

Aufgabe 13. Aus einem prismatischen Körper, dessen
Querschnitt eine halbe Ellipse ist, so daß die kleine Axe $= 2b$
ie Grundlinie, und die halbe große Axe $= a$ die Höhe bil-
et, soll der möglichst festeste 4kantige Balken herausgeschnit-
n werden.

Auflösung. Setzt man die Höhe dieses Balkens $= x$,
nd die Grundlinie $= 2y$, so wird vermöge der Gleichung der
llipse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

nd es ist daher die Grundlinie des Balkens

$$2y = \frac{2b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

nd da die Höhe $= x$ ist, so muß für den festesten Balken
s Produkt

$$2y \cdot x^2 = \frac{2b}{a}x^2\sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{2b}{a}\sqrt{(a^2x^4 - x^6)}$$

Maximum werden. Setzt man, um den entsprechenden
erth von x zu finden, das Differential dieses Ausdrucks
0, so wird

$$\frac{2b}{a} \cdot d\sqrt{(a^2x^4 - x^6)} = 0$$

und daher ist $4a^2x^3 - 6x^5 = 0$

raus $x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ erhalten wird und

$$2y = \frac{2b}{a}\sqrt{(a^2 - \tfrac{2}{3}a^2)} = 2b\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Zusatz 1. Für $b = a$ ist das Prisma ein halber Cy-
nder, und man erhält in diesem Falle die Höhe des Balkens
$= R\sqrt{\frac{2}{3}}$ und die Grundlinie $2y = 2R\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Zuſatz 2. Iſt das Prisma eine halbe Ellipſe, deren Grundlinie die große Axe = 2a, und deren Höhe die halbe kleine Axe = b iſt, ſo wird $x = b\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $2y = 2a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Aufgabe 14. Die Grundfläche eines prismatiſchen Körpers iſt ein paraboliſches Segment bac, Fig. 109, und es iſt a der Scheitel und ad die Axe der Parabel; es ſoll aus dieſem Körper ein 4kantiger Balken von möglichſt größter Feſtigkeit herausgeſchnitten werden.

Auflöſung. Nimmt man xd als die Höhe und 2(y) als die Grundlinie dieſes Segments an, ſo iſt, wenn man ad = h, bd = g, ax = x und xy = y ſetzt,

$$x : h \quad y^2 : g^2$$

$$\text{alſo } y^2 = \frac{g^2 x}{h}$$

und es iſt hier die Höhe des Balkens = h − x, und Grundlinie $= 2y = 2g\sqrt{\frac{x}{h}}$. Es kommt alſo darauf den Werth von x zu finden, für welchen das Produkt $(h-x)^2 \cdot 2g\sqrt{\frac{x}{h}}$ ein Maximum wird. Es iſt aber

$$d\left[(h-x)^2 \cdot 2g\sqrt{\frac{x}{h}}\right] = \frac{2g}{\sqrt{h}}\, d\,(h^2 x^{\frac{1}{2}} - 2hx^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}})$$

$$= \frac{2g}{\sqrt{h}}\,(\tfrac{1}{2} h^2 x^{-\frac{1}{2}} - 3hx^{\frac{1}{2}} + \tfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}})\, dx$$

und ſetzt man dieſen Ausdruck = 0, ſo wird

$$\tfrac{1}{2}h^2 x^{-\frac{1}{2}} - 3hx^{\frac{1}{2}} + \tfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = 0$$

daher auch $h^2 - 6hx + 5x^2 = 0$

es iſt alſo $x^2 - \frac{6}{5}hx + (\frac{3}{5}h)^2 = \frac{9}{25}h^2 - \frac{1}{5}h^2$

$$\text{und } (x - \tfrac{3}{5}h)^2 = \frac{4h^2}{25}$$

alſo $x - \frac{3}{5}h = \pm\frac{2}{5}h$ und $x = \frac{3}{5}h \pm \frac{2}{5}h$

woraus x = h und $x = \frac{1}{5}h$ erhalten wird.

Der letzte Werth giebt ein Maximum, und es iſt daher Höhe des Balkens $= h - x = \frac{4}{5}h$.

Aufgabe 15. Aus einem Cylinderabſchnitte, deſſen Grundfläche ein Kreisabſchnitt iſt, ſoll ein Balken von größter möglichſter Feſtigkeit herausgehauen werden.

Auflösung. Ist adb, Fig. 110, die Grundfläche des ylinders, und man setzt den Radius des Kreises = R, den Winkel bcd = dca = c und $\angle dc\beta = \varphi$, und nimmt man , daß, für $d\alpha = d\beta$, die Sehne $\alpha\beta$ die Breite und ef die he des Balkens sei, und setzt ef = z, ec = y und $e\beta = x$, ist

$= x = R\sin\varphi$, ce = y = $R\cos\varphi$ und cf = $R\cos c$

und daher ef = z = y − (cf) = $R(\cos\varphi - \cos c)$.

oll nun der Balken, von welchem $\alpha\beta = 2x$ die Grundlinie d ef = z die Höhe ist, die größtmöglichste Festigkeit haben, muß $2xz^2$ ein Maximum sein. Es ist aber

$z^2 = 2R\sin\varphi \cdot R^2(\cos\varphi - \cos c)^2 = 2R^3\sin\varphi(\cos\varphi - \cos c)^2$

d daher $d(2xz^2) =$

$2R^3[\sin\varphi \cdot 2(\cos\varphi - \cos c)\,d(\cos\varphi - \cos c) + (\cos\varphi - \cos c)^2\,d\sin\varphi] = 2R^3(\cos\varphi - \cos c)[2\sin\varphi\,d\cos\varphi - (\cos\varphi - \cos c)\,d\sin\varphi] = 2R^3(\cos\varphi - \cos c)[-2\sin^2\varphi + \cos^2\varphi - \cos c\cos\varphi]\,d\varphi$

etzt man diesen Ausdruck = 0, so wird

$\cos\varphi - \cos c)[-2(1 - \cos^2\varphi) + \cos^2\varphi - \cos c\cos\varphi] = 0$

d es ist daher entweder

$\cos\varphi - \cos c = 0$ oder $-2 + 3\cos^2\varphi - \cos c\cos\varphi = 0$

as der ersten Gleichung folgt $\varphi = c$, was, wie unmittelbar h erkennen läßt, ein Minimum giebt, und aus der zweiten Gleichung erhält man

$$\cos^2\varphi - \frac{\cos c}{3}\cos\varphi = \tfrac{2}{3}$$

und es ist daher $(\cos\varphi - \frac{1}{6}\cos c)^2 = \frac{2}{3} + \frac{\cos^2 c}{36}$

also $\cos\varphi = \frac{1}{6}\cos c + \frac{\sqrt{(24 + \cos^2 c)}}{6}$

durch die Dimensionen des Balkens

$\beta) = 2x = 2R\sin\varphi$ und $(ef) = z = R(\cos\varphi - \cos c)$

timmt sind.

Zusatz 1. Für de = v ist

$(e\beta)^2 = x^2 = v(2R - v)$, also $x = \sqrt{(2Rv - v^2)}$

d es ist, wenn man die Höhe des Abschnitts df = h setzt,

$$v = h - z$$

also $x = \sqrt{[2R(h - z) - (h - z)^2]}$

Zuſatz 2. Iſt das Prisma eine halbe Ellipſe, deren Grundlinie die große Axe $= 2a$, und deren Höhe die halbe kleine Axe $= b$ iſt, ſo wird $x = b\sqrt{\frac{2}{3}}$ und $2y = 2a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Aufgabe 14. Die Grundfläche eines prismatiſchen Körpers iſt ein paraboliſches Segment bac, Fig. 109, und es iſt a der Scheitel und ad die Axe der Parabel; es ſoll aus dieſem Körper ein 4kantiger Balken von möglichſt größter Feſtigkeit herausgeſchnitten werden.

Auflöſung. Nimmt man xd als die Höhe und 2(xy) als die Grundlinie dieſes Körpers an, ſo iſt, wenn man $ad = h$, $bd = g$, $ax = x$ und $xy = y$ ſetzt,

$$x : h = y^2 : g^2$$

$$\text{alſo } y^2 = \frac{g^2 x}{h}$$

und es iſt hier die Höhe des Balkens $= h - x$, und die Grundlinie $= 2y = 2g\sqrt{\frac{x}{h}}$. Es kommt alſo darauf an, den Werth von x zu finden, für welchen das Produkt $(h-x)^2 \cdot 2g\sqrt{\frac{x}{h}}$ ein Maximum wird. Es iſt aber

$$d\left[(h-x)^2 \cdot 2g\sqrt{\frac{x}{h}}\right] = \frac{2g}{\sqrt{h}}\, d\,(h^2x^{\frac{1}{2}} - 2hx^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}})$$

$$= \frac{2g}{\sqrt{h}}\,(\tfrac{1}{2}h^2x^{-\frac{1}{2}} - 3hx^{\frac{1}{2}} + \tfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}})\,dx$$

und ſetzt man dieſen Ausdruck $= 0$, ſo wird

$$\tfrac{1}{2}h^2x^{-\frac{1}{2}} - 3hx^{\frac{1}{2}} + \tfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$\text{daher auch } h^2 - 6hx + 5x^2 = 0$$

$$\text{es iſt alſo } x^2 - \tfrac{6}{5}hx + (\tfrac{3}{5}h)^2 = \tfrac{9}{25}h^2 - \tfrac{1}{5}h^2$$

$$\text{und } (x - \tfrac{3}{5}h)^2 = \frac{4h^2}{25}$$

$$\text{alſo } x - \tfrac{3}{5}h = \pm\tfrac{2}{5}h \text{ und } x = \tfrac{3}{5}h \pm \tfrac{2}{5}h$$

woraus $x = h$ und $x = \frac{1}{5}h$ erhalten wird.

Der letzte Werth giebt ein Maximum, und es iſt daher die Höhe des Balkens $= h - x = \frac{4}{5}h$.

Aufgabe 15. Aus einem Cylinderabſchnitte, deſſen Grundfläche ein Kreisabſchnitt iſt, ſoll ein Balken von größtmöglichſter Feſtigkeit herausgehauen werden.

Auflösung. Setzt man den Radius des Kreises = R, den Winkel bcd = acd = c, $\angle\beta cd = \angle\alpha cd = \varphi$, nimmt $c\beta = 2x$ als Grundlinie und eg = z als Höhe des Balkens an, und setzt ce = y, so ist

$$(c\beta) = x = R\sin\varphi,\ (ce) = y = R\cos\varphi$$

und $cg : gf = 1 : tgc$

also $y - z : x = 1 : tgc$

hiernach ist $y - z = x\cot c$

also $z = y - x\cot c = R\cos\varphi - R\sin\varphi\cot c$

folglich $2xz^2 = 2R\sin\varphi \cdot R^2(\cos\varphi - \sin\varphi\cot c)^2$

Um nun den Werth von φ zu erhalten, für welchen $2xz^2$ ein Maximum wird, muß man $d(2xz^2) = 0$ setzen, also auch

$$2R^3 d[\sin\varphi(\cos\varphi - \sin\varphi\cot c)^2] = 0$$

und daher

$$0 = (\cos\varphi - \sin\varphi\cot c)^2 d\sin\varphi + 2\sin\varphi(\cos\varphi - \sin\varphi\cot c) \times d(\cos\varphi - \sin\varphi\cot c)$$

Dieses giebt

$$(\cos\varphi - \sin\varphi\cot c)[(\cos\varphi - \sin\varphi\cot c)\cos\varphi + 2\sin\varphi \times (-\sin\varphi - \cos\varphi\cot c)]d\varphi = 0$$

Setzt man nun den ersten Factor = 0, also

$$\cos\varphi - \sin\varphi\cot c = 0$$

so wird $\cot\varphi = \cot c$, also $\varphi = c$

das ein Minimum giebt. Wird aber der andere Factor = 0 gesetzt, so erhält man

$$\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\cot c - 2\sin^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi\cot c = 0$$

nämlich es ist

$$1 - 3\sin^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi\cot c = 0$$

und $\sin^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\cot c = \frac{1}{3}$

und weil $\sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$ und $\sin\varphi\cos\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}$

so ist $\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{2}\cot c = \frac{1}{3}$

und daher $-\cos 2\varphi + \sin 2\varphi\cot c = \frac{2}{3} - 1$

also auch $\cos 2\varphi - \sin 2\varphi \cdot \frac{\cos c}{\sin c} = \frac{1}{3}$

woraus folgt $\sin(c - 2\varphi) = \frac{\sin c}{3}$

und hierdurch ist der Winkel φ bestimmt, wovon die Werthe

von $\alpha\beta = 2x = 2R\sin\varphi$ und $eg = z = R(\cos\varphi - \sin\varphi\cot c)$ $= \frac{R\sin(c-\varphi)}{\sin c}$ abhängen.

Dieſes führt zu der einfachen Conſtruction: Man nehme, Fig. 111a, die Sehne $bm = \frac{1}{3}ab$, halbire den Bogen bm in h und bd in β, ſo iſt, wenn nun $d\alpha = d\beta$ genommen wird, $\alpha\beta$ die Grundlinie des Balkens $= 2x$, und man erhält die Höhe, wenn durch α und β [illegible]elen mit dc gezogen werden, bis ſie die Radien ca und [illegible]hneiden.

Zuſatz. Will man [illegible]alken aus dem Prisma ſo herausſchneiden, daß $\alpha\beta$ die [illegible] und βf die Grundlinie deſſelben wird, ſo muß, weil $\alpha\beta = 2x$ und $eg = z$, der Ausdruck $4x^2z$ ein Maximum [illegible]n. Da nun $x = R\sin\varphi$ und $z = R(\cos\varphi - \sin\varphi$ [illegible], ſo wird

$$d(4x^2z) = 4R^3d[\sin^2\varphi(\cos\varphi - \sin\varphi\cot c)] = 0$$

$$\text{alſo auch } d[\sin^2\varphi\cos\varphi - \sin^3\varphi\cot c] = 0$$

und daher

$$\sin^2\varphi\, d\cos\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi\, d\sin\varphi - 3\sin^2\varphi\cot c\, d\sin\varphi = 0$$

nämlich es wird

$$-\sin^3\varphi + 2\sin\varphi\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi\cot c = 0$$

und daher auch

$$-(1-\cos^2\varphi) + 2\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi\cot c = 0$$

$$\text{oder } 3\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi\cot c = 1$$

und ſonach iſt auch

$$\frac{1+\cos 2\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{2}\cot c = \tfrac{1}{3}$$

Es iſt alſo $\sin(c-2\varphi) = -\frac{\sin c}{3}$

$$\text{und daher endlich } \sin(2\varphi - c) = \frac{\sin c}{3}$$

Aufgabe 18. Soll aus einem Cylinderausſchnitte, von welchem acb, Fig. 111, die Grundfläche iſt, der möglichſt ſtarke Balken herausgeſchnitten werden, ſo kann man die [illegible]h deſſelben entweder ſo conſtruiren, daß $\alpha\beta$ [illegible]linie wird. Für den erſten Fall iſt die Formel [illegible] Aufgabe, und für den zweiten in dem Zuſatz [illegible]leitet. Welcher von beiden Balken hat [illegible]ch

Auflösung. Setzt man den Radius des Kreises = R, den Winkel bcd = acd = c, $\angle\beta cd = \angle\alpha cd = \varphi$, nimmt $\alpha\beta = 2x$ als Grundlinie und eg = z als Höhe des Balkens an, und setzt ce = y, so ist

$$(c\beta) = x = R\sin\varphi,\ (ce) = y = R\cos\varphi$$

und $cg : gf = 1 : tgc$

also $y - z : x = 1 : tgc$

hiernach ist $y - z = x\cot c$

also $z = y - x\cot c = R\cos\varphi - R\sin\varphi\cot c$

folglich $2xz^2 = 2R\sin\varphi \cdot R^2(\cos\varphi - \sin\varphi\cot c)^2$

Um nun den Werth von φ zu erhalten, für welchen $2xz^2$ ein Maximum wird, muß man $d(2xz^2) = 0$ setzen, also auch

$$2R^3 d[\sin\varphi(\cos\varphi - \sin\varphi\cot c)^2] = 0$$

und daher

$$0 = (\cos\varphi - \sin\varphi\cot c)^2 d\sin\varphi + 2\sin\varphi(\cos\varphi - \sin\varphi\cot c) \times d(\cos\varphi - \sin\varphi\cot c)$$

Dieses giebt

$$(\cos\varphi - \sin\varphi\cot c)[(\cos\varphi - \sin\varphi\cot c)\cos\varphi + 2\sin\varphi \times (-\sin\varphi - \cos\varphi\cot c)]d\varphi = 0$$

Setzt man nun den ersten Factor = 0, also

$$\cos\varphi - \sin\varphi\cot c = 0$$

so wird $\cot\varphi = \cot c$, also $\varphi = c$

was ein Minimum giebt. Wird aber der andere Factor = 0 gesetzt, so erhält man

$$\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\cot c - 2\sin^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi\cot c = 0$$

nämlich es ist

$$1 - 3\sin^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi\cot c = 0$$

und $\sin^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\cot c = \frac{1}{3}$

und weil $\sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$ und $\sin\varphi\cos\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}$

so ist $\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{2}\cot c = \frac{1}{3}$

und daher $-\cos 2\varphi + \sin 2\varphi\cot c = \frac{2}{3} - 1$

also auch $\cos 2\varphi - \sin 2\varphi \cdot \frac{\cos c}{\sin c} = \frac{1}{3}$

woraus folgt $\sin(c - 2\varphi) = \frac{\sin c}{3}$

und hierdurch ist der Winkel φ bestimmt, wovon die Werthe

von $\alpha\beta = 2x = 2R\sin\varphi$ und $eg = z = R(\cos\varphi - \sin\varphi\cot c)$ $= \frac{R\sin(c-\varphi)}{\sin c}$ abhängen.

Dieſes führt zu der einfachen Conſtruction: Man nehme, Fig. 111a, die Sehne $bm = \frac{1}{3}ab$, halbire den Bogen bm in h und bd in β, ſo iſt, wenn nun $d\alpha = d\beta$ genommen wird, $\alpha\beta$ die Grundlinie des Balkens $= 2x$, und man erhält die Höhe, wenn durch α und β Parallelen mit dc gezogen werden, bis ſie die Radien ca und cb ſchneiden.

Zuſatz. Will man den Balken aus dem Prisma ſo herausſchneiden, daß $\alpha\beta$ die Höhe und βf die Grundlinie deſſelben wird, ſo muß, weil $\alpha\beta = 2x$ und $eg = z$, der Ausdruck $4x^2z$ ein Maximum werden. Da nun $x = R\sin\varphi$ und $z = R(\cos\varphi - \sin\varphi\cot c)$, ſo wird

$$d(4x^2z) = 4R^3d[\sin^2\varphi(\cos\varphi - \sin\varphi\cot c)] = 0$$

$$\text{alſo auch } d[\sin^2\varphi\cos\varphi - \sin^3\varphi\cot c] = 0$$

und daher

$$\sin^2\varphi\, d\cos\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi\, d\sin\varphi - 3\sin^2\varphi\cot c\, d\sin\varphi = 0$$

nämlich es wird

$$-\sin^3\varphi + 2\sin\varphi\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi\cot c = 0$$

und daher auch

$$-(1-\cos^2\varphi) + 2\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi\cot c = 0$$

$$\text{oder } 3\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi\cot c = 1$$

und ſonach iſt auch

$$\frac{1+\cos 2\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{2}\cot c = \tfrac{1}{3}$$

Es iſt alſo $\sin(c-2\varphi) = -\frac{\sin c}{3}$

und daher endlich $\sin(2\varphi - c) = \frac{\sin c}{3}$

Aufgabe 18. Soll aus einem Cylinderausſchnitte, von welchem acb, Fig. 111, die Grundfläche iſt, der möglichſt feſteſte Balken herausgeſchnitten werden, ſo kann man die Grundfläche $\alpha\beta fh$ deſſelben entweder ſo conſtruiren, daß $\alpha\beta$ oder βf die Grundlinie wird. Für den erſten Fall iſt die Formel in der vorigen Aufgabe, und für den zweiten in dem Zuſatze zu derſelben abgeleitet. Welcher von beiden Balken hat die größere Feſtigkeit?

Aufgabe 19. Aus einem Cylinderausschnitte, dessen Grundfläche ein Kreisausschnitt ist, kann ein Balken auch so herausgehauen werden, daß egfd, Fig. 112, die Grundfläche desselben bildet. Wie muß die Grundfläche construirt werden, wenn der Balken die möglichst größte Festigkeit haben soll?

Auflösung. Setzt man die Höhe des Balkens $de = x$, die Grundlinie $eg = y$, $cg = z$, $\angle acb = c$ und $\angle dcc = \varphi$, so ist für $cd = R$

$$de = x = R\sin\varphi,\quad ce = z + y = R\cos\varphi \text{ und } cg : gf = 1 : \operatorname{tg} c$$

$$\text{also } z : x = 1 : \operatorname{tg} c, \text{ folglich } z = \frac{x}{\operatorname{tg} c} = x\cot c$$

Es ist also $y = R\cos\varphi - z = R\cos\varphi - x\cot c = R\cos\varphi - R\sin\varphi\cot c$.

Soll nun der Balken, von welchem degf die Grundfläche ist, die möglichst größte Festigkeit haben, so muß x^2y ein Maximum werden, es muß also $d(x^2y) = 0$ sein, und weil

$$x^2y = R^2\sin^2\varphi\,[R\cos\varphi - R\sin\varphi\cot c]$$

so muß

$$R^3 d\,[\sin^2\varphi\cos\varphi - \sin^3\varphi\cot c] = 0 \text{ sein,}$$

und daher auch

$$\sin^2\varphi\, d\cos\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi\, d\sin\varphi - 3\sin^2\varphi\cot c\, d\sin\varphi = 0$$

$$\text{also } -\sin^3\varphi + 2\sin\varphi\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi\cot c = 0$$

hiernach ist auch

$$-\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi\cot c = 0$$

$$\text{und } 3\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi\cot c = 1$$

$$\text{also } \frac{1+\cos 2\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{2}\cot c = \tfrac{1}{3}$$

$$\text{und } \cos 2\varphi - \sin 2\varphi\frac{\cos c}{\sin c} = -\tfrac{1}{3}$$

Daher wird, wie in dem Zusatz der vorigen Aufgabe,

$$\sin(c - 2\varphi) = -\frac{\sin c}{3}$$

$$\text{und folglich } \sin(2\varphi - c) = \frac{\sin c}{3}$$

Diese Formel führt zu der einfachen Construction: Man ziehe von a die Normale $a\alpha$ auf cb, trage $\frac{2}{3}$ dieser Linie von a bis m als Sehne ein, halbire den Bogen am in n und nb in d,

die ſpannenden Kräfte der Länge, zu welcher ſie durch d
ausgedehnt werden, proportionirt ſind, ſo daß ein und
Faſer durch die mfache Kraft auch m mal ſo lang
wird. Iſt ac, Fig. 113, ein ſenkrechter Durchſchnitt
chungsebene eines Körpers, und erhält dieſer durch ſei
ſticität, bevor er bricht, die Lage aγCA, ſo hat die
Faſer cγ die größte Ausdehnung, und es verhalten
ſpannenden Kräfte für die Faſern cγ und dδ, wie die
dieſer Linien. Die der Kräfte, welche die
chen in dem Raume efindlichen Faſern ſpannen
her dem Dreieck caγ rtionirt. Soll der Körp
eine Kraft, welche par nit der Richtung ſeiner Faſe
zerriſſen werden, ſo erh alle Faſern eine gleiche Sp
und es iſt daher die E mnung einer jeden Faſer
Die Summe der ſpannenden Kräfte iſt alſo in dieſe
$= c\gamma\alpha a$. Da nun $c\gamma\alpha a = 2 \times \Delta c\gamma a$, ſo folgt,
Körper, wenn a ein Punkt der Drehungsaxe iſt,
che das Zerbrechen erfolgt, nur mit der Hälfte ſein
luten Feſtigkeit dem Zerbrechen widerſteht, und d
ment dieſes Widerſtandes wird erhalten, wenn man di
mit dem Abſtande des Schwerpunktes des Dreiecks
a multiplicirt. Dieſer Abſtand aber iſt $= \frac{2}{3}(ca) = \frac{2}{3}$

alſo die abſolute Feſtigkeit eines ſchmalen Streifs
chungsfläche $= fk$ geſetzt, ſo iſt das Moment des W
des deſſelben $= \frac{2}{3}p \times \frac{1}{2}fk = \frac{1}{3}pfk$. Iſt nun zu dem
chen dieſes Streifs an einem Hebelarme $= l$ eine Kr
erforderlich, ſo muß

$$lX' = \frac{1}{3}pfk \text{ ſein}$$

Am einfachſten wird die hieraus ſich ergebende Formel
Fall, wenn die Brechungsebene ein Rechteck iſt; den
dieſes Rechteck aus n Streifen $= f$, ſo haben dieſe
eine gleiche relative Feſtigkeit, und es iſt alsdann,
ganze zu dem Zerbrechen erforderliche Kraft $= X$ geſ

$$lX = \frac{1}{3}pnfk$$

Da nun hier $nf = F = gp$ iſt, ſo wird die relati
keit eines Balkens nach der Leibnitziſchen Hypotheſe
Gleichung beſtimmt

$$IX = \frac{p^2gk}{3}$$

und es ist daher $X = \frac{p^2gk}{3l}$

3. Jacob Bernoulli suchte die Leibnitz'sche Hypothese durch der Erfahrung näher zu bringen, daß er auch den stand berücksichtigte: es liegt die Axe, um welche der Kör- bei dem Zerbrechen sich dreht, nicht in der untern Fläche selben, sondern weiter oben, und es werden daher, während Fasern des obern Theils des Körpers ausgedehnt werden, des untern Theils zusammengedrückt. Indem er nun be- eist, daß für das Zusammendrücken der Fasern dasselbe Ge- z stattfindet, wie für das Ausdehnen derselben, daß also ch die zusammendrückenden Kräfte der Länge, um welche Fasern hierdurch verkürzt werden, proportionirt sind, kommt auf eine der obigen ähnliche Formel, welche jedoch nur erst dann einer Anwendung fähig ist, wenn man den Abstand Drehungsaxe von der untern Fläche kennt.

Es sei ac, Fig. 114, ein normaler Durchschnitt der Bre- ungsebene, und g ein Punkt der Drehungsaxe, so werden bei dem Biegen des Körpers, wodurch er in die Lage $\alpha\gamma CA$ mmt, die Fasern in dem Raume $cg\gamma$ ausgedehnt, und die erhalb des Raumes $ag\alpha$ werden zu gleicher Zeit zusammen- drückt. Nun wird angenommen, daß die Summe der zu- mmendrückenden Kräfte, ohne Rücksicht auf ihr Moment, Summe der Kräfte gleich sein müsse, welche die Fasern s obern Theils des Körpers ausdehnen, weil nur bei dieser oraussetzung die Faser bei g, welche ihre natürliche Länge hält, durchaus keinen Druck erleidet, und daß hiernach, wenn $< gc$ ist, die auf eine einzelne Faser wirkende zusammen- essende Kraft größer ist, als die unter gleichen Umständen kende ausdehnende Kraft. Setzt man nun $ac = p$ und $= h$, also $ga = p - h$, so ist, nach No. 2, für einen malen Streifen von der Höhe $gc = h$, die Summe der die fern ausdehnenden Kräfte $= \frac{1}{2}fk$, und eben so groß ist also, ch der obigen Annahme, auch die Summe der die Fasern sammenpressenden Kräfte. Das Moment der erstern aber ist

$$= \tfrac{2}{3}(gc) \cdot \tfrac{1}{2}fk = \tfrac{2}{3}h \cdot \tfrac{1}{2}fk = \tfrac{1}{3}hfk$$

die ſpannenden Kräfte der Länge, zu welcher ſie durch dieſelben ausgedehnt werden, proportionirt ſind, ſo daß ein und dieſelbe Faſer durch die mfache Kraft auch m mal ſo lang gedehnt wird. Iſt ac, Fig. 113, ein ſenkrechter Durchſchnitt der Brechungsebene eines Körpers, und erhält dieſer durch ſeine Elaſticität, bevor er bricht, die Lage $a\gamma CA$, ſo hat die oberſte Faſer $c\gamma$ die größte Ausdehnung, und es verhalten ſich die ſpannenden Kräfte für die Faſern $c\gamma$ und $d\delta$, wie die Längen dieſer Linien. Die Summe der Kräfte, welche die ſämmtlichen in dem Raume $ca\gamma$ befindlichen Faſern ſpannen, iſt daher dem Dreieck $ca\gamma$ proportionirt. Soll der Körper durch eine Kraft, welche parallel mit der Richtung ſeiner Faſern wirkt, zerriſſen werden, ſo erhalten alle Faſern eine gleiche Spannung, und es iſt daher die Spannung einer jeden Faſer $= c\gamma$. Die Summe der ſpannenden Kräfte iſt alſo in dieſem Falle $= c\gamma\alpha a$. Da nun $c\gamma\alpha a = 2 \times \Delta c\gamma a$, ſo folgt, daß der Körper, wenn a ein Punkt der Drehungsaxe iſt, um welche das Zerbrechen erfolgt, nur mit der Hälfte ſeiner abſoluten Feſtigkeit dem Zerbrechen widerſteht, und das Moment dieſes Widerſtandes wird erhalten, wenn man dieſe Kraft mit dem Abſtande des Schwerpunktes des Dreiecks $ca\gamma$ von a multiplicirt. Dieſer Abſtand aber iſt $= \frac{2}{3}(ca) = \frac{2p}{3}$. Wird alſo die abſolute Feſtigkeit eines ſchmalen Streifs der Brechungsfläche $=$ fk geſetzt, ſo iſt das Moment des Widerſtandes deſſelben $= \frac{2}{3}p \times \frac{1}{2}fk = \frac{1}{3}pfk$. Iſt nun zu dem Zerbrechen dieſes Streifs an einem Hebelarme $= l$ eine Kraft $= X'$ erforderlich, ſo muß

$$lX' = \tfrac{1}{3}pfk \text{ ſein}$$

Am einfachſten wird die hieraus ſich ergebende Formel in dem Fall, wenn die Brechungsebene ein Rechteck iſt; denn beſteht dieſes Rechteck aus n Streifen $= f$, ſo haben dieſe ſämmtlich eine gleiche relative Feſtigkeit, und es iſt alsdann, wenn die ganze zu dem Zerbrechen erforderliche Kraft $= X$ geſetzt wird,

$$lX = \tfrac{1}{3}pnfk$$

Da nun $nf = F = gp$ iſt, ſo wird die relative Feſtigkeit eines Balkens nach der Leibnitzſchen Hypotheſe durch die Gleichung beſtimmt

$lX =$

'en derselben angenommen wird, ist $C = \frac{1}{3}$, und berücksich-
man zugleich die Compressibilität, so wird $C = \frac{m}{3}$, wo m
Theil der Höhe bedeutet, für welchen ein Ausdehnen der
rn stattfindet.

Hieraus geht also hervor, daß jedenfalls die relative Fe-
it eines Balkens dem Ausdrucke $\frac{p^2gk}{l}$, und für verschie-
Balken von derselben Masse, weil alsdann k gegeben ist,
proportionirt ist. Da nun die Aufgaben §. 65 sich bloß
Balken beziehen, so haben die dort gegebenen Auflösungen
immer Gültigkeit, welche Hypothese dabei auch ange-
nen werden mag.

Zusatz 2. Bei Bestimmung der relativen Festigkeit der
r wird die Compressibilität gewöhnlich außer Acht gelas-
weil m in den meisten Fällen nur wenig von 1 verschie-
st, und daher durch Berücksichtigung derselben die Rech-
ohne wesentlichen Nutzen weitläufiger wird, außerdem
die Bernoulli'sche Hypothese noch gegründeten Zweifeln
vorfen ist.

Zusatz 3. Die hier durch einfache Betrachtung abgelei-
Ausdrücke für die relative Festigkeit der Körper führen
telbar zu den Formeln, durch welche die Festigkeit der
n ausgedrückt wird; ist die Brechungsebene aber kein
eck, so wird es weitläufig, aus den gefundenen Aus-
n die entsprechenden Formeln herzuleiten, und es ist da-
weckmäßiger, ganz allgemeine Formeln mit Hülfe der
sis aufzusuchen, was in dem folgenden § geschehen soll.

§. 67.

alytische Formeln für die relative Festigkeit der Körper.

. Ist ayb, Fig. 115, die Brechungsebene eines Körpers,
wirkt eine Kraft auf dieselbe in der Richtung der Fasern,
den diese dadurch ausgedehnt und reißen endlich. Die
erforderliche Kraft ist unter übrigens gleichen Umständen
echungsfläche proportionirt. Nun sei $ax = x$, $xy = y$
$' = dx$, so ist $xyy'x' = ydx$, und wenn die absolute

und das der letztern

$$= \tfrac{2}{3}(ga)\cdot\tfrac{1}{2}fk = \tfrac{2}{3}(p-h)\cdot\tfrac{1}{2}fk = \tfrac{1}{3}(p-h)fk$$

Ist also die zu dem Zerbrechen des Theils des Körpers, von welchem f die Brechungsebene ist, an einem Hebelarm = l erforderliche Kraft = X', so muß sein

$$lX' = \tfrac{1}{3}hfk + \tfrac{1}{3}(p-h)fk = \tfrac{1}{3}pfk$$

Diese Formel wird ebenfalls einfach, wenn die Brechungsebene ein Rechteck ist; denn besteht dasselbe aus n Streifen, von welchen die Fläche eines jeden = f ist, und wird die zu dem Zerbrechen des Körpers erforderliche Kraft = X gesetzt, so erhält man

$$lX = lnX' = \tfrac{1}{3}pnfk$$

wo nun, wenn die Breite des Körpers, also die Grundlinie des Rechtecks = g gesetzt wird, da die Höhe = gc = h ist, nf = gh sein muß, und es ist daher

$$lX = \tfrac{1}{3}pghk$$

Da nun gc = h ein bestimmter Theil der ganzen Höhe ac = p ist, so kann man h = mp setzen, wo also m einen ächten Bruch bedeutet, und man erhält hierdurch

$$lX = \frac{mp^2gk}{3} \text{ und } X = \frac{mp^2gk}{3l}$$

eine Formel, die erst, wenn m bekannt ist, eine bestimmte Bedeutung erhält. Für m = 1 fällt die Brechungsaxe mit der Grundlinie zusammen, und es giebt der Ausdruck alsdann die nach der Leibnitz'schen Hypothese erhaltene Formel. Setzt man $m = \frac{3}{4}$, so wird

$$X = \frac{p^2gk}{4l}$$

und für $m = \frac{1}{2}$ ist

$$X = \frac{p^2gk}{6l} \text{ ꝛc.}$$

Zusatz 1. Der Ausdruck für die relative Festigkeit eines Balkens, dessen Querschnitt ein Rechteck ist, kann ganz allgemein gesetzt werden

$$X = C\cdot\frac{p^2gk}{l}$$

und es ist für absolut harte Körper $C = \frac{1}{2}$. Für elastische, wenn ein bloßes Ausdehnen der Fasern, aber kein Zusammen-

hnittsfläche = 1, mit einer Kraft = k gespannt ist.
nan nun die entsprechende Spannung der Fasern bei
', so ist

$$k : k' = p : z, \text{ also } k' = \frac{zk}{p}$$

ist daher bei biegsamen Körpern der Widerstand der
bei z, in dem Augenblicke wo der Bruch erfolgt, =
$x = \frac{k}{p} \cdot dx \cdot zdz$; das Moment derselben für die Dre-
:e ab ist also $= z \times \frac{kdx}{p} \cdot zdz = \frac{kdx}{p} \cdot z^2dz$, und da-
Summe der Momente aller Fasern in dem Raume $xx'v'v$

$$= \frac{kdx}{p} \int z^2dz = \frac{kdx}{p}(\tfrac{1}{3}z^3 + C)$$

$z = y$ erhält man hieraus die Summe der Mo-
ür die Fläche $xx'y'y$

$$= \frac{kdx}{p}(\tfrac{1}{3}y^3 + C)$$

mme der Momente für die ganze Fläche $a \times y$ ist also

$$= \frac{k}{p} \int (\tfrac{1}{3}y^3 + C)\, dx + C'$$

ird die Gleichung für die relative Festigkeit biegsamer

$$1X = \frac{k}{p} \int (\tfrac{1}{3}y^3 + C)\, dx + C'$$

satz. Die Constanten C und C' dürfen hier nicht
cht gelassen werden, weil in dem Falle, wo die Bre-
bene nicht überall bis zur Drehungsaxe geht, die
der Momente $= \int z^2dz$, für einen gewissen Werth
$= 0$ werden muß, und eben so erhält C' einen Werth
en von 0, wenn z. B. der Anfangspunkt a der Ab-
in a' liegt.

§. 68.

Uebungen.

fgabe 1. Es soll die relative Festigkeit eines bieg-
Körpers gefunden werden, von welchem die Brechungs-
n rechtwinkliges Dreieck ist, wenn eine Kathete ab des-
ie Drehungsaxe bildet.

flösung. Es ist ganz allgemein

$$IX = \frac{k}{p}\int(\tfrac{1}{2}y^2 + C)\,dx + C'$$

oder vielmehr $IX = \frac{k}{p}\int[\int z^2 dz + C]\,dx + C'$

Setzt man nun, Fig. 116, $ax = x$, $xy = y$, $ab = g$, $bp = p$, ſo wird $\int z^2 dz = \frac{1}{3}z^3 + C = 0$, wenn man $x = z = 0$ ſetzt; alſo iſt $C = 0$, und es iſt daher nun für $x =$

$$IX = \int y^3 dx + C'$$

Da nun $ab : bp = ax$

alſo $g : p =$ y, ſo iſt $y = \frac{px}{g}$

und es wird daher

$$IX = \frac{k}{3p}\int \frac{p^3x^3}{g^3}\cdot dx + C' = \frac{kp^2}{3g^3}\cdot\frac{x^4}{4} + C'$$

und weil, für $x = 0$, auch $IX = 0$ wird, ſo iſt $C' =$

$$\text{alſo } IX = \frac{kp^2x^4}{12g^3}$$

Setzt man nun $x = (ab) = g$, ſo erhält man

$$IX = \frac{kgp^2}{12} \text{ und } X = \frac{kpg^2}{12l}$$

für die relative Feſtigkeit des Körpers.

Zuſatz. Iſt der Körper abſolut hart, ſo wird die tive Feſtigkeit ausgedrückt durch die Gleichung

$$IX = k\int(\tfrac{1}{2}y^2 + C)\,dx + C'$$

und es iſt hier ebenfalls $C' = 0$, und auch $C = 0$,

$$\text{und daher } IX = \frac{k}{2}\int y^3 dx = \frac{k}{2}\int \frac{p^2x^2}{g^2}\,dx$$

$$\text{Es iſt alſo } IX = \frac{kp^2}{2g^2}\cdot\frac{x^3}{3} = \frac{kp^2x^3}{6g^2}$$

und hieraus erhält man, für $x = g$,

$$X = \frac{kgp^2}{6l}$$

die relative Feſtigkeit des harten Körpers iſt alſo in d Falle zweimal ſo groß als die eines elaſtiſchen.

Aufgabe 2. Das Dreieck apc, Fig. 116, iſt die chungsebene eines elaſtiſchen Körpers, und ac die Drehu axe; es ſoll die relative Feſtigkeit beſtimmt werden.

luflösung. Nach Aufgabe 1. ist die relative Festigkeit
s Körpers, von welchem das rechtwinklige Dreieck abp
echungsebene bildet,

$$X' = \frac{kp^2g}{12l}$$

man also $b\alpha = \gamma$, und die relative Festigkeit für die
ngsebene $pb\alpha = X''$, so ist aus demselben Grunde

$$X'' = \frac{kp^2\gamma}{12l}$$

ist die gesuchte Festigkeit des ganzen Körpers

$$X = X' + X'' = \frac{kp^2(g+\gamma)}{12l}$$

) es ist, wenn man die Grundlinie $a\alpha = g+\gamma = G$

$$X = \frac{kp^2G}{12l}$$

usatz. In allen Fällen also, wo die Brechungsebene
ieck ist, und eine Seite desselben die Drehungsaxe, ist
tive Festigkeit dem Ausdruck $\frac{p^2G}{l}$ proportionirt, eben
bei den Balken.

ufgabe 3. Die Brechungsebene eines elastischen Kör-
ein Paralleltrapez abdc, Fig. 117, und eine der pa-
Seite ab ist die Brechungsaxe desselben; es soll die
Festigkeit des Körpers bestimmt werden.

uflösung. Zieht man die Normalen cp und dq, so
e Fläche abdc dadurch in zwei rechtwinklige Dreiecke
Rechteck zerlegt, und es ist nun für $ap = a$, $bq = b$,
c, $cp = dq = p$, die Festigkeit des Körpers, von

apc die Brechungsebene ist, $= \frac{kp^2a}{12l}$

pqdc = = = $= \frac{kp^2c}{3l}$

dqb = = = $= \frac{kp^2b}{12l}$

usammengenommen giebt den gesuchten Werth von

$$X = \frac{kp^2}{12l}(a + 4c + b)$$

Setzt man nun die ganze Drehungsebene $ab = a+b+c=A$, ſo wird

$$X = \frac{kp^2}{12l}(A + 3c)$$

wo $c = cd$ die obere Seite der Figur iſt.

Zuſatz. Iſt der Körper abſolut hart, ſo wird die re
tive Feſtigkeit des Theils, welchem

apc die Bre ebene iſt, $= \frac{kp^2a}{6l}$

pqdc " " $= \frac{kp^2c}{2l}$

dqb " " $= \frac{kp^2b}{6l}$

und dies zuſammengenommen giebt

$$X = \frac{kp^2}{6l}(a + 3c + b) = \frac{kp^2}{6l}(A + 2c).$$

Aufgabe 4. Die Brechungsebene eines elaſtiſchen K
pers iſt ein Paralleltrapez pbdq, Fig. 116, von welchem
Seitenlinien pb und dq normal auf der Drehungsaxe bd ſt
es ſoll die relative Feſtigkeit deſſelben gefunden werden.

Auflöſung. Für $ax = x$, $xy = y$, $ad = a$, $db =$
alſo $ab = a + b$, $bp = p$ und $dq = q$ iſt, wenn der höc
Punkt der Brechungsfläche in p liegt, nach Aufgabe 1., die
lative Feſtigkeit des Körpers, von welchem axy die Brechu
ebene iſt,

$$= \frac{kp^2x^4}{12l(a+b)^3}$$

Setzt man nun $x = (ad) = a$, ſo wird dieſelbe für die
chungsebene adq

$$= X' = \frac{kp^2a^4}{12l(a+b)} = \frac{kp^2a}{12l} \cdot \left(\frac{a}{a+b}\right)^3$$

und weil $a + b : a = p : q$, ſo iſt $\frac{a}{a+b} = \frac{q}{p}$

alſo wird $X' = \frac{kp^2a}{12l} \cdot \frac{q^3}{p^3} = \frac{kaq^3}{12pl}$

Die relative Feſtigkeit X'' für die Fläche abp iſt nach Aufga

$$X'' = \frac{k(a+b)p^3}{12l}$$

Glich ist die gesuchte relative Festigkeit X für die Brechungs-
ne pbdq

$$X = X'' - X' = \frac{k(a+b)p^3}{12l} - \frac{kaq^3}{12pl}$$

a nun

$$a : b = q : p - q \text{ und } a + b : b = p : p - q$$

$$\text{so ist } a = \frac{bq}{p-q} \text{ und } a + b = \frac{bp}{p-q}$$

ist also auch, wenn man diese Werthe setzt,

$$X = \frac{kp^2}{12l} \cdot \frac{bp}{p-q} - \frac{kq^3}{12pl} \cdot \frac{bq}{p-q} = \frac{kb}{12lp}\left(\frac{p^4 - q^4}{p-q}\right)$$

$$= \frac{kb}{12lp}(p^3 + p^2q + pq^2 + q^3)$$

$$\text{und endlich } X = \frac{kb}{12l} \cdot \frac{(p^2+q^2)(p+q)}{p}$$

Zusatz. Ist der Körper nicht elastisch, so findet man
ie Festigkeit

$$\text{für die Brechungsebene abp, } = \frac{kp^2(a+b)}{6l}$$

$$\text{und } = \quad = \quad \text{adq, } = \frac{kq^2a}{6l}$$

olglich ist bei dieser Voraussetzung

$$X = \frac{k}{6l}(p^2(a+b) - q^2a)$$

der, wenn für a + b und a die obigen Werthe gesetzt werden,

$$X = \frac{k}{6l}\left(p^2 \cdot \frac{bp}{p-q} - q^2 \cdot \frac{bq}{p-q}\right)$$

$$= \frac{6l}{kb}\left(\frac{p^3 - q^3}{p-q}\right) = \frac{kb}{6l}(p^2 + pq + q^2).$$

Aufgabe 5. Die Brechungsebene eines elastischen Kör-
ers ist ein Dreieck pbq, Fig. 116, dessen eine Seite pb nor-
mal auf der Drehungsaxe ab steht, und es liegt q der Dre-
ungsaxe näher als p; es soll die relative Festigkeit des Kör-
ers bestimmt werden.

Auflösung. Verlängert man pq, bis diese Linie die
Drehungsaxe in a trifft, zieht qd normal auf ab, und setzt

$$X = \frac{kp^2}{12l}(a + 4c + b)$$

Setzt man nun die ganze Drehungsebene $ab = a+b+c=A$, ſo wird

$$X = \frac{kp^2}{12l}(A + 3c)$$

wo $c = cd$ die obere Seite der Figur iſt.

Zuſatz. Iſt der Körper abſolut hart, ſo wird die relative Feſtigkeit des Theils, von welchem

apc die Brechungsebene iſt, $= \frac{kp^2a}{6l}$

pqdc " " $= \frac{kp^2c}{2l}$

dqb " " $= \frac{kp^2b}{6l}$

und dies zuſammengenommen giebt

$$X = \frac{kp^2}{6l}(a + 3c + b) = \frac{kp^2}{6l}(A + 2c).$$

Aufgabe 4. Die Brechungsebene eines elaſtiſchen Körpers iſt ein Paralleltrapez pbdq, Fig. 116, von welchem die Seitenlinien pb und dq normal auf der Drehungsaxe bd ſind; es ſoll die relative Feſtigkeit deſſelben gefunden werden.

Auflöſung. Für $ax = x$, $xy = y$, $ad = a$, $db = b$, alſo $ab = a + b$, $bp = p$ und $dq = q$ iſt, wenn der höchſte Punkt der Brechungsfläche in p liegt, nach Aufgabe 1., die relative Feſtigkeit des Körpers, von welchem axy die Brechungsebene iſt,

$$= \frac{kp^2x^4}{12l(a+b)^3}$$

Setzt man nun $x = (ad) = a$, ſo wird dieſelbe für die Brechungsebene adq

$$= X' = \frac{kp^2a^4}{12l(a+b)} = \frac{kp^2a}{12l} \cdot \left(\frac{a}{a+b}\right)^3$$

und weil $a + b : a = p : q$, ſo iſt $\frac{a}{a+b} = \frac{q}{p}$

alſo wird $X' = \frac{kp^2a}{12l} \cdot \frac{q^3}{p^3} = \frac{kaq^3}{12pl}$

Die relative Feſtigkeit X'' für die Fläche abp iſt nach Aufgabe 1.

$$X'' = \frac{k(a+b)p^3}{12l}$$

folglich ist die gesuchte relative Festigkeit X für die Brechungsebene pbdq

$$X = X'' - X' = \frac{k(a+b)p^3}{12l} - \frac{kaq^3}{12pl}$$

Da nun

$$a:b = q:p-q \text{ und } a+b:b = p:p-q$$

$$\text{so ist } a = \frac{bq}{p-q} \text{ und } a+b = \frac{bp}{p-q}$$

es ist also auch, wenn man diese Werthe setzt,

$$X = \frac{kp^2}{12l} \cdot \frac{bp}{p-q} - \frac{kq^3}{12pl} \cdot \frac{bq}{p-q} = \frac{kb}{12lp}\left(\frac{p^4-q^4}{p-q}\right)$$

$$= \frac{kb}{12lp}(p^3+p^2q+pq^2+q^3)$$

$$\text{und endlich } X = \frac{kb}{12l} \cdot \frac{(p^2+q^2)(p+q)}{p}$$

Zusatz. Ist der Körper nicht elastisch, so findet man die Festigkeit

$$\text{für die Brechungsebene abp, } = \frac{kp^2(a+b)}{6l}$$

$$\text{und } \quad " \quad " \quad \text{adq, } = \frac{kq^2a}{6l}$$

folglich ist bei dieser Voraussetzung

$$X = \frac{k}{6l}(p^2(a+b) - q^2a)$$

oder, wenn für a+b und a die obigen Werthe gesetzt werden,

$$X = \frac{k}{6l}\left(p^2 \cdot \frac{bp}{p-q} - q^2 \cdot \frac{bq}{p-q}\right)$$

$$= \frac{6l}{kb}\left(\frac{p^3-q^3}{p-q}\right) = \frac{kb}{6l}(p^2+pq+q^2).$$

Aufgabe 5. Die Brechungsebene eines elastischen Körpers ist ein Dreieck pbq, Fig. 116, dessen eine Seite pb normal auf der Drehungsaxe ab steht, und es liegt q der Drehungsaxe näher als p; es soll die relative Festigkeit des Körpers bestimmt werden.

Auflösung. Verlängert man pq, bis diese Linie die Drehungsaxe in a trifft, zieht qd normal auf ab, und setzt

$$\frac{kg}{12l}(h^2+bp+p^2)$$

und für die Brechungsebene $c\alpha a$ iſt dieſelbe =

$$\frac{kg}{12l}(h^2+hq+q^2)$$

und durch Addition beider wird die von demſelben angegebene Formel erhalten. Die Ausdrücke für die einzelnen Theile ſind nun zwar hier dieſelben, w[illegible] Aufgabe 5. für den Fall erhalten werden, wenn die [illegible]eite des Dreiecks normal auf der Brechungsebene iſt; es [illegible]ierbei aber der Umſtand außer Acht gelaſſen, daß der Pun[illegible]on dem Dreieck pbq, Fig. 116, der höchſte Punkt der Brec[illegible]sfläche iſt, was bei α nur in dem beſondern Falle ſtattfin[illegible] wenn bc, Fig. 118, mit der Drehungsaxe parallel iſt. [illegible]n der Aufgabe 5. erhaltene Formel erleidet eine Abänderung, ſobald das Ende der Seite des Dreiecks, welche normal auf der Drehungsaxe ſteht, nicht der höchſte Punkt der Drehungsfläche iſt; wie ſich aus Folgendem ergiebt: Es ſei die Brechungsfläche das Dreieck abc, Fig. 118, wo $a\alpha$ normal iſt auf der Drehungsaxe, und es breche b früher als α, ſo iſt, für $bp = p$, $\alpha a = h$ und $ap = a$, die relative Feſtigkeit für die Brechungsfläche

$$bpa\alpha = \frac{ka}{12pl}(p+h)(p^2+h^2) = X'$$

und für das Dreieck apb iſt dieſelbe $= \frac{kap^2}{12l} = X''$, folglich iſt dieſelbe für die Brechungsfläche $ab\alpha$ =

$$X = X' - X'' = \frac{ka}{12pl}(p+h)(p^2+h^2) - \frac{kap^2}{12l}$$

$$= \frac{ka}{12l}\left(\frac{p^2h+ph^2+h^3}{p}\right) = \frac{ka}{12l}\cdot\frac{h}{p}(p^2+ph+h^2).$$

Zuſatz 2. Iſt die Brechungsfläche ein Dreieck abp, Fig. 116, und man ſetzt $ab = g$, $bp = p$, ſo wird die Feſtigkeit durch die Formel $X = \frac{kgp^2}{12l}$ ausgedrückt. Eben ſo iſt dieſelbe für das Dreieck adq für ſich genommen, wenn man $ad = a$ und $dq = q$ ſetzt, $X' = \frac{kaq^2}{12l}$; in ſo fern aber adq einen Theil von abp bildet, erhält man für X' einen andern Werth

$$X = X' - X'' - X''' =$$

$$\frac{k(a+b)}{12pl}(p+q)(p^2+q^2) - \frac{kap^2}{12l} - \frac{kbq^2}{12pl}$$

$$= \frac{k(a+b)}{12pl}(p+q)(p^2+q^2) - \frac{k}{12pl}(ap^3+bq^3)$$

$$= \frac{k}{12pl}[a(p^3q+pq^3+q^4)+b(p^4+p^3q+pq^3)]$$

$$= \frac{k}{12pl}[(a+b)pq(p+q)+aq^4+bp^4]$$

Zieht man aber durch a die Linien aα parallel zu pb und qc, und setzt aα = h, so ist

a + b : a = p − q : p − h und a + b : b = p − q : h − q

und es ist daher, wenn a + b = g gesetzt wird,

$$a = \frac{g(p-h)}{p-q} \text{ und } b = \frac{g(h-q)}{p-q}$$

Werden diese Werthe in dem obigen Ausdrucke substituirt, so erhält man

$$X = \frac{kg}{12pl}\left[pq(p+q)+\frac{q^3(p-h)+p^3(h-q)}{p-q}\right]$$

$$= \frac{kg}{12pl}\left[pq(p+q)-\frac{p^3q-q^3p}{p-q}+\frac{h(p^3-q^3)}{p-q}\right]$$

nämlich es ist $X = \frac{kgh}{12pl}\left(\frac{p^3-q^3}{p-q}\right)$

und daher endlich $X = \frac{kg}{12l} \cdot \frac{h}{p}(p^2+pq+q^2)$.

Zusatz 1. Eytelwein giebt in seinem Handbuche der Statik fester Körper, Band 2. S. 311., ganz allgemein für die relative Festigkeit eines elastischen Körpers, dessen Brechungsebene ein Dreieck ist, das mit einer Spitze die Drehungsaxe berührt, die Formel

$$X = \frac{kg}{12l}(p^2+pq+q^2)$$

und es fehlt sonach der oben noch vorkommende Factor $\frac{h}{p}$, was jedenfalls unrichtig ist. Dieses fehlerhafte Resultat wird von demselben dadurch erhalten, daß er folgert: Für die Brechungsebene baα, Fig. 118, ist, mit Beibehaltung der obigen Bezeichnung, die Festigkeit =

$$\frac{kg}{12l}(h^2 + hp + p^2)$$

und für die Brechungsebene cαa iſt dieſelbe =

$$\frac{kg}{12l}(h^2 + hq + q^2)$$

und durch Addition beider wird die von demſelben angegebene Formel erhalten. Die Ausdrücke für die einzelnen Theile ſind nun zwar hier dieſelben, welche Aufgabe 5. für den Fall erhalten werden, wenn die eine Seite des Dreiecks normal auf der Brechungsebene iſt; es iſt hierbei aber der Umſtand außer Acht gelaſſen, daß der Punkt p von dem Dreieck pbq, Fig. 116, der höchſte Punkt der Brechungsfläche iſt, was bei α nur in dem beſondern Falle ſtattfindet, wenn bc, Fig. 118, mit der Drehungsaxe parallel iſt. Die in der Aufgabe 5. erhaltene Formel erleidet eine Abänderung, ſobald das Ende der Seite des Dreiecks, welche normal auf der Drehungsaxe ſteht, nicht der höchſte Punkt der Drehungsfläche iſt; wie ſich aus Folgendem ergiebt: Es ſei die Brechungsfläche das Dreieck abα, Fig. 118, wo aα normal iſt auf der Drehungsaxe, und es breche b früher als α, ſo iſt, für bp = p, αa = b und ap = a, die relative Feſtigkeit für die Brechungsfläche

$$bpa\alpha = \frac{ka}{12pl}(p + h)(p^2 + h^2) = X'$$

und für das Dreieck apb iſt dieſelbe $= \frac{kap^2}{12l} = X''$, folglich iſt dieſelbe für die Brechungsfläche abα =

$$X = X' - X'' = \frac{ka}{12pl}(p + h)(p^2 + h^2) - \frac{kap^2}{12l}$$

$$= \frac{ka}{12l}\left(\frac{p^2h + ph^2 + h^3}{p} - p^2\right) = \frac{ka}{12l} \cdot \frac{h}{p}(p^2 + ph + h^2).$$

Zuſatz 2. Iſt die Brechungsfläche ein Dreieck abp, Fig. 116, und man ſetzt ab = g, bp = p, ſo wird die Feſtigkeit durch die Formel $X = \frac{kgp^2}{12l}$ ausgedrückt. Eben ſo iſt dieſelbe für das Dreieck adq für ſich genommen, wenn man ad = a und dq = q ſetzt, $X' = \frac{kaq^2}{12l}$; in ſo fern aber adq einen Theil von abp bildet, erhält man für X' einen andern Werth

t, auch der Ausdruck $\int z^2 dz + C = 0$, also ist $C = 0$, und er, weil $z = y$ werden muß,

$$IX = \frac{k}{R}\int \tfrac{1}{3} y^3 dx + C$$

nämlich es ist $IX = \frac{k}{3R}\int (R^2 - x^2) dx \sqrt{(R^2 - x^2)}$

$$= \frac{k}{3R}\left[R^2 \int dx \sqrt{(R^2 - x^2)} - \int x^2 dx \sqrt{(R^2 - x^2)}\right]$$

ch Meier Hirsch's Integraltafeln, Seite 153., ist

$$\int x \sqrt{(R^2 - x^2)} = \frac{-x(R^2 - x^2)\sqrt{(R^2 - x^2)}}{4} + \frac{R^2}{4}\int dx \sqrt{(R^2 - x^2)}$$

es ist daher, wenn man einstweilen zur Abkürzung $R^2 - x^2$ V setzt,

$$IX = \frac{k}{3R}\left[\frac{xV\sqrt{V}}{4} + \frac{3R^2}{4}\int dx \sqrt{(R^2 - x^2)}\right]$$

n ist $\int dx \sqrt{(R^2 - x^2)} = \frac{x\sqrt{V}}{2} + \frac{R^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}}$

$$\text{und} \int \frac{dx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}} = \text{Arc sin}\frac{x}{R}$$

lich wird

$$IX = \frac{k}{3R}\left[\frac{xV\sqrt{V}}{4} + \frac{3R^2 x\sqrt{V}}{8} + \frac{3R^4}{8}\text{Arc sin}\frac{x}{R}\right]$$

$$= \frac{k}{3R}\left[x\sqrt{V}\left(\frac{R^2 - x^2}{4} + \frac{3R^2}{8}\right) + \frac{3R^4}{8}\text{Arc sin}\frac{x}{R}\right]$$

nlich es ist

$$X = \frac{k(5R^2 - 2x^2)x}{24R}\sqrt{(R^2 - x^2)} + \frac{kR^3}{8}\text{Arc sin}\frac{x}{R} + C'$$

tzt man in diesem Ausdrucke $x = 0$, so wird $IX = C'$. n nun in diesem Fall auch $IX = 0$ sein muß, so ist $C' = 0$, d man erhält nun die relative Festigkeit für den Viertels- is rca, wenn $x = R$ gesetzt wird,

$$IX = \frac{kR^3}{8}\text{Arc sin}\,1 = \frac{kR^3}{8} \cdot \tfrac{1}{2}\pi = \frac{kR^3\pi}{16}$$

selbe Festigkeit hat auch der Viertelskreis rcb, folglich ist elbe, wenn der Halbkreis arc die Brechungsebene bildet,

$$X = \frac{kR^3\pi}{8l}$$

Zusatz 1. Soll die relative Festigkeit für die Brechungs-

$$ade = \frac{kb}{12l} \cdot \frac{q}{p}(p^2 + pq + q^2)$$

$$bdc = \frac{kc}{12l} \cdot \frac{r}{p}(p^2 + pr + r^2)$$

diese addirt geben die gesuchte relative Festigkeit.

Berührt aber ein Theil der Dreiecke die Drehungsaxe nicht, wie dies bei dem Dreieck dce, Fig. 120, der Fall ist, so läßt sich die relative Festigkeit einer solchen Theilfläche auf folgende Art bestimmen: Man sucht in Beziehung auf die größte Ordinate $dd' = p$ die Festigkeit für die Flächen $dd'e'e$, $dd'c'c$ und $cc'e'e$, und zieht die beiden letztern von der ersten ab, so erhält man den entsprechenden Werth für die Theilfläche dce, wobei jedoch zu berücksichtigen ist, daß die Ordinaten cc' und ee' der Theilfläche $cc'e'e$ auf die größte Ordinate p bezogen werden müssen. Die weitere Ausführung dieser Rechnung muß der eigenen Uebung überlassen bleiben.

Zusatz. Die Auflösung der obigen Aufgabe für alle Fälle läßt sich auf die einfache Aufgabe zurückführen: die Brechungsebene bpqc, Fig. 118, ist ein Paralleltrapez, von welchem die eine Seite pq die Drehungsaxe bildet; diese Ebene ist durch eine Linie $\beta\gamma$ in zwei Theile getheilt: wieviel beträgt die erforderliche Kraft für den untern Theil, in so fern derselbe zu der ganzen Fläche gehört, also für den Augenblick, wo das Brechen an dem obersten Punkte h beginnt, und wieviel beträgt die Kraft für den obern Theil $\beta\gamma cb$?

Aufgabe 8. Die Brechungsebene eines elastischen Körpers ist ein Halbkreis, und der Durchmesser ab desselben, Fig. 121, ist die Drehungsaxe; man soll die relative Festigkeit des Körpers bestimmen.

Auflösung. Die allgemeine Formel für die relative Festigkeit ist

$$IX = \frac{k}{p} \int (\int z^2 dz + C)\, dx + C'$$

Setzt man nun den Radius $cr = R$, so wird hier $p = R$, weil p den Abstand des höchsten Punktes der Brechungsebene von der Drehungsaxe bedeutet, und für $cx = x$ und $xy = y$ ist $y^2 = R^2 - x^2$, und für $xz = z$ wird, wenn man $z = 0$

› es ist hier $y = xy = R$ für jeden Werth von x, folg-
wird

$$X = \frac{k}{3p}\int[R^3 - R^3 + 3R^2\sqrt{(R^2-x^2)} - 3R(R^2-x^2) +$$
$$(R^2-x^2)\sqrt{(R^2-x^2)}]\,dx = \frac{k}{3p}\int[-3R^3 + 3Rx^2 +$$
$$(4R^2-x^2)\sqrt{(R^2-x^2)}]\,dx$$

rnach ist

$$IX = \frac{k}{3p}(-3R^3x + Rx^3) + \frac{k}{3p}\int(4R^2-x^2)dx\sqrt{(R^2-x^2)}$$

ist aber $\int 4R^2dx\sqrt{(R^2-x^2)} = 4R^2\int dx\sqrt{(R^2-x^2)}$

$$-\int x^2dx\sqrt{(R^2-x^2)} = \frac{xV\sqrt{V}}{4} - \frac{R^2}{4}\int dx\sqrt{(R^2-x^2)}$$

daher

$$\int(R^2-x^2)dx\sqrt{(R^2-x^2)} = \frac{xV\sqrt{V}}{4} + \frac{15R^2}{4}\int dx\sqrt{(R^2-x^2)}$$
$$= \frac{xV\sqrt{V}}{4} + \frac{15R^2}{4}\left[\frac{x\sqrt{V}}{2} \quad \frac{R^2}{2}\operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{R}\right]$$

lich ist, wenn man diesen Werth setzt,

$$IX = \frac{k}{3p}(-3R^3x + Rx^3) +$$
$$\frac{k}{3p}\left[\frac{xV\sqrt{V}}{4} + \frac{15R^2x\sqrt{V}}{8} + \frac{15R^4}{8}\operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{R}\right] =$$
$$\left[-3R^3x + Rx^3 + (2V + 15R^2)\frac{x\sqrt{V}}{8} + \frac{15R^4}{8}\operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{R}\right]$$

weil $V = R^2 - x^2$, so wird

$$IX = \frac{k}{3p}\left[-3R^3x + Rx^3 + (17R^2 - 2x^2)\cdot\frac{x\sqrt{(R^2-x^2)}}{8}\right.$$
$$\left. + \frac{15R^4}{8}\operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{R}\right]$$

den Quadranten agc erhält man hieraus die relative Fe-
eit, wenn $x = R$ gesetzt wird. Dieselbe ist also durch die
chung bestimmt

$$IX = \frac{k}{3p}\left(-3R^4 + R^4 + \frac{15R^4}{8}\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)$$

weil hier $p = R$ wird, so ist

$$IX = \frac{k}{3}\left(-2R^3 + \frac{15R^3\pi}{16}\right) = \frac{kR^3(15\pi - 32)}{48}$$

ebene rexy gefunden werden, für einen bestimmten Werth von $cx = x < R$, so braucht man nur diesen Werth in dem erhaltenen allgemeinen Ausdruck zu substituiren. Für $x = a$ wird derselbe

$$IX = \frac{k(5R^2 - 2a^2)a}{24R}\sqrt{(R^2 - a^2)} + \frac{kR^3}{8}\operatorname{Arc\,sin}\frac{a}{R}$$

also für $a = \frac{1}{2}R$

$$IX = \frac{3kR^3}{32}\sqrt{\frac{3R^2}{4}} + \frac{kR^3}{8}\operatorname{Arc\,sin}\tfrac{1}{2}$$

$$= \frac{3kR^3}{64}\sqrt{3} + \frac{kR^3}{8}\cdot\tfrac{1}{6}\pi$$

$$= \frac{kR^3}{16}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = 0{,}13305 \times kR^3.$$

Zusatz 2. Will man die relative Festigkeit des Körpers bestimmen, von welchem der halbe Kreisabschnitt axy die Brechungsebene und ax die Drehungsaxe ist, so muß in dem erhaltenen Integral die Constante C' so bestimmt werden, daß der Ausdruck für $x = (cx)$ einen Werth $= 0$ erhält. Setzt man also $cx = a$, so muß, nach Zusatz 1.,

$$C' = -0{,}13305 \times kR^3 \text{ sein,}$$

und es ist nun hierdurch die gesuchte Festigkeit bestimmt.

Aufgabe 9. Die relative Festigkeit eines elastischen Körpers soll bestimmt werden, dessen Brechungsfläche ein Halbkreis ist, und von welcher die zu dem Durchmesser ab parallele Tangente $\alpha\beta$, Fig. 122, die Drehungsaxe bildet.

Auflösung. Für $gx = x$, $xz = z$ und den Radius des Kreises $= R$, ist $(yz) = R - z$, und daher

$$(R - z)^2 = R^2 - x^2, \text{ also } R - z = \sqrt{(R^2 - x^2)}$$

$$\text{und } z = R - \sqrt{(R^2 - x^2)}.$$

Da nun $IX = \frac{k}{p}\int[\int z^2 dz + C]\,dx + C'$, für $z = y$,

$$= \frac{k}{p}\int[\tfrac{1}{3}y^3 + C]\,dx + C'$$

und hier für $y = z$ der Ausdruck $= 0$ werden muß, so ist

$$\tfrac{1}{3}[R - \sqrt{(R^2 - x^2)}]^3 + C = 0$$

$$\text{also } C = -\tfrac{1}{3}[R - \sqrt{(R^2 - x^2)}]^3$$

$$\text{und daher } IX = \frac{k}{3p}\int[y^3 - (R - \sqrt{(R^2 - x^2)})^3]\,dx$$

und

und es ist hier $y = xy = R$ für jeden Werth von x, folglich wird

$$IX = \frac{k}{3p}\int[R^3 - R^3 + 3R^2\sqrt{(R^2-x^2)} - 3R(R^2-x^2) + (R^2-x^2)\sqrt{(R^2-x^2)}]\,dx = \frac{k}{3p}\int[-3R^2 + 3Rx^2 + (4R^2-x^2)\sqrt{(R^2-x^2)}]\,dx$$

Hiernach ist

$$IX = \frac{k}{3p}(-3R^2x + Rx^3) + \frac{k}{3p}\int(4R^2-x^2)\,dx\sqrt{(R^2-x^2)}$$

Es ist aber $\int 4R^2 dx\sqrt{(R^2-x^2)} = 4R^2\int dx\sqrt{(R^2-x^2)}$

$$-\int x^2 dx\sqrt{(R^2-x^2)} = \frac{xV\sqrt{V}}{4} - \frac{R^2}{4}\int dx\sqrt{(R^2-x^2)}$$

und daher

$$\int(4R^2-x^2)dx\sqrt{(R^2-x^2)} = \frac{xV\sqrt{V}}{4} + \frac{15R^2}{4}\int dx\sqrt{(R^2-x^2)}$$

$$= \frac{xV\sqrt{V}}{4} + \frac{15R^2}{4}\left[\frac{x\sqrt{V}}{2} \quad \frac{R^2}{2}\operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{R}\right]$$

folglich ist, wenn man diesen Werth setzt,

$$IX = \frac{k}{3p}(-3R^2x + Rx^3) + \frac{k}{3p}\left[\frac{xV\sqrt{V}}{4} + \frac{15R^2x\sqrt{V}}{8} + \frac{15R^4}{8}\operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{R}\right] = \frac{k}{3p}\left[-3R^2x + Rx^3 + (2V+15R^2)\frac{x\sqrt{V}}{8} + \frac{15R^4}{8}\operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{R}\right]$$

und weil $V = R^2 - x^2$, so wird

$$IX = \frac{k}{3p}\left[-3R^2x + Rx^3 + (17R^2 - 2x^2)\cdot\frac{x\sqrt{(R^2-x^2)}}{8} + \frac{15R^4}{8}\operatorname{Arc\,sin}\frac{x}{R}\right]$$

Für den Quadranten agc erhält man hieraus die relative Festigkeit, wenn $x = R$ gesetzt wird. Dieselbe ist also durch die Gleichung bestimmt

$$IX = \frac{k}{3p}\left(-3R^4 + R^4 + \frac{15R^4}{8}\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)$$

und weil hier $p = R$ wird, so ist

$$IX = \frac{k}{3}\left(-2R^3 + \frac{15R^3\pi}{16}\right) = \frac{kR^3(15\pi - 32)}{48}$$

Da nun hier $p = ge = 2R$, ſo wird, wenn man $x = R$ ſetzt, für die Brechungsfläche gae erhalten

$$IX = \frac{5kR^4}{8R} \operatorname{Arcsin} 1 = \frac{5kR^3}{8} \cdot \tfrac{1}{2}\pi = \frac{5kR^3\pi}{16}$$

Denſelben Ausdruck erhält man auch für die Fläche geb, und es iſt daher, wenn die ganze Kreisfläche gaeb die Brechungsebene und die Tangente $\alpha\beta$ die Drehungsaxe bildet,

$$< \frac{5kR^3\pi}{16}$$

und daher die relative

$$\frac{5kR^3\pi}{8l}.$$

Zuſatz. Die rel… …ſtigkeit ſolcher elaſtiſchen Körper, deren Brechungsebene …ze, halbe oder Viertelskreiſe ſind, verhalten ſich alſo zu einander, bei gleicher Lage ihrer Drehungsaxen, wie die dritten Potenzen ihrer Radien.

Aufgabe 12. Die Brechungsebene eines elaſtiſchen Körpers iſt ein Kreisring, ſo daß die denſelben begrenzenden beiden Kreislinien gaeb und g′a′e′b′, Fig. 125, einen gemeinſchaftlichen Mittelpunkt haben; es ſoll die relative Feſtigkeit des Körpers angegeben werden.

Auflöſung. Es ſei die Tangente $\alpha\beta$ des Punktes g die Drehungsaxe, und der Durchmeſſer ab parallel mit derſelben. Man ſetze $gx = x$, $xz = z$, $xy = y$ und $mz = my = v$, ferner $cg = R$ und $cg' = r$, ſo iſt

$$z = R - v,\quad y = R + v \text{ und } v = \sqrt{(r^2 - x^2)}.$$

Um nun die relative Feſtigkeit $= X''$ für die Brechungsebene g′a′e′b′ zu erhalten, muß man in dem Ausdrucke

$$lX'' = \frac{k}{p} \int [\tfrac{1}{3}y^3 + C]\, dx + C'$$

für $y = z$ erhalten $\frac{1}{3}y^3 + C = 0$. Es iſt alſo

$$C = -\tfrac{1}{3}y^3 = -\tfrac{1}{3}(R - v)^3$$

und daher, weil $C' = 0$ wird,

$$lX'' = \frac{k}{3p} \int (y^3 - (R - v)^3)\, dx$$

oder, da $y = R + v$,

$$IX'' = \frac{k}{3p}\int[(R+v)^3-(R-v)^3]\,dx$$

$$= \frac{k}{3p}\int(6R^2v+2v^3)\,dx = \frac{2k}{3p}\int(3R^2+v^2)\,v\,dx$$

a hier aber $v^2 = r^2 - x^2$ ist, so wird

$$IX'' = \frac{2k}{3p}\int(3R^2+r^2-x^2)\,dx\,V(r^2-x^2)$$

un ist, nach Aufgabe 8., für $(r^2-x^2) = V$,

$$3R^2+r^2)\,dx\,V(r^2-x^2) = 3(R^2+r^2)\int dx\,V V - \int x^2 dx\,V(r^2-x^2)$$

$$= \frac{x\,V\,V V}{4} - \frac{r^2}{4}\int dx\,V V$$

lglich wird $IX'' = \frac{2k}{3p}\left[\frac{x\,V\,V V}{4} + \left(3R^2+\frac{3r^2}{4}\right)\int dx\,V V\right]$

nd weil $\int dx\,V V = \int dx\,V(r^2-x^2) = \frac{x\,V V}{2} + \frac{r^2}{2}\,\text{Arc sin}\,\frac{x}{r}$

erhält man

$$IX'' = \frac{2k}{3p}\left[\frac{x\,V\,V V}{4} + \left(3R^2+\frac{3r^2}{4}\right)\frac{x\,V V}{2} + \right.$$

$$\left.R^2+\frac{3r^2}{4}\right)\frac{r^2}{2}\,\text{Arc sin}\,\frac{x}{r}\Big] = \frac{k}{3p}\left[\frac{x\,V V}{4}(2V+12R^2+3r^2) + \right.$$

$$\left.\frac{(12R^2+3r^2)\,r^2}{4}\,\text{Arc sin}\,\frac{x}{r}\right]$$

r $x = r$ erhält man hieraus den Ausdruck für den Fall, an der Halbkreis g'a'e' die Brechungsebene ist,

$$IX'' = \frac{k}{3p}\cdot\frac{(12R^2+3r^2)\,r^2}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\pi = \frac{k\,(4R^2+r^2)\,r^2\pi}{8p}$$

o ist für den ganzen Kreis g'a'e'b'

$$IX'' = \frac{k\,(4R^2+r^2)\,r^2\pi}{4p}$$

n so fern nun der Kreisring die Brechungsebene bildet, ist der höchste Punkt derselben, und daher $p = ge = 2R$, und wird alsdann

$$X'' = \frac{k\,(4R^2+r^2)\,r^2\pi}{8Rl}$$

ie relative Festigkeit X' für die ganze Kreisfläche aegb ist ach Aufgabe 11.

$$X' = \frac{5\,kR^3\pi}{8l}$$

Da nun hier $p = ge = 2R$, ſo wird, wenn man $x = R$ ſetzt, für die Brechungsfläche gae erhalten

$$IX = \frac{5kR^4}{8R} \operatorname{Arcsin} 1 = \frac{5kR^3}{8} \cdot \tfrac{1}{2}\pi = \frac{5kR^3\pi}{16}$$

Denſelben Ausdruck erhält man auch für die Fläche geb, und es iſt daher, wenn die ganze Kreisfläche gaeb die Brechungsebene und die Tangente $\alpha\beta$ die Drehungsaxe bildet,

$$IX = 2 \times \frac{5kR^3\pi}{16}$$

und daher die relative Feſtigkeit

$$X = \frac{5kR^3\pi}{8l}.$$

Zuſatz. Die relative Feſtigkeit ſolcher elaſtiſchen Körper, deren Brechungsebene ganze, halbe oder Viertelskreiſe ſind, verhalten ſich alſo zu einander, bei gleicher Lage ihrer Drehungsaxen, wie die dritten Potenzen ihrer Radien.

Aufgabe 12. Die Brechungsebene eines elaſtiſchen Körpers iſt ein Kreisring, ſo daß die denſelben begrenzenden beiden Kreislinien gaeb und g′a′e′b′, Fig. 125, einen gemeinſchaftlichen Mittelpunkt haben; es ſoll die relative Feſtigkeit des Körpers angegeben werden.

Auflöſung. Es ſei die Tangente $\alpha\beta$ des Punktes g die Drehungsaxe, und der Durchmeſſer ab parallel mit derſelben. Man ſetze $gx = x$, $xz = z$, $xy = y$ und $mz = my = v$, ferner $cg = R$ und $cg' = r$, ſo iſt

$$z = R - v,\ y = R + v \text{ und } v = \sqrt{(r^2 - x^2)}.$$

Um nun die relative Feſtigkeit $= X''$ für die Brechungsebene g′a′e′b′ zu erhalten, muß man in dem Ausdrucke

$$IX'' = \frac{k}{p} \int [\tfrac{1}{3}y^3 + C]\, dx + C'$$

für $y = z$ erhalten $\frac{1}{3}y^3 + C = 0$. Es iſt alſo

$$C = -\tfrac{1}{3}y^3 = -\tfrac{1}{3}(R - v)^3$$

und daher, weil $C' = 0$ wird,

$$IX'' = \frac{k}{3p} \int (y^3 - (R - v)^3)\, dx$$

oder, da $y = R + v$,

I hieraus die Formel der relativen Festigkeit für den Theil
s Körpers angegeben werden, von welchem dieses Dreieck
r Brechungsebene ist.

§. 69.

Die Lage der Brechungsbene.

Nimmt man allgemein an, daß der Körper, dessen rela-
e Festigkeit bestimmt werden soll, bloß an dem einen Ende
einer vertikalen Wand befestigt ist, und daß er eine horizontale
ge hat, und ist die zu dem Zerbrechen desselben erforderliche
aft an dem andern Ende angebracht, so läßt sich nur noch
Frage aufwerfen: an welcher Stelle des Körpers wird der
uch erfolgen? Daß die von dem Körper durchbrochene
elle der Wand, in welcher er befestigt ist, selbst die Bre-
ngsebene bildet, ist nur bei prismatischen Körpern unter al-
Umständen der Fall, also bei solchen Körpern, wo alle pa-
lelen Querschnitte gleich groß sind, da diese, weil sie, wenn
e Schwere unberücksichtigt bleibt, an allen Stellen gleichen
derstand leisten, für die am entferntesten von dem Angriffs-
nkte der Kraft liegende Fläche das größte Moment geben.
nd aber bei einem Körper nicht alle Querschnitte gleich groß,
bietet der kleinste Querschnitt den geringsten Widerstand dar,
o bei dem Zerreißen erfolgt daher auch an dieser Stelle
Trennung der Theile. Daß aber auch das Zerbrechen
dieser Stelle erfolgen müsse, ist keinesweges in allen Fäl-
nothwendig, da hierbei außer der Größe der Brechungs-
ne auch noch der Abstand derselben von dem Angriffspunkte
Kraft berücksichtigt werden muß. Giebt es daher in dem
rper eine entfernter liegende Stelle, deren Widerstand zwar
ßer ist, wo dieser aber doch nicht den kleinsten Widerstand
soviel übersteigt, um wieviel die Entfernung derselben die der
tern übertrifft, so wird bei dieser entfernteren Stelle auch
e kleinere Kraft zu dem Zerbrechen erfordert, als an der
elle des kleinsten Widerstandes.

Es sei das Moment des Widerstandes zweier Brechungs-
nen = V' und V'', ihre Abstände von dem Angriffspunkte
Kraft = v' und v'', und die zu dem Zerbrechen erforder-

und es iſt dieſelbe daher für den Kreisring

$$X = X' - X'' = \frac{5kR^3\pi}{8l} - \frac{k(4R^2+r^2)r^2\pi}{8Rl}$$

$$= \frac{k\pi}{8Rl}[5R^4 - 4R^2r^2 - r^4]$$

$$= \frac{k\pi}{8Rl}(5R^2+r^2)(R^2-r^2)$$

$$= \frac{k\pi}{8Rl}(5R^2+r^2)(R+r)(R-r).$$

Zuſatz. Hier zeigt ſich ebenfalls der Unterſchied zwiſchen den beiden Fällen, wenn eine Brechungsebene für ſich gegeben iſt, oder als Theil einer andern. Der in der letzten Aufgabe für die Kreisfläche g'a'e'b' und die Drehungsaxe $\alpha\beta$ erhaltene Ausdruck iſt ganz allgemein

$$IX'' = \frac{k(4R^2+r^2)r^2\pi}{4p}$$

Wird nun dieſe Fläche für ſich betrachtet, ſo iſt e' der höchſte Punkt über $\alpha\beta$, und daher $p = (ge') = R + r$, ſobald man die Fläche aber als einen Theil von agbe anſieht, wird e der höchſte Punkt, und alſo $p = (ge) = 2R$.

Aufgabe 13. Die Brechungsebene iſt ein Kreis gaeb, Fig. 124; es ſoll angegeben werden, wie ſich die den beiden Halbkreiſen agb und aeb entſprechenden Widerſtände zu einander verhalten, in ſo fern beide zu derſelben Brechungsebene gehören.

Aufgabe 14. Die relative Feſtigkeit des Körpers ſoll beſtimmt werden, von welchem die Brechungsebene aus einem Rechteck mit einem über demſelben befindlichen Halbkreiſe beſteht, wo dieſe Fläche alſo $\alpha\beta$bea, Fig. 124, iſt.

Aufgabe 15. Wie groß iſt die relative Feſtigkeit eines halben Kreisringes, wenn der Durchmeſſer ab, Fig. 125, die Drehungsaxe iſt, und alſo die Brechungsfläche aebb'e'a', und wie groß iſt dieſelbe, wenn die Tangente $\alpha\beta$ die Drehungsaxe bildet, und alſo agbβ'g'a' die Brechungsebene iſt?

Aufgabe 16. Ein Theil einer Brechungsebene iſt ein Dreieck dce, Fig. 120, deſſen Größe und Lage dadurch beſtimmt iſt, daß für die Drehungsaxe als Abſciſſenlinie die Lage der drei Spitzen deſſelben durch Coordinaten gegeben iſt; es

r zu bestimmen, also die Entfernung von dem Angriffs-
e, in welchem der Bruch erfolgt.

Da hier v den Abstand der Brechungsebene von dem
iffspunkte der Kraft bedeutet, so versteht es sich von
, daß für v weder ein negativer Werth, noch ein Werth
zulässig ist, wenn l die Länge des Körpers von dem An-
spunkte der Kraft bis an die Wand, in welcher derselbe
iget ist, bedeutet. Erhält man für v einen Werth > l,
ßt sich daraus immer folgern, daß die Brechungsebene
iegt, wo der Körper die Wand durchbricht.

$$\text{Für } X' = \frac{V'}{v'} \text{ und } X'' = \frac{V''}{v''}$$

gt der Bruch in der Entfernung v', wenn $X' < X''$ für
beliebigen Werth von v''. Findet man aber für jeden
bigen Werth von v''

$$X' = X''$$

nn der Bruch an jeder Stelle stattfinden, und es ist so-
alsdann der Körper ein solcher von gleichem Wider-
de, dessen Form sich also durch die Gleichung

$$\frac{V'}{v'} = \frac{V''}{v''}$$

durch die Proportion

$$v' : v'' = V' : V''$$

nmen lassen muß.

Soll zugleich das Gewicht des Körpers selbst mit be-
chtigt werden, so wird, wenn man das Moment des ab-
chenen Theils = W setzt, dadurch das Moment der
X vermehrt, und man erhält also, wenn das Moment
Widerstandes = V ist, die Gleichung

$$vX + W = V$$

$$\text{also } X = \frac{V - W}{v}$$

es wird hieraus die Brechungsebene gefunden, wenn man
Werth von v ermittelt, durch welchen X ein Minimum
man findet dieselbe also aus der Gleichung

$$d\left(\frac{V - W}{v}\right) = 0$$

lichen Kräfte X' und X'', ſo geben dieſe Größen die Gleichungen

$$v'X' = V' \text{ und } v''X'' = V''$$

und es iſt daher $X' = \frac{V'}{v'}$ und $X'' = \frac{V''}{v''}$

Iſt nun $V' < V''$, und auch $v' < v''$, ſo kann doch

$$\frac{V'}{v'} > \frac{V''}{v''}, \text{ alſo } X' > X''$$

werden, und der Bruch erfolgt alsdann für die kleinere Kraft X'' in der Fläche des größern Widerſtandes V''. Iſt alſo ganz allgemein

$$X = \frac{V}{v}$$

die zu dem Zerbrechen des Körpers erforderliche Kraft, und ſoll hieraus die Lage der Brechungsebene beſtimmt werden, ſo kommt es bloß darauf an, den Werth von v zu ermitteln, für welchen $\frac{V}{v}$ ein Minimum wird, und dieſer Werth, falls es einen ſolchen giebt, muß ſich, wie aus der Analyſis bekannt, aus der Gleichung finden laſſen

$$d\left(\frac{V}{v}\right) = 0.$$

Man muß daher, um dieſen Werth kennen zu lernen, V als eine Function von v ausdrücken, wo hier die veränderliche Größe v ſtatt l in der Formel §. 67. ſteht. Die Formel war dort

$$lX = \frac{k}{3p} \int [y^3 + C]\, dx + C'$$

und es wird daher hier

$$X = \frac{k}{3p} \cdot \frac{\int (y^3 + C)\, dx + C'}{v}$$

und die Brechungsſtelle wird gefunden aus der Gleichung

$$d\left[\frac{\int (y^3 + C)\, dx + C'}{v}\right] = 0$$

Da nun die Abhängigkeit der veränderlichen Größen x und y von einander ohnehin als bekannt vorausgeſetzt wird, ſo kommt es nur noch darauf an, auch die von v und y oder von v und x zu kennen, um mit Hülfe dieſer Gleichung den Werth

$$X = \frac{kp^2}{3l}\left[A - a + \frac{al}{v}\right]$$

n constanten Werth für X geben, so muß $\frac{al}{v} = 0$ sein,

dieses ist der Fall, wenn man $a = 0$ annimmt, wenn also Grundfläche des Körpers ein Dreieck ist. Jedes dreiseitige sma ist mithin ein Körper von überall gleichem Widerstande, n auf das Gewicht desselben nicht Rücksicht genommen d, und es eine solche Lage hat, daß die Grundfläche zu- ch die untere Fläche bildet, so daß die Brechungsebene ein chteck wird.

Zusatz 2. Soll auch das Gewicht des abgebrochenen eils des Körpers berücksichtigt werden, so muß man das oment des Prisma mit in Rechnung bringen, welches u zur Grundfläche hat. Es ist aber, wenn $vz = z$ der stand des Schwerpunktes der Grundfläche vu ist,

$$z = \frac{v(x + 2a)}{3(a + x)}$$

das Gewicht des Körpers ist, wenn das Gewicht der Ku- inheit $= w$ gesetzt wird, $= \frac{v(a + x)p}{2} \cdot w$, also das oment

$$W = \frac{v^2(x + 2a)pw}{6}$$

es kommt nun darauf an, den Werth von v in der Glei- ng

$$vX + W = \frac{kxp^2}{3}$$

bestimmen, so daß X ein Minimum wird.

Aufgabe 2. Ein normaler prismatischer Körper, dessen ndflächen Paralleltrapeze sind, hat eine solche Lage, daß Grundflächen die Seitenflächen bilden, und daher $agca$, . 126, ein vertikaler Querschnitt ist; es soll die Lage der chungsebene desselben bestimmt werden.

Auflösung. Hier ist $cg = l$ die Länge des Körpers, c Angriffspunkt der Kraft, g der Punkt, in welchem er be- igt ist, $g\alpha = A$ und $ca = a$ sind die Höhen, die Grund- he für die angenommene Lage des Körpers ist ein Rechteck,

deſſen Grundlinie = g geſetzt werden kann, und eben ſo ſ
auch alle Querſchnitte Rechtecke. Wird alſo cv = v
vu = x geſetzt, und ſoll v ein Punkt der Drehungsaxe ſ
ſo iſt das Moment des Widerſtandes

$$V = \frac{kgx^3}{3}$$

und daher die Gleichung $vX = \frac{kgx^3}{3}$

wo ebenfalls, wie bei igen Aufgabe, $x = \frac{(A-a)v}{l}$
iſt. Hiernach wir

$$vX = \frac{kg}{3l} \quad -a \quad +al)^2$$

$$= \frac{kg}{3l}((A- \quad ^2 + 2al(A-a)v + a^2l^2)$$

und es iſt ſonach

$$X = \frac{kg}{3l}\left((A-a)^2 v + 2al(A-a) + \frac{a^2l^2}{v}\right)$$

Der Werth von X iſt alſo bloß durch den Ausdruck (A−
$+ \frac{a^2l^2}{v}$ veränderlich, und er wird ein Minimum, wenn
Ausdruck den kleinſten Werth erhält, alſo für den Werth
v, welcher ſich aus der Gleichung ergiebt

$$d\left[(A-a)^2 v + \frac{a^2l^2}{v}\right] = 0$$

wenn für dieſen Werth von v nicht X ein Maximum wird.
Gleichung giebt

$$(A-a)^2 dv - \frac{a^2l^2}{v^2} dv = 0$$

und daher $v^2 = \frac{a^2l^2}{(A-a^2)}$, alſo $v = \frac{al}{A-a}$

und es wird, wie leicht zu erkennen iſt, der Ausdruck für
ſen Werth von v allerdings ein Minimum. Hierdurch iſt
die Lage der Brechungsebene beſtimmt, und man
wenn dieſer Werth für v geſetzt wird, als Minimum
Kraft

$$= \frac{kg}{3l}\left[(A-a)^2 \cdot \frac{al}{A-a} + 2al(A-a) + a^2l^2 \cdot \frac{(A-a)}{al}\right]$$

$$= \frac{kg}{3}[(A-a)a + 2a(A-a) + a(A-a)]$$

$$= \frac{4kg}{3}a(A-a).$$

Zusatz 1. Aus der Gleichung $v = \frac{al}{A-a}$ folgt

$v = l$ für $A - a = a$, also für $A = 2a$
$v > l$ " $A - a < a$, " $A < 2a$
und $v < l$ " $A - a > a$, " $A > 2a$

rechnungsebene fällt also nur alsdann zwischen c und g, $A = (g\alpha)$ größer ist als $2a = 2(ca)$.

Zusatz 2. Soll auf das Gewicht des Körpers Rücksicht men werden, so muß, wie in Zusatz 2. der vorigen Auf= das Moment

$$W = \frac{v^2(x+2a)gw}{6}$$

Rechnung gebracht werden, und die Gleichung wird

$$vX = \frac{kgx^2}{3} - \frac{v^2(x+2a)gw}{6}$$

$$\text{also } X = \frac{kg}{3} \cdot \frac{x^2}{v} - \frac{gw}{6} \cdot v(x+2a)$$

n $x = \frac{(A-a)v}{l} + a$ gesetzt werden muß.

Zusatz 3. Ohne Rücksicht auf das Gewicht des Kör= ßt sich der Werth von v, für welchen X ein Minimum uch auf folgende Art bestimmen: Da der Werth von

dem Ausdrucke $(A-a)^2v + \frac{a^2l^2}{v}$ abhängt, so kommt darauf an, den Werth von v zu suchen, durch welchen Ausdruck den kleinsten Werth erhält. Setzt man nun

$$(A-a)^2v + \frac{a^2l^2}{v} = Z$$

so wird $v^2 - \frac{Z}{(A-a)^2}v = -\frac{a^2l^2}{(A-a)^2}$

raus erhält man

$$v = \frac{Z}{2(A-a)^2} \pm \sqrt{\left[\frac{Z^2}{4(A-a)^4} - \frac{a^2l^2}{(A-a)^2}\right]}$$
$$= \frac{Z \pm \sqrt{[Z^2 - 4a^2l^2(A-a)^2]}}{2(A-a)^2}$$

Hier ist nun der kleinste Werth, welchen Z erhalten kann, wenn v nicht imaginair werden soll, durch die Gleichung bestimmt

$$Z^2 = 4a^2l^2(A-a)^2, \text{ also } Z = 2al(A-a)$$

und es wird daher für [illegible] Werth von Z

$$v = \frac{Z}{2(A-a)} \quad [illegible] \frac{al(A-a)}{[illegible](A-a)^2} = \frac{al}{A-a}.$$

Aufgabe 3. [illegible] 126, gc = l die Länge eines Körpers, αgca [illegible] er Schnitt desselben, und alle normalen Querschnitte sind [illegible] iecke mit gleichen Grundlinien aber von verschiedener Höh[illegible] vu, gα ꝛc.; es sollen die Eigenschaften der Linie auα angegeben werden, wenn der Körper in allen Punkten gleichen Widerstand leisten soll.

Auflösung. Setzt man die gemeinschaftliche Grundlinie aller Querschnitte = g, die zu der Abscisse cv = v gehörige Ordinate vu = y, so ist das Moment des Widerstandes, wenn v einen Punkt der Drehungsaxe bildet, $= \frac{kgy^2}{12p}$ und das Moment der zu dem Zerbrechen des Körpers erforderlichen Kraft X′ ist also

$$vX' = \frac{kgy^2}{12}$$

Gehört nun zu einer andern Abscisse cz = z eine Ordinate = Y, so ist, wenn hier die Kraft X″ bezeichnet wird,

$$zX'' = \frac{kgY^2}{12}$$

Soll nun der Körper in allen Punkten einen gleichen Widerstand leisten, so muß X′ = X″ sein,

$$\text{also auch } \frac{kgy^2}{12v} = \frac{kgY^2}{12z}$$
$$\text{und daher } \frac{y^2}{v} = \frac{Y^2}{z}$$

es muß also $v : z = y^2 : Y^2$ sein,

Abscissen müssen sich also verhalten, wie die Quadrate der
dinaten, woraus hervorgeht, daß die Linie aucα eine Para-
sein muß, von welcher c der Scheitel ist, und es muß da-
auch ca = 0 sein, also c mit a zusammenfallen.

Zusatz. Wenn, wie hier vorausgesetzt wird, die Quer-
itte des Körpers Dreiecke sind, so hat derselbe, da die
ndfläche ein Rechteck sein soll, zwei gekrümmte Seitenflä-
. Das obige Resultat gilt aber auch noch in dem Falle,
n alle Querschnitte Rechtecke sind, indem alsdann

$$vX' = \frac{kgy^2}{3} \text{ und } zX'' = \frac{kgY^2}{3} \text{ wird.}$$

dieser Voraussetzung werden die beiden Seitenflächen ebene
ren, die oben von einer Parabel begrenzt sind, und die
e Fläche ist jetzt parabolisch gekrümmt.

Aufgabe 4. Es ist gαac, Fig. 126, die eine Seiten-
e einer parallel zur Grundfläche abgestumpften dreiseitigen
amide, die so an ihrer Basis in einer vertikalen Wand be-
t ist, daß gαac die untere Fläche bildet; es soll die Lage
Brechungsebene derselben bestimmt werden.

Auflösung. Alle normalen Querschnitte sind hier Drei-
und man setze αg = A, ac = a, die Höhe des Dreiecks,
welchem αg die Grundlinie ist, = p, und die Höhe des
ecks, welches ac zur Grundlinie hat, = q; außerdem sei
= l, cv = v, vu = x, und die Höhe des Dreiecks, von
hem vu die Grundlinie bildet, = y. Soll nun vu die
hungsaxe der Brechungsebene sein, so ist die Gleichung

$$vX = \frac{kxy^2}{12}$$

ist aber $l : v = A - a : x - a$, also $x = \frac{(A-a)v}{l} + a$

und $A : p = x : y$, also $y = \frac{px}{A}$,

ch ist auch

$$vX = \frac{k}{12} \cdot x \left(\frac{px}{A}\right)^2 = \frac{kp^2}{12A^2} \cdot x^3$$

und daher $vX = \frac{kp^2}{12A^2} \cdot \left(\frac{(A-a)v + al}{l}\right)^3$

folglich iſt $X = \frac{kp^3}{12A^2l^3} \cdot \frac{((A-a)v+al)^3}{v}$

und man lernt den Werth von v kennen, durch welchen X ein Maximum oder Minimum iſt, durch die Gleichung

$$d\left[\frac{((A-a)v+al)^3}{v}\right] = 0$$

hieraus erhält man

$v \cdot 3((A-a)v+al)^2(A-a)\,dv - ((A-a)v+al)^3 dv = 0$

und es iſt daher auch

$((A-a)v+al)^2 \cdot [3(A-a)v - ((A-a)v+al)] = 0$

oder $((A-a)v+al)^2(2(A-a)v-al) = 0$

Setzt man hier den erſten Factor = 0, alſo

$((A-a)v+al)^2 = 0$, ſo wird $v = -\frac{al}{A-a}$

negativ, weil $A > a$ iſt, und es führt dieſes alſo zu keinem brauchbaren Werthe von v. Wird aber der zweite Factor = 0 geſetzt, ſo erhält man

$$2(A-a)v - al = 0$$

woraus erhalten wird $v = \frac{al}{2(A-a)}$

für welchen Werth X ein Minimum wird.

Soll aber die Brechungsebene zwiſchen c und g liegen, ſo muß $v < 1$ werden, es muß alſo

$a < 2(A-a)$, alſo $3a < 2A$ und $a < \frac{2}{3}A$

oder, was daſſelbe iſt, es muß $A > \frac{3}{2}a$ ſein. Setzt man nun z. B. $A = 2a$, ſo wird $v = \frac{1}{2}l$, und es liegt alsdann die Brechungsebene in der Mitte der abgeſtumpften Pyramide.

Zuſatz. Die erforderliche Kraft für $v = \frac{al}{2(A-a)}$ wird

$$X = \frac{ykp^2(A-a)a^2}{16A^2l}$$

Für $A = 2a$ iſt dieſelbe alſo $X = \frac{ykp^2a}{64l}$.

Aufgabe 5. Die Gleichung für die Curve ſoll angegeben werden, welche die Eigenſchaft hat, daß der durch ſie erzeugte Körper in allen Punkten gleichen Widerſtand leiſtet.

Auflöſung. Iſt agca die Fläche, durch welche ein Körper von gleichem Widerſtande erzeugt wird, alſo aua die Curve,

für

:x welche die Gleichung gefunden werden soll, und man setzt
= 1 und gα = R, so ist, in einer Entfernung eg = l
n dem Angriffspunkte der Kraft, die Brechungsebene ein Kreis
it dem Radius = R, und es ist daher, nach §. 68. Auf-
be 11.,

$$X' = \frac{5kR^3\pi}{8l}$$

Gen so ist für cv = x und vu = y die Brechungsebene
x Kreis, dessen Radius = y, und es ist daher

$$X'' = \frac{5ky^3\pi}{8x}$$

: zu dem Brechen erforderliche Kraft, wenn v ein Punkt
r Drehungsaxe ist. Soll nun der Körper in allen Punkten
ichen Widerstand leisten, so muß für jeden Werth von x
' = X' sein, also

$$\frac{5ky^3\pi}{8x} = \frac{5kR^3\pi}{8l}$$

und daher auch $\frac{y^3}{x} = \frac{R^3}{l}$, also $y^3 = \frac{R^3}{l} \cdot x$

Die Gleichung für die Curve ist also $y = \sqrt[3]{\frac{R^3}{l} \cdot x}$

d es ist die Curve daher eine kubische Parabel.

Aufgabe 6. Es soll die Lage der Brechungsebene für
e zum Theil eingemauerte Kugel angegeben werden.

Auflösung. Ist der Radius der Kugel = R, g der
griffspunkt der Kraft (Fig. 124), und man setzt gv=x und
= y, so ist

$$y^2 = x(2R - x) = (2Rx - x^2)$$

d daher ist, wenn die Fläche, zu welcher y als Radius ge-
t, die Brechungsebene sein soll,

$$xX = \frac{5ky^3\pi}{8}$$

wird also $X = \frac{5k\pi}{8} \cdot \frac{y^3}{x} = \frac{5k\pi}{8} \cdot \frac{(2Rx-x^2)\sqrt{(2Rx-x^2)}}{x}$

$$= \frac{5k\pi}{8} \cdot (2R - x)\sqrt{(2Rx - x^2)} = \frac{5k\pi}{8} \cdot V$$

Hiernach muß nun $dV = 0$ ſein, wenn der zu der geſuchten Brechungsebene gehörige Werth von x gefunden werden ſoll. Es iſt alſo

$$dV = d(2R-x)\sqrt{x(2R-x)} = d\sqrt{x(2R-x)^3} = \frac{d[x(2R-x)^3]}{2\sqrt{x(2R-x)^3}} = 0$$

und daher auch

$$(2R-x)^3\,dx + x\cdot 3(2R-x)^2\,d(2R-x) = 0$$

oder $(2R-$ $2R-x)^2\cdot 3x = 0$

hieraus folgt nu $-x)^2(2R-4x) = 0$

Es muß alſo entweder

$2R-x$ alſo $x = 2R$

oder $2R-$ 0, alſo $x = \frac{1}{2}R$ ſein.

Der erſte Werth iſt hie brauchbar, weil die Kugel zum Theil eingemauert ſein n d daher $l < 2R$ iſt. Aus dem zweiten Werthe aber geht hervor, daß eine Brechungsebene in einer Entfernung $= \frac{1}{2}R$ von dem Scheitel der Kugel liegen kann, und es iſt der entſprechende Werth von

$$X = \frac{5k\pi}{8}(2R-\tfrac{1}{2}R)\sqrt{\left(R^2-\frac{R^2}{4}\right)} = \frac{5k\pi}{8}\cdot\frac{3R^2}{4}\sqrt{3}$$

$$= \frac{15k\pi R^2\sqrt{3}}{32}.$$

Bei einer genauern Unterſuchung findet man aber, daß $x=\frac{1}{2}R$ für X ein Maximum, nicht aber ein Minimum giebt.

Anmerkung. Wird $dX = 0$ geſetzt, hieraus der Werth von x geſucht, und dieſer in dem Ausdrucke, welchen man für $\frac{d^2X}{(dx)^2}$ erhält, ſtatt x geſetzt, ſo läßt ſich aus dem Werthe, welchen hierdurch $\frac{d^2X}{(dx)^2}$ erhält, erkennen, ob der gefundene Werth von x für X ein Maximum oder ein Minimum giebt. Das erſtere iſt der Fall, wenn der entſprechende Werth von X negativ, und das letztere, wenn er poſitiv iſt. Nach der obigen Aufgabe iſt z. B.

$$\frac{dV}{dx} = \frac{(2R-x)^2\,(2R-4x)}{2\sqrt{x(2R-x)^3}} = \frac{(2R-x)\,(R-2x)}{\sqrt{(2Rx-x^2)}}$$

und hieraus erhält man

$$\frac{d^2V}{(dx)^2} = \frac{\sqrt{(2Rx-x^2)}\cdot d(2R^2-5Rx+2x^2)-(2R-x)(R-2x)d\sqrt{(2Rx-x^2)}}{(2Rx-x^2)\,dx}$$

$$= \frac{(-5R+4x)\,dx\sqrt{(2Rx-x^2)}-(2R-x)(R-2x)d\sqrt{(2Rx-x^2)}}{(2Rx-x^2)\,dx}$$

nd dieses giebt für $x = \frac{1}{2}R$

$$\frac{d^2V}{(dx)^2} = \frac{-3R\sqrt{\frac{3R^2}{4}}}{\frac{3R^2}{4}} = -2\sqrt{3}$$

was negatives, und es ist daher, für $x = \frac{1}{2}R$, der hier- rch für V erhaltene Werth ein Maximum.

Aufgabe 7. Die Lage der Brechungsebene eines zur undfläche parallel abgestumpften Paraboloid soll angegeben rden.

Auflösung. Ist mdbn, Fig. 109, die den abgestumpf- Körper erzeugende Fläche, und man setzt am = m, md = l, = a und db = A, so ist

$m : m+l = a^2 : A^2$, und daher $m = \frac{la^2}{A^2-a^2}$ bekannt.

ner ist, wenn x ein Punkt der Brechungsebene sein soll, man setzt mx = x, xy = y,

$$m : m+x = a^2 : y^2, \text{ also } y^2 = \frac{a^2(m+x)}{m}$$

Brechungsebene ist hier ein Kreis, und daher, nach §. 68. gabe 11.,

$$xX = \frac{5ky^3\pi}{8}$$

hier $xX = \frac{5k\pi}{8}\cdot\sqrt{\left(\frac{a^6(m-x)^3}{m^3}\right)} = \frac{5ka^3\pi}{8m\sqrt{m}}\cdot\sqrt{(m+x)^3}$

$$\text{folglich ist } X = \frac{5ka^3\pi}{8m\sqrt{m}}\cdot\frac{(m+x)^{\frac{3}{2}}}{x}$$

veränderliche Theil ist also $V = \frac{(m+x)^{\frac{3}{2}}}{x}$, und daher

$$\frac{dV}{dx} = \frac{x\cdot\frac{3}{2}(m+x)^{\frac{1}{2}}-(m+x)^{\frac{3}{2}}}{x^2} = 0$$

es wird sonach

$$\frac{\left(\frac{3x}{2}-(m+x)\right)V(m+x)}{x^2}=0$$

woraus folgt $\frac{3x}{2}=m+x$ und $x=2m$.

Ob dieſes zu einem Minimum oder Maximum führt, läßt ſich nun auf folgende Art erkennen:

Da $\frac{dV}{dx}=\frac{(x-2m)\,V(m+x)}{x^2}$, ſo iſt auch

$$\frac{dV}{dx}=(x^{-1}-2mx^{-2})\,V(m+x)$$

alſo $\frac{d^2V}{(dx)^2}=(-x^{-2}+4mx^{-3})\,V(m+x)+\frac{x^{-1}-2mx^{-2}}{2V(m+x)}$

$$=\left(\frac{4m-x}{x^3}\right)V(m+x)+\frac{x-2m}{2x^2V(m+x)}$$

$$=\frac{2(4m-x)(m+x)+x(x-2m)}{2x^3V(m+x)}$$

was für $x=2m$ einen poſitiven Werth giebt, und man erhält daher für X ein Minimum, wenn $x=2m$ geſetzt wird. Da übrigens

$$X=\frac{5ka^3\pi}{8mVm}\cdot\frac{(m+x)^{\frac{3}{2}}}{x}$$

ſo wird die kleinſte Kraft

$$X=\frac{5ka^3\pi}{8mVm}\cdot\frac{3mV3m}{2m}=\frac{5ka^3\pi}{16m}\cdot 3V3$$

und weil $m=\frac{la^2}{A^2-a^2}$, ſo wird

$$X=\frac{15ka\,(A^2-a^2)\pi V3}{16l}$$

Aufgabe 8. Es ſoll die Lage der Brechungsebene eines Paraboloid angegeben werden, wenn das Gewicht des Körpers mit berückſichtiget wird.

Auflöſung. Für $ax=x$ und $xy=y$ iſt der Kubikinhalt des durch axy erzeugten paraboliſchen Kegels $P=\frac{1}{4}xy^2\pi$, und der Abſtand des Schwerpunkts von a iſt $=\frac{2}{3}x$. Soll alſo x ein Punkt der Brechungsebene ſein, ſo muß die Gleichung ſtattfinden

$$xX + \tfrac{2}{3}x \cdot P = \frac{5ky^3\pi}{8}$$

nd es ist daher

$$X = \frac{5k\pi}{8} \cdot \frac{y^3}{x} - \tfrac{2}{3}P = \frac{5k\pi}{8} \cdot \frac{y^3}{x} - \tfrac{1}{3}xy^2\pi$$

Wird nun der Parameter der Curve mit p bezeichnet, so ist

$= px$ und $y = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, und es ist daher auch

$$X = \frac{5k\pi}{8} \cdot p^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{3}px^2\pi = \frac{p\pi}{8}\left[5kp^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \tfrac{8}{3}x^2\right]$$

o also $5kp^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{8}{3}x^2$ der veränderliche Theil $= v$ ist, und

rd

$$dV = d\left[5kp^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \tfrac{8}{3}x^2\right] = 0$$

esetzt, so erhält man

$$\tfrac{5}{2} \cdot \frac{kp^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} - 16x = 0$$

ernach ist auch $\frac{25k^2p}{4x} = \frac{256}{9}x^2$

$$\text{also } \frac{225k^2p}{1024} = x^3 \text{ und } x = \frac{\sqrt[3]{900k^2p}}{16}$$

ist nun leicht zu untersuchen, ob X für diesen Werth von ein Maximum oder ein Minimum wird.

§. 71.

och einige, die Festigkeit der Körper betreffende Aufgaben und Uebungen.

1. Wenn ein Körper in einer horizontalen Wand befe=t ist, so daß er senkrecht herabhängt, und man bringt eine längliche Menge von Gewichten an das Ende desselben, wird er dadurch endlich zerrissen, und zwar an der chsten Stelle, wenn alle Querschnitte des Körpers gleich ß sind; weil an dieser Stelle, durch das hinzukommende wicht des Körpers, die Last am größten wird. Dieses führt der Aufgabe: welche Form muß der Körper haben, damit an allen Stellen gleiche Festigkeit erhalte?

Auflösung. Es sei $agca$, Fig. 126, ein Durchschnitt des rpers, ac eine Durchschnittslinie der untersten Fläche $= F$,

an welcher die zum Zerreißen erforderliche Kraft = Q angebracht ist, vu eine Durchschnittslinie der Fläche X des Körpers in der Entfernung cv = x von F, und das Gewicht des Körpers, von welchem acvu ein Durchschnitt ist, sei = V; so muß, wenn der Körper an der Stelle v reißen soll, die Fläche X einen Widerstand = Q + V leisten, und soll hier die Festigkeit dieselbe sein wie bei der untersten Stelle F, so muß, weil die absolute Festigkeit der Brechungsebene proportionirt ist, die Proportion stattfinden

$$F : X = Q : Q + V$$

$$\text{woraus folgt } V = \frac{QX}{F} - Q$$

$$\text{und es ist daher } dV = \frac{Q}{F} \cdot dX$$

Es ist aber auch $dV = Xdx$, also $Xdx = \frac{Q}{F} dX$, und daher

$$\frac{dX}{X} = \frac{F}{Q} \cdot dx$$

$$\text{folglich wird } \int \frac{dX}{X} = \frac{F}{Q} x + C$$

$$\text{also } \log X = \frac{F}{Q} x + C$$

und weil, für $x = 0$, $X = F$ sein muß, so ist $C = \log F$, und sonach

$$\log X = \frac{F}{Q} x + \log F$$

$$\text{und endlich } \log \frac{X}{F} = \frac{F}{Q} x$$

Die Flächen müssen also in der Art zunehmen, daß sie die natürlichen Logarithmen der Abscissen sind. Nimmt man nun an, daß der Körper durchgehends eine gleiche Breite = g habe, und wird die Länge der Fläche F = h und die von X = y gesetzt, so ist

$$F = gh \text{ und } X = gy$$

$$\text{also wird alsdann } \log \frac{y}{h} = \frac{F}{Q} x$$

und daher, wenn e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen sein soll,

$$\frac{y}{h} = e^{\frac{F}{Q}x}$$

raus hervorgeht, daß bei der Voraussetzung einer durchge-
ds gleichen Breite, die Grenze des Durchschnitts der zwei-
x Dimension eine logarithmische Linie sein muß.

Zusatz 1. Es geht hieraus hervor, daß Körper von viel-
h verschiedenen Formen möglich sind, die überall eine gleiche
solute Festigkeit haben.

Zusatz 2. Bei dem Gebrauch der hier gefundenen Re-
tate ist zu berücksichtigen, daß hier der Kubikinhalt V des
rpers für sein Gewicht genommen worden ist, und daß da-
Q durch solche Gewichte ausgedrückt werden muß, von
lchen die Kubikeinheit des Körpers die Einheit bildet.

2. Ist der Querschnitt eines Körpers ein Rechteck oder
Dreieck, von welchem die Grundlinie die Drehungsaxe bei
n Brechen desselben bildet, und man setzt den Abstand des
griffspunktes der Kraft, durch welche der Körper bricht, von
Brechungsebene = x, so wird für eine horizontale Lage
an dem einen Ende befestigten Körpers, die relative Festig-
t durch die Gleichung bestimmt

$$xX = Czy^2$$

z die Grundlinie und y die Höhe der Brechungsebene be-
tet. Ist nun die ganze Länge des Körpers = l, und sind
Dimensionen der zu dieser Länge gehörigen Brechungsfläche
nd p, so wird für dieselbe

$$lP = Cgp^2$$

ßet nun der Körper in allen Flächen gleichen Widerstand,
muß P = X sein, und daher auch

$$\frac{zy^2}{x} = \frac{gp^2}{l}, \text{ also } zy^2 = \frac{gp^2}{l} \cdot x$$

Iches die allgemeine Gleichung für Körper von gleichem Wi-
stande ist, deren Brechungsebene Rechtecke sind, wenn auf
s Gewicht des Körpers nicht Rücksicht genommen wird.

Varignon giebt in einer Abhandlung „de la résistance
s Solides etc." in den Abhandlungen der pariser Akademie
n 1702, drei verschiedene Körper von gleichem Widerstande
, und es werden diese aus der Gleichung

$$xy^2 = \frac{Gy^2}{l}\alpha$$

[illegible], wenn man setzt

$x = g$, wodurch die Gleichung wird $y^2 = \frac{G^2}{l}\alpha$

$y = p$, " " $\alpha = \frac{g}{l}\alpha$

$x = y$, " $y^2 = \frac{Gy^2}{l}\alpha$

und dieses sind die [illegible]per, welche bereits [illegible] betrachtet worden [illegible]

3. Ist ein in [illegible] 196, frei aufliegender Körper seinen Endpunkten [illegible] mit den Gewichten A und B [illegible] lastet, so daß er [illegible] bricht, und ist die Bruchsche, wie in No. 2, [illegible] Rechteck oder ein Dreieck, [illegible] sein, wenn man $ab = 2l$, $ac = x$, und also $bc = 2l$ setzt:

$$x : 2l - x = B : A$$

$$\text{also } x : 2l = B : A + B$$

$$\text{und für } A + B = Q \text{ wird daher } B = \frac{Qx}{2l}$$

Sind nun g und p die Dimensionen der Brechungsebene c, so muß die Gleichung stattfinden

$$bc,\ B = Czy^2$$

$$\text{und also auch } (2l - x)\cdot\frac{Qx}{2l} = Czy^2$$

Soll nun der Körper immer gleichen Widerstand leisten, [illegible] chem Punkte er auch unterstützt sein mag, so muß, wenn $ac = cb = l$ nimmt, $B = \frac{1}{2}Q$ werden, und sind [illegible] und p die Dimensionen des Querschnitts in der Mitte Körpers, so muß

$$l\cdot\tfrac{1}{2}Q = Cgp^2, \text{ also } Q = \frac{2Cgp^2}{l} \text{ sein.}$$

Setzt man diesen Werth in der obigen Gleichung für [illegible] wird dieselbe

$$(2l - x)\cdot\frac{x}{2l}\cdot\frac{2Cgp^2}{l} = Czy^2$$

und hieraus erhält man

$$zy^2 = \frac{gp^2}{l^2}(2lx - x^2)$$

s die Gleichung für einen Körper von gleichem Widerstande, x in irgend einem Punkte c unterstützt ist, und an seinen ndpunkten durch eine constante Summe von Gewichten = Q, elche nach dem umgekehrten Verhältnisse von ca : cb vertheilt belastet werden kann.

Zusatz 1. Liegt der Körper in a und c frei auf, so kann in jedem Punkte seiner Länge ab die Last = Q tragen, ad er leistet immer denselben Widerstand.

Zusatz 2. Aus der Gleichung

$$zy^2 = \frac{gp^2}{l^2}(2lx - x^2)$$

hält man drei verschiedene, in ihren Endpunkten frei aufliegende Körper von gleichem Widerstande, wenn gesetzt wird

1) $z = g$, also $y^2 = \frac{p^2}{l^2}(2lx - x^2)$

2) $y = p$, " $z = \frac{g}{l^2}(2lx - x^2)$

3) $z = y$, " $y^3 = \frac{gp^2}{l^2}(2lx - x^2)$

ie Formen der Krümmungen für diese drei Fälle lassen sich cht erkennen.

Zusatz 3. Welche Gleichung erhält man, wenn der rper nicht in a und b frei aufliegt, sondern an diesen Punkten fest eingemauert ist?

4. Sind die Dimensionen eines prismatischen Körpers , H und L, und ist die relative Festigkeit desselben für den belarm L = X′, und werden die Dimensionen eines ähnlichen Prisma mit g, h, l, und die relative Festigkeit mit X″ zeichnet, so ist

$$X' = C \cdot \frac{GH^2}{L}, \text{ und } X'' = C \cdot \frac{gh^2}{l}$$

d es ist daher

$$X' : X'' = \frac{GH^2}{L} : \frac{gh^2}{l}$$

d weil G : g = L : l = H : h, also

$$g = \frac{Gh}{H} \text{ und } l = \frac{Lh}{H}$$

ſo wird auch, wenn man dieſe Werthe ſetzt,

$$X' : X'' = \frac{GH^2}{L} : \frac{Gh^3}{Lh} = H^2 : h^2$$

und dieſes führt zu dem Reſultat, daß die relativen Feſti
ten ähnlicher Prismen wie die Quadrate ähnlich liegende
ten derſelben zu ei[illegible] verhalten.

5. Die Form [illegible] relative Feſtigkeit eines pri
tiſchen Körpers, deſſ[illegible] gegebene ein Rechteck ſein ſo

$$C \cdot \frac{GH^2}{L}$$

oder vielmehr, es iſt [illegible]ment der Feſtigkeit

$$= C \cdot GH^2$$

wo C ein conſtanter [illegible] iſt. Soll nun der Körper
her als an ſeinem einen Ende in einer vertikalen Wa
befeſtigt gedacht wird, daß er eine horizontale Lage hat,
ſein eigenes Gewicht brechen, und man nimmt die Kub
heit des Körpers zugleich als Gewichtseinheit an, ſo
$X' = GHL$, und weil der Schwerpunkt eines Prisma i
Mitte deſſelben liegt, ſo iſt das Moment des Gewich
$\frac{L}{2} \cdot GHL$, und man erhält daher

$$\frac{L^2GH}{2} = CGH^2, \text{ alſo } L^2 = 2C \cdot H$$

Auf gleiche Weiſe erhält man für einen andern Körper,
cher mit dem erſten von homogener Maſſe iſt, $l^2 =$
und es iſt daher

$$l^2 : L^2 = h : H$$

Sollen alſo zwei Körper von homogener Maſſe ſolche L
haben, daß ſie durch ihr eignes Gewicht brechen, ſo m
ihre Höhen wie die Quadrate der Längen ſich verhalten,
es iſt dabei die Breite derſelben G und g, welche zugle
Drehungsaxen bilden, ganz gleichgültig. Aus der Prop

$$L^2 : l^2 = H : h$$

aber geht hervor, daß zwei Prismen von homogener M
die beide durch ihr Gewicht brechen ſollen, nie ähnlich ſei
nen, und dieſes führt zu dem bereits von Galilei bewi

…atze, daß von unendlich vielen ähnlichen und gleichartigen …rpern nur ein einziger eine solche Form haben kann, daß er …rch sein eigenes Gewicht bricht.

6. Es ist bisher immer angenommen worden, daß der …rper durch eine Kraft zerbrochen wird, die senkrecht gegen … Richtung seiner Fasern wirkt; diese Annahme findet aber dem Falle nicht statt, wenn der Körper eine geneigte Lage …en die vertikale Wand hat, in welcher er befestigt ist, und …s Zerbrechen durch Belastung mit Gewichten erfolgen soll. …e verhält sich in diesem Falle für einen gegebenen Neigungs…nkel die zu dem Zerbrechen erforderliche Kraft zu der Kraft, …rch welche er bei einer horizontalen Lage zerbrochen wird?

§. 72.

…nige, die elastische Linie betreffende Bemerkungen und Uebungen.

1. Es sei $a\alpha\delta d$, Fig. 127, ein Theil von einem Längen…chschnitte eines Balkens, so daß $a\alpha$ ein Theil der Länge, die Höhe desselben ist. Dieser, welcher hier als elastisch …ausgesetzt wird, sei an dem einen Ende befestigt und an …n andern mit einem Gewichte belastet, so wird er, bevor er …ht, gebogen, und es werden hierdurch, wenn γ ein Punkt Brechungsaxe ist, die Fasern in dem Raume $\gamma ca\alpha$ ausge…nt, und die in dem Raume $\gamma cd\delta$ werden zusammengepreßt. … Faser γc selbst aber behält ihre natürliche Lage, sie erlei… weder eine Verlängerung noch eine Verkürzung, und die …wirkung der Belastung des Balkens auf dieselbe besteht …s darin, daß sie gebogen wird. Die Krümmung nun, …che diese Linie annimmt, nennt man die elastische Linie.

2. Setzt man die Länge von $c\gamma = v$, und zieht durch …ie Linie $\alpha'\delta'$ parallel mit ad, so kann $\alpha'\alpha = \alpha$ als der …eil angesehen werden, um welchen die Faser $a\alpha'$ ausgedehnt …d, und es ist zugleich $\delta\delta'$ der Theil, um welchen die un…te Faser $d\delta'$ sich verkürzt. Wird nun die ausdehnende …aft für die Faser $a\alpha' = q$, so ist α nothwendiger Weise … Größe von q und der Länge der Faser im natürlichen Zu… $= v$ proportionirt, und es ist unter übrigens gleichen …nden, wenn der Querschnitt der Faser $= \beta$ gesetzt wird,

die Ausdehnung α deſto geringer, je größer β iſt, weil die a
ſolute Feſtigkeit mit β proportionirt zunimmt. Hiernach k
man ſetzen

$$\alpha = n \cdot \frac{qv}{\beta} \text{ und daher } q = \frac{\alpha\beta}{nv}$$

wo n in der Gleichung $\alpha = n \cdot \frac{qv}{\beta}$ einen durch die Er
rung beſtimmten (n bedeutet. Für $\beta = 1$ w
$q = k$ das Maaß ten Feſtigkeit, und es iſt da

$= k$

Da nun, in ſo fern Zuſammenpreſſung Rückſicht
nommen wird, nach die zu dem Zerbrechen des
pers erforderliche Kra r den Hebelarm x, wenn
$\delta\alpha = p$ und $\gamma\alpha = h$ ſetzt, durch die Gleichung ausgeb
wird

$$xX = \frac{kgph}{3}$$

ſo iſt auch, wenn man für k den obigen Werth ſetzt,

$$xX = \frac{\alpha}{3nv} \cdot gph$$

Werden nun die in γ und c auf γc normalen $\alpha\gamma$ und ac
längert, bis ſie ſich in r ſchneiden, ſo iſt $\gamma r = cr =$
Krümmungshalbmeſſer für den kleinen Theil $c\gamma$ der elaſt
Linie, und weil

$$r\gamma : \gamma c = \gamma\alpha : \alpha\alpha'$$

ſo iſt auch $\varrho : v = h : \alpha$, alſo $\frac{\alpha}{v} = \frac{h}{\varrho}$

und es iſt daher

$$xX = \frac{h}{3n\varrho} \cdot gph = \frac{gph^2}{3n\varrho}$$

Hiernach wird, wenn man das Moment xX der Kraft
M bezeichnet,

$$\varrho M = \frac{gph^2}{3n}$$

3. Es iſt nun für eine beſtimmte Gattung von K
$\gamma\alpha = h$ ein beſtimmter Theil von der Höhe $\delta\alpha = p$

an kann daher, wie dieses auch §. 66. geschehen ist, h=mp
gen. Folglich ist auch

$$\varrho M = \frac{m^2 g p^3}{3n} = \frac{m^2}{3n} \cdot g p^3$$

o der Coefficient $\frac{m^2}{3n}$ durch den größern oder geringern Grad
r Elasticität der Masse, aus welcher der Körper besteht, be-
mmt ist. Es wird daher dieser Coefficient die absolute
Elasticität der Masse genannt, und mit e^2 bezeichnet. Hier-
ch wird

$$\varrho M = e^2 \cdot g p^3$$

Sind aber die Dimensionen g und p des Balkens gegeben,
ist dadurch auch der ganze Ausdruck $e^2 \cdot g p^3$ bestimmt, und
an nennt diesen Ausdruck die relative Elasticität, und be-
chnet dieselbe mit E^2. Hierdurch erhält die obige Gleichung
e einfache Form

$$\varrho M = E^2.$$

4. Ist g, Fig. 128, der befestigte Punkt der elastischen
nie $g\alpha A$, welche diese Form durch das Gewicht X erhält,
rd AB horizontal durch den Endpunkt A gezogen, nimmt
an diese Linie als Abscissenlinie an, setzt $Ax = x$ und $x\alpha$
$= y$, und nimmt man endlich die Biegung der Curve nur
ing an; so läßt sich die Gleichung für dieselbe auf folgende
e ableiten:

Es ist $\varrho M = E^2$, oder weil $M = xX$,

$$\varrho = \frac{E^2}{M} = \frac{E^2}{xX}$$

für eine gegebene Kraft $X = Q$ der Ausdruck $\frac{E^2}{X} = \frac{E^2}{Q}$
stant ist.

Nun ist der allgemeine Ausdruck für den Krümmungs-
messer, wenn die Länge des Bogens $A\alpha = S$ gesetzt wird,

$$\varrho = \frac{-(dS)^3}{dx \cdot d^2y}$$

man kann hier, wenn die Krümmung unbedeutend ist,
$= dx$ annehmen. Hierdurch wird

$$\varrho = -\frac{(dx)^3}{d^2y}$$

$$\text{und ſonach } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\frac{X}{E^2}\cdot y^2 + \text{Const.}$$

Es iſt aber, wenn man an α eine Tangente zieht, und d
die Bg unter einem Winkel $= \varphi$ ſchneidet, $\frac{dy}{dx} = \cot\varphi$, f
lich iſt auch

$$\cot^2\varphi = -\frac{X}{E^2}\cdot y^2 + \text{Const.}$$

Für $y = Bg = H$ der Winkel, unter welchem g
Horizont trifft, alſo, ie Ruthe unter einem Winkel
befeſtigt iſt, $\varphi = m$, iſt

$$\cot^2 \quad \frac{X}{E^2}\cdot H^2 + \text{Const}$$

$$\text{und daher } (\quad = \cot^2 m + \frac{X}{E^2}\cdot H^2$$

Es wird alſo, wenn man dieſen Werth ſetzt,

$$\cot^2\varphi - \cot^2 m = \frac{X}{E^2}(H^2 - y^2)$$

oder auch

$$E^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = X(H^2 - y^2) + E^2\cot^2 m$$

nämlich es iſt

$$E^2\cdot\frac{(dy)^2}{(dx)^2} = XH^2 + E^2\cot^2 m - X\cdot y^2$$

wofür man ſetzen kann

$$E^2\cdot\frac{(dy)^2}{(dx)^2} = C^2 - Xy^2$$

oder, weil $X = Q$ ein beſtimmtes Gewicht ſein ſoll,

$$E^2\cdot\frac{(dy)^2}{(dx)^2} = C^2 - Qy^2$$

Hieraus folgt nun $\frac{E^2(dy)^2}{C^2 - Qy^2} = (dx)^2$

$$\text{alſo } dx = \frac{E\,dy}{\sqrt{(C^2 - Qy^2)}}$$

$$\text{und daher } x = E\int\frac{dy}{\sqrt{(C^2 - Qy^2)}} = \frac{E}{\sqrt{Q}}\,\text{Arc sin}\,\frac{y\sqrt{(}}{C}$$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil für $x = 0$ auch y
wird. Es iſt alſo

$$\frac{x\sqrt{Q}}{E} = \text{Arc}\sin\frac{y\sqrt{Q}}{C}$$

$$\text{und daher } \frac{y\sqrt{Q}}{C} = \sin\frac{x\sqrt{Q}}{E}$$

e Gleichung, aus welcher die verschiedenen Eigenschaften
Curve abgeleitet werden können, wobei nur zu berücksich-
en ist, daß $C = \sqrt{(QH^2 + E^2\cot^2 m)}$.

Am einfachsten wird der Ausdruck in dem Falle, wenn
Ruthe senkrecht in der horizontalen Ebene befestigt ist, da
dann $\angle g = \angle m = 90^0$ wird, also $\cot m = 0$. Bei die-
Voraussetzung ist also $C = H\sqrt{Q}$, und die obige Glei-
ng wird

$$\frac{y}{H} = \sin\frac{x\sqrt{Q}}{E}$$

7. Wird angenommen, daß die Richtung des in A be-
igten Gewichts durch den Punkt g geht, so muß für $x =$
$B) = l$ der Werth von $y = 0$ werden, und die allgemeine
ichung

$$\frac{y\sqrt{Q}}{C} = \sin\frac{x\sqrt{Q}}{C}$$

$$\text{giebt alsdann } 0 = \sin\frac{l\sqrt{Q}}{E}$$

$$\text{und es muß daher sein } \frac{l\sqrt{Q}}{E} = n\pi$$

$$\text{also } \frac{Ql^2}{E^2} = n^2\pi^2$$

$$\text{woraus folgt } Q = \frac{n^2\pi^2E^2}{l^2}$$

t man hier $n = 1$, so erhält man die Curve ohne Wen-
nkt, so daß sie bloß in A und b die Abscisse trifft, und
st alsdann

$$Q = \frac{\pi^2E^2}{l^2}$$

$$\text{und } C = E\cot m, \text{ weil } H = 0 \text{ ist.}$$

leichung

$$\frac{y\sqrt{Q}}{C} = \sin\frac{x\sqrt{Q}}{E}$$

t für diese Werthe von Q und C

$$\frac{y\pi}{l\cot m} = \sin\frac{x}{l}\cdot\pi$$

und es wird y am größten für $\sin\frac{x}{l}\pi = 1$, alſo für $x = \frac{1}{2}l$.

Für dieſen Werth von x iſt

$$y = \frac{l\cot m}{\pi}$$

und es hat, wie ſich leicht ableiten läßt, die Curve zwei gleiche Schenkel, ſ ie größte Ordinate $y = \frac{l\cot m}{\pi}$ eine Axe derſelben bilde

Soll die größte Or y einen beſtimmten Werth = p erhalten, ſo muß

$$p = \frac{l\cot m}{\pi}, \text{ alſo } \cot m = \frac{p}{l}\cdot\pi \text{ ſein.}$$

Die größte Krümmung iſt alſo bloß von dem Winkel m abhängig, welchen die Ruthe mit dem Horizonte bildet, und es hat hierauf die Laſt $Q = \frac{\pi^2E^2}{l^2}$ keinen Einfluß. Dieſe Laſt iſt übrigens die kleinſte, durch welche die Ruthe wirklich gebogen wird.

8. Die Kraft, welche erfordert wird, um einen Körper zu zerreißen, drückt ſeine abſolute Feſtigkeit aus; wird nun eine Kraft in entgegengeſetzter Richtung angebracht, wodurch ein Zerdrücken, oder, bei elaſtiſchen Körpern, ein Biegen deſſelben, und in Folge deſſen ein Zerbrechen erfolgt, ſo kann die hierzu erforderliche Kraft, als derjenigen entgegengeſetzt, durch welche das Zerreißen ſtattfindet, die negative abſolute Feſtigkeit genannt werden, welche alſo die, §. 64. unter der Benennung „rückwirkende Feſtigkeit" angeführte iſt. Der allgemeine Ausdruck für dieſelbe iſt

$$Q = \frac{\pi^2E^2}{l^2}$$

und hieraus geht hervor, daß dieſelbe direct dem Quadrate der relativen Elaſticität, und indirect dem Quadrate der Länge des Körpers proportionirt iſt.

Nun iſt nach No. 3. bei prismatiſchen Körpern, deren

uerschnitte Rechtecke sind, $E^2 = e^2gp^3$, folglich ist bei sol-
en Körpern

$$Q = \frac{e^2gp^3\pi^2}{l^2}$$

r Ausdruck für die rückwirkende Festigkeit, wenn der Körper
ıstisch ist, woraus nun die Formeln für einzelne Fälle leicht
geleitet werden können.

9. Der in No. 8. gefundene Ausdruck ist bei absolut
elastischen Körpern nicht anwendbar, weil für diese $e = 0$
ird. Man kann indessen auch für solche Körper einen Aus-
uck finden, durch welchen die rückwirkende Festigkeit derselben
sgedrückt wird. Man nimmt bei Ableitung dieser Formel
n, daß ein Theil des Körpers über den andern hinweggleite,
daß, indem die Kraft des Zusammenhangs der Theile durch
n Druck aufgehoben wird, der obere Theil über den un-
n wie auf einer geneigten Ebene sich bewegt. Auf diese
eise kommt man zu dem Resultat, daß die rückwirkende Fe-
gkeit zweimal so groß als die absolute Festigkeit angenom-
n werden kann; man erhält für dieselbe aber einen noch
eutenderen Werth, wenn die Friction mit in Rechnung ge-
acht wird.

10. Bei Ableitung der Gleichung für die elastische Linie
No. 4., 5. und 6. wurde vorausgesetzt, daß nur eine ge-
ge Biegung stattfinde, und also $dS = dx$ gesetzt werden
nne. Soll diese Beschränkung nicht stattfinden, so muß man
den Krümmungshalbmesser den Ausdruck setzen

$$\varrho = \frac{-(dS)^3}{dy^2 \cdot dx}$$

es wird nun, weil

$$\varrho = \frac{E^2}{xQ},$$

Gleichung erhalten

$$-\frac{(dS)^3}{d^2y \cdot dx} = \frac{E^2}{xQ}$$

aus erhält man, wenn y durch x bestimmt werden
ine Differentialgleichung, die nur mittelst einer Reihe
tegriren läßt, deren Entwicklung der eignen Uebung
sen bleiben muß.

1. Es ist §. 28. gezeigt worden, daß, wenn ein Bal-

ken in drei Punkten unterſtützt wird, die Vertheilung des Druk-kes ſich nicht angeben läßt, weil die Aufgabe unbeſtimmt iſt. Dieſes gilt jedoch nur für vollkommen unelaſtiſche Körper. Sobald der Körper aber biegſam angenommen wird, iſt es allerdings möglich, mit Hülfe der Gleichung für die elaſtiſche Linie, die hier als nur wenig gekrümmt angenommen werden kann, richtige Formeln für den Druck zu erhalten, welchen jeder der unterſtützten Punkte zu erleiden hat.

12. Aus der in No. 4. gefundenen Gleichung für die wenig gekrümmte elaſtiſche Linie

$$y = \frac{H}{2l^3}(3l^2x - x^3)$$

laſſen ſich Formeln ableiten:

1) für die Fläche ABgα, Fig. 128, und für die Lage des Schwerpunktes derſelben.

2) für den Inhalt des durch ABgα erzeugten Konoid und für die Lage des Schwerpunkts dieſes Körpers ꝛc.

Anmerkung. Das vollſtändigſte Werk, welches wir über die Feſtigkeit der Körper haben, iſt das von Girard, Traité analytique de la résistance des Solides, et des Solides d'égale résistance. Paris 1798. Eine 1803 von Krönke beſorgte deutſche Ausgabe dieſes Werkes unter dem Titel: „analytiſche Abhandlung von dem Widerſtande feſter Körper" Gieſſen bei Müller, und wovon gegenwärtig Leske in Darmſtadt den Verlag hat, iſt nur dadurch mangelhaft, daß ſich ziemlich viele Druckfehler eingeſchlichen haben, und es ſind Anfänger beſonders darauf aufmerkſam zu machen, daß in dem erſten Abſchnitte s als Integralzeichen gebraucht iſt.

Dritte Abtheilung.

Anwendungen.

Erster Abschnitt.

ufgaben von dem Räderwerke und der zweckmäßigsten Gestalt der Zähne.

§. 73.

Erklärungen.

1. Ist eine Rolle mit einer Welle so verbunden, daß, em die Welle um ihre in Pfannen liegende Zapfen gedreht d, zugleich auch die Rolle dieselbe Bewegung erhält, so nt man diese Vorrichtung ein Rad an der Welle, und liegt hier der Mittelpunkt der Rolle, welche das Rad bil, in der Axe des Cylinders oder der Welle. Setzt man Radius der Welle = r, und den des Rades = R, und ken an dem Umfange beider die Kräfte P und Q tangen, so daß die Richtungen dieser Kräfte also an den Endpunkt der Radien normal sind, so muß, wenn die Kräfte im eichgewicht sein sollen, die Proportion stattfinden

$$r : R = Q : P$$

nn also die Kräfte umgekehrt wie die normalen Abstände er Richtungen von der Axe der Welle sich verhalten. Die rschiedenen Haspel und Winden sind bloß besondere Arten ser Vorrichtung.

2. Sind zwei oder mehrere, an verschiedenen Wellen befindliche Räder so mit einander verbunden, daß, indem ein ad umgedreht wird, zugleich auch die übrigen bewegt wer-

den, so nennt man diese Vorrichtung ein Räderwerk. Die Mittheilung der Bewegung von einem Rade an das andere geschieht dadurch, daß beide Räder mit Erhöhungen und Vertiefungen, Zähne, Kämme oder Triebstöcke, versehen sind, die bei der Bewegung wechselseitig in einander eingreifen, und es erfolgen daher die Bewegungen zweier Räder, von welchen die Bewegung des einen durch die des andern unmittelbar erzeugt wird, nach entgegengesetzten Richtungen. Soll die Bewegung zweier Räder nach einer und derselben Richtung erfolgen, so muß, wenn die Mittheilung der Bewegung durch Zähne oder Kämme geschieht, zwischen beiden noch ein drittes Rad mit einer eigenen Welle angebracht werden, oder es müssen die Räder durch ein um dieselben geschlungenes Seil ohne Ende mit einander verbunden werden, und es erfolgt alsdann die Mittheilung der Bewegung durch dieses Seil, so daß gar keine Zähne gebraucht werden.

3. Mehrere Räder werden mit einander verbunden, um dadurch das Moment der Kraft zu vermehren und die Bewegung von einer Stelle an eine andere zu übertragen, also um dieselbe fortzupflanzen. Sind nun die Axen der Wellen parallel, so müssen es auch die Ebenen der Räder sein, welche als normal gegen die Axen angenommen werden, und es geschieht alsdann die Fortpflanzung der Bewegung durch Stirnräder, nämlich durch Räder, bei welchen die Zähne in der Richtung der Radien liegen. Soll aber eine Bewegung, die in einer Vertikalfläche stattfindet, auf eine solche in einer horizontalen Fläche, oder umgekehrt, übertragen werden, oder sollen überhaupt die Bewegungen zweier, mit einander verbundener Räder in gegeneinander geneigten Ebenen stattfinden, so muß dieses durch ein Kammrad bewirkt werden, d. i. durch ein Rad, bei welchem die Zähne, welche hier Kämme genannt werden, eine gegen die Ebene des Rades geneigte Richtung haben. Gewöhnlich sind es nicht die Zähne zweier Räder, die in einander eingreifen, sondern es greifen die Zähne oder Kämme eines Rades in die Triebstöcke eines Trillings, der die Stelle eines Stirnrades vertritt.

4. Soll eine Maschine ihrem Zweck vollkommen entsprechen, so muß die Bewegung eines jeden einzelnen Rades der-

en gleichförmig sein, es müssen also von jedem Punkte des fanges in gleichen Zeiten gleiche Räume durchlaufen wer- ; es muß ferner das Moment der Kraft, durch welche ein gedreht wird, constant sein, eine Bedingung welche mit Gleichförmigkeit der Bewegung zusammenhängt, so daß die Folge der andern ist, und es muß endlich die mög- kleinste Friction bei der Bewegung stattfinden, dieselbe muß überall rollend, nicht aber schiebend sein.

5. Die in No. 4. angegebenen Bedingungen können bei einer zweckmäßigen Form der Zähne oder Kämme er- t werden, und es ist daher wichtig, diese Form für jeden ndern Fall kennen zu lernen.

6. Wenn eine Curve über eine grade Linie hinwegge- t wird, so daß immer andere Theile beider mit ein- er in Berührung kommen, so wird der hierbei von ir- einem Punkt der Curve beschriebene Weg eine Curvoide nnt, und man nennt ihn eine Epicurvoide, wenn statt graden Linie es selbst wieder eine Curve ist, über welche hinweggeführt wird. Da nun eine solche Bewegung stets nd ist, so läßt sich schon zum voraus einsehen, daß die n der Zähne in den meisten Fällen Curvoiden sein müssen. mentlich nennt man die durch die rollende Bewegung eines ses erzeugte Curvoide eine Cykloide, von welcher der s, durch dessen Bewegung sie gebildet wird, der Erzeu- ngskreis ist. Rollt der Kreis selbst wieder auf dem Um- ge eines andern, welchen man den Grundkreis nennt, und n beide in derselben Ebene, so wird eine Epicykloide er- t, wenn der Abstand der Mittelpunkte des Erzeugungs- des Grundkreises der Summe beider Radien gleich ist; n dieser Abstand aber die Differenz beider Radien beträgt, wird die auf diese Weise erzeugte Curve eine Hypocykloide nnt. Beide unterscheiden sich also bloß dadurch von ein- r, daß in dem ersten Falle der erzeugende Kreis über den ern, und in dem andern Falle über den innern Umfang Grundkreises hinwegrollt. Liegen endlich die Flächen bei- Kreise in verschiedenen Ebenen, so daß diese Ebenen jedoch allen Berührungspunkten immer unter demselben Winkel n einander geneigt sind, so wird die durch irgend einen

Punkt des rollenden Kreiſes beſchriebene Curve eine ſphäriſche Epicykloide genannt. Dieſe Curven nun ſind es vorzugsweiſe, welche gebraucht werden, um den Zähnen die vollkommenſte Geſtalt zu geben.

§. 74.

Aufgaben von dem Räderwerke überhaupt.

Aufgabe 1. Ein Räderwerk beſteht aus n Wellen, von welchen jede ein größeres und ein kleineres Rad enthält; an dem Umfange des größern Rades der erſten Welle wirkt eine Kraft = P, und der Umfang des kleinern Rades iſt mit Zähnen verſehen, die in die Zähne des größern Rades der zweiten Welle eingreifen, und dieſer dadurch eine Bewegung um ihre Axe mittheilen. Eben ſo greifen die Zähne des kleinern Rades der zweiten Welle in die des größern der dritten ꝛc., und an dem Umfange des kleinern Rades der nten Welle iſt eine Laſt = Q angebracht: es ſollen die Bedingungen für das Gleichgewicht angegeben werden.

Auflöſung. Bezeichnet man die Räder der erſten Welle mit A_1 und a_1; die Radien derſelben mit R_1 und r_1; die Räder der zweiten Welle mit A_2 und a_2; ihre Radien mit R_2 und r_2; die Räder der dritten Welle mit A_3 und a_3 und ihre Radien mit $R_3 : r_3$ ꝛc. Ferner die Kraft, welche an dem Umfange von a_1 die Umdrehung von A_2 erzeugt, $= P_1$; die Kraft, durch welche an dem Umfange von a_2 die Umdrehung von A_3 erzeugt wird, $= P_2$ u. ſ. w., ſo iſt, wenn die ſämmtlichen Kräfte als tangential wirkend angenommen werden,

$$P : P_1 = r_1 : R_1; \text{ alſo } P_1 = \frac{R_1}{r_1} \cdot P$$

$$P_1 : P_2 = r_2 : R_2; \text{ alſo } P_2 = \frac{R_2}{r_2} \cdot P_1$$

$$P_2 : P_3 = r_3 : R_3; \text{ alſo } P_3 = \frac{R_3}{r_3} \cdot P_2$$

ꝛc., und es iſt endlich

$$P_{n-1} : P_n = r_n : R_n; \text{ alſo } P_n = \frac{R_n}{r_n} \cdot P_{n-1}$$

Werden alſo hier nach und nach die gefundenen Werthe ſubſtituirt, ſo erhält man

$$P_n = \frac{R_n}{r_n} \cdot \frac{R_{n-1}}{r_{n-1}} \cdots \frac{R_3}{r_3} \cdot \frac{R_2}{r_2} \cdot \frac{R_1}{r_1} \cdot P$$

es ist, weil $P_n = Q$ sein soll,

$$Q = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdots R_n}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdots r_n} \cdot P$$

her

$$P : Q = r_1 \cdot r_2 r_3 \cdots r_n : R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdots R_n.$$

aft verhält sich also zu der Last, wie das Produkt der der Räder a_1, a_2, $a_3 \cdots$ zu dem Produkt der Radien der A_1, A_2, $A_3 \cdots$.

ufgabe 2. Es soll angegeben werden, wie sich die der Zähne zweier Räder zu einander verhalten, von das eine dem andern die Bewegung mittheilt.

uflösung. Da die Bewegung rollend sein muß, so bei derselben stets gleiche Theile des Umfangs beider über einander hinweg, was nur alsdann möglich ist, bei dem einen Rade die Breite eines Zahnes und die des Zwischenraums zwischen diesem und dem nächstfol- Zahn zusammengenommen eben so viel beträgt, als n andern Rade, und hieraus folgt, daß die Anzahl der beider Räder zu einander wie ihr Umfang sich verhal- ässen, und da die Peripherien zweier Kreise ihren Ra- roportionirt sind, so geht hieraus hervor, daß die Zahl hne wie die Radien der Räder sich verhalten.

usatz. Setzt man die Zahl der Zähne von $a_1 = n_1$; $= n_2$; von $a_3 = n_3 \cdots$, und eben so die Zahl der von $A_2 = N_2$; von $A_3 = N_3$ ꝛc., so ist

$$n_1 : N_2 = r_1 : R_2;\ n_2 : N_3 = r_2 : R_3$$
$$n_3 : N_4 = r_3 : R_4 \text{ u. s. w.}$$

ist daher

$$\frac{r_1}{R_2} = \frac{n_1}{N_2};\ \frac{r_2}{R_3} = \frac{n_2}{N_3};\ \frac{r_3}{R_4} = \frac{n_3}{N_4} \text{ ꝛc.}$$

n nach Aufgabe 1.

$$Q = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdots R_n}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdots r_n} \cdot P$$

ß auch

$$Q = \frac{R_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdots N_n}{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_{(n-1)} \cdot r_n} \cdot P \text{ sein,}$$

wo R_1 und r_n beibehalten werden, weil das Rad A_1, an chem die Kraft P, und a_n, woran die Last Q sich befi nicht mit Zähnen versehen sind. Uebrigens kann man des Verhältnisses von $R_1 : r_n$ auch das des Umfangs Räder setzen.

Aufgabe 3. Sind a und m, Fig. 130, die M punkte zweier auf einander folgender Zähne des Get mane, und a und α die von zwei Zähnen des Rades, so der Länge nach am = aα sein, und man nennt die L dieses Bogens die **Theilung**. Es soll angegeben we wie diese Theilung und die dazu gehörigen Centriwinkel den Radien und der Zahl der Zähne des einen Rades hängen.

Auflösung. Es sei der Radius Ca des Rades A die Zahl der Zähne dieses Rades = N, die Theilung aa und der dazu gehörige Centriwinkel = C^0; ferner der Radi des Rades a = r, die Zahl der Zähne = n, und der z Theilung am = t gehörige Centriwinkel = c^0, so ist

$$1)\ R : r = N : n, \text{ also } n = \frac{rN}{R}$$

Ferner ist der Umfang von A = $2R\pi$, und daher

$$2)\ t = \frac{2R\pi}{N}$$

Da aber

$$2R\pi : t = 360^0 : C^0$$

oder, wenn für t der Werth gesetzt wird

$$2R\pi : \frac{2R\pi}{N} = 360^0 : C^0, \text{ so ist}$$

$$3)\ C = \left(\frac{360}{N}\right)^0$$

und eben so ist auch $c = \left(\frac{360}{n}\right)^0$, oder weil $n = \frac{rN}{R}$,

$$4)\ c = \frac{R}{r}\left(\frac{360^0}{N}\right) = \frac{R}{c} \cdot C^0$$

und durch diese 4 Ausdrücke ist vollkommen bestimmt, groß n, t, C und c werden müsse, wenn R, r und N geben sind.

Zusatz. Sind von den 7 Größen R, r, N, n, t,

c drei gegeben, so können in jedem Falle die 4 übrigen
h eine einfache Rechnung gefunden werden. Da nun von
Größen je 3 auf $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ verschiedene Arten genom-
werden können, so folgt, daß, wenn man alle hier mög-
Formeln angeben will, 35 Fälle unterschieden werden
fen, und für jeden Fall werden 4 verschiedene Formeln
lten.

Aufgabe 4. Es sollen die Grundeigenschaften der Cur-
bestimmt werden, nach welchen die Zähne zweier Räder
rümmt sein müssen, wenn das Umdrehungsmoment der
ast constant sein soll.

Auflösung. Sind C und c, Fig. 131, die Mittel-
nkte der beiden Räder, R und r die Radien derselben, also
$= R + r$, und ist für irgend einen Augenblick der Um-
hung m der Berührungspunkt zweier Zähne, so müssen die
ven, nach welchen sie gekrümmt sind, an diesem Punkte
e gemeinschaftliche Tangente no haben. Errichtet man auf
selben in m die Normale ax, so sind mx und ma die Rich-
gen der sich bei der Umdrehung im Gleichgewicht halten-
Kräfte, und diese Kräfte müssen gleich groß sein, weil sie
h den entgegengesetzten Richtungen mx und ma wirken.
fft diese Richtung die Cc nun in dem Punkte a unter
m Winkel ψ, und man setzt die Größe der Kraft $= X$, so
das auf den Punkt a reducirte Moment derselben

für das Rad $c = M' = (ca) X \sin \psi$

und für das Rad $C = M'' = (Ca) X \sin \psi$

ist daher

$$M' : M'' = ca : Ca$$

ollen nun die Momente an dem Punkte m überhaupt con-
nt sein, so muß auch das Verhältniß der auf a reducirten
omente der Theilkraft Z für alle Lagen von m unveränder-
bleiben; es muß daher a ein unveränderlicher Punkt
ihrer Größe und Lage nach gegebenen Linie Cc sein, und
muß dieses derselbe Punkt sein, in welchem zwei Zähne
ich berühren. Daher ist nothwendigerweise $ca = r$ und
R, und hieraus ergiebt sich nun die Grundeigenschaft
en für die Krümmung der Zähne: ist nämlich m

ein Berührungspunkt der Zähne, ſo muß der Krümmungshalbmeſſer dieſes Punktes der Curven durch den Punkt a gehen, in welchem beide Räder ſich berühren.

Zuſatz. Dieſe wichtige Eigenſchaft der Krümmungscurven der Zähne läßt ſich auf folgende Art beweiſen: Es ſei cm = z, und die an m normal gegen cm in der Richtung mz wirkende Kraft = Z, ſo iſt das Moment derſelben = z·Z. Soll nun dieſes Moment conſtant ſein, und ſetzt man die entſprechende, an dem Endpunkte des Radius r wirkende Kraft = P, ſo muß die Gleichung z·Z = r·P ſtattfinden, und es muß daher $Z = \frac{rP}{z}$ ſein. Iſt no die Tangente des Punktes m, und xma die dazu gehörige Normale, ſo kann Z als aus den beiden Theilkräften X und V beſtehend angeſehen werden, von welchen die eine X in der Richtung mx, und die andere V in der Richtung des Radius mc wirkt, und es iſt, wenn ∠amc = ∠omz = φ' geſetzt wird,

$$X = \frac{Z}{\sin\varphi'}; \text{ alſo } Z = X\sin\varphi'$$

Da nun auch $Z = \frac{rP}{z}$ ſein muß, ſo wird,

$$X\sin\varphi' = \frac{rP}{z} \text{ und daher } Xz\sin\varphi' = rP$$

nämlich es iſt $X(cm)\sin\varphi' = rP$.

Da nun der durch das Rad C an dem Punkte m geleiſtete Widerſtand ebenfalls eine Theilkraft = X in der Richtung ma geben muß, ſo wird auf gleiche Weiſe erhalten

$$X(Cm)\sin\varphi'' = RP$$

und es iſt daher

$$P = \frac{X(cm)\sin\varphi'}{r} = \frac{X(Cm)\sin\varphi''}{R}$$

folglich iſt $(cm)R\sin\varphi' = (Cm)r\sin\varphi''$

Nun iſt cm : ca = $\sin\psi : \sin\varphi'$, alſo $(cm)\sin\varphi' = (ca)\sin\psi$ und Cm : Ca = $\sin\psi : \sin\varphi''$, alſo $(Cm)\sin\varphi'' = (Ca)\sin\psi$ alſo iſt auch, wenn man dieſe Werthe ſetzt,

$$R(ca)\sin\psi = r(Ca)\sin\psi$$

und daher R : r = Ca : ca

folglich auch $R+r:r = Ca+ca:ca$

Da nun $R+r = Ca+ca = Cc$, ſo iſt auch $r = ca$. woraus ebenfalls folgt, daß die Richtung der Normale des Berührungspunktes m zweier Zähne durch den Punkt a gehen muß, in welchem beide Räder ſich berühren.

§. 75.

Aufgaben von den Cykloiden.

Aufgabe 1. Die Grundeigenſchaften der gemeinen Cykloide ſollen angegeben werden.

Auflöſung. 1. Die gemeine Cykloide wird von einem beſtimmten Punkte des Umfangs eines Kreiſes beſchrieben, wenn derſelbe über eine grade Linie hinwegrollt. Iſt alſo a, Fig. 132, der die Curve beſchreibende Punkt, adb der erzeugende Kreis, und iſt derſelbe bis in die Lage $\alpha\beta$ fortgerollt, ſo iſt, für $\alpha m = \alpha a$, der Punkt m ein Punkt der Cykloide, und es iſt nun, wenn man durch m die Linie ex parallel mit αa zieht, welche die normalen Durchmeſſer ab und $\alpha\beta$ in x und e ſchneidet,

$$a\alpha = xe = \alpha m = ad.$$

2. Für $ax = x$ und $xm = y$ iſt nun

$$y = xe - em = \text{Arc}(ad) - em$$

Wird aber der Radius des erzeugenden Kreiſes $= r$ geſetzt, ſo iſt $\frac{x}{r} = \sin\text{vers Arc}(ad)$ für den Sinustotus $= 1$, und es iſt daher

$$ad = r\,\text{Arc sin vers}\frac{x}{r}$$

Ferner iſt $em = \sqrt{x(2r-x)}$, folglich iſt

$$y = r\,\text{Arc sin vers}\frac{x}{r} - \sqrt{(2rx-x^2)}$$

und dieſes iſt die Gleichung für die gemeine Cykloide.

3. Da nun ganz allgemein iſt

$$d\,\text{Arc sin vers}\,z = \frac{dz}{\sqrt{(2z-z^2)}}$$

ſo iſt auch

$$\mathrm{d\,Arc\,sin\,vers}\frac{x}{r} = \frac{\frac{dx}{r}}{\sqrt{\left(\frac{2x}{r}-\frac{x^2}{r^2}\right)}} = \frac{dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$$

und es iſt daher in der Gleichung für die Cykloide

$$dy = \frac{rdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} - \frac{(r-x)\,dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = \frac{xdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$$

Da nun die Formel für die Subtangente einer jeden Curve iſt

$$St = \frac{ydx}{dy}$$

ſo iſt hier $St = \frac{y\sqrt{(2rx-x^2)}}{x}$

und es findet daher die Proportion ſtatt

$$x : \sqrt{(2rx-x^2)} = y : St$$

und weil $x : \sqrt{(2rx-x^2)} = (\alpha e) : (em) = (em) : (e\beta)$

ſo iſt auch $(em) : (e\beta) = y : St = (mx) : St$

es liegt daher der Endpunkt der Subtangente mit m und β in grader Linie. Folglich iſt die Sehne βm die Tangente des Punktes m, und da der Winkel $\beta m\alpha$, als ein Winkel im Halbkreiſe, $= 90°$ iſt, ſo folgt, daß die Normale des Punktes m, und alſo auch der Krümmungshalbmeſſer deſſelben durch den Berührungspunkt α geht.

4. Da, wenn die Länge des Bogens am der Curve $= S$ geſetzt wird, $dS = \sqrt{((dx)^2+(dy)^2)}$ ſein muß, ſo iſt

$$(dS)^2 = (dx)^2 + \left(\frac{xdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}\right)^2$$

$$= (dx)^2 + \frac{x^2\,(dx)^2}{2rx-x^2} = \frac{2rx\,(dx)^2}{2rx-x^2}$$

und es iſt daher $S = \int dx \sqrt{\left(\frac{2rx}{2rx-x^2}\right)} = \int dx \sqrt{\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2r}}\right)}$

hiernach iſt $S = -4r\sqrt{\left(1-\frac{x}{2r}\right)} + \mathrm{Const}$

und weil für $x = 0$ auch $S = 0$ werden muß, ſo iſt Const $= 4r$, und es wird daher

$$S = 4r - 4r\sqrt{\left(1-\frac{x}{2r}\right)} = 4r - 2\sqrt{2r\,(2r-x)}$$

$$= 2[2r - \sqrt{2r\,(2r-x)}]$$

Da nun $\sqrt{2r(2r-x)} = (\beta m)$, so ist

$$S = 2(\alpha\beta - \beta m)$$

der Bogen am ist also zweimal so groß, als die Differenz des Durchmessers $\alpha\beta$ und der Sehne βm.

5. Auch die Formel für den Krümmungshalbmesser eines jeden Punktes der Cykloide läßt sich leicht ableiten. Denn es ist

$$\varrho = -\frac{(dS)^3}{dx \cdot d^2y}$$

$$\text{da nun } dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

$$\text{so ist } d^2y = \frac{(dx)^2\sqrt{(2rx-x^2)} - \frac{x\,dx\cdot(r-x)\,dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}}{2rx - x^2},$$

$$= \frac{(2rx-x^2)(dx)^2 - x(r-x)(dx)^2}{\sqrt{(2rx-x^2)^3}} = \frac{rx\,(dx)^2}{\sqrt{(2rx-x^2)^3}}$$

und da $dS = dx\sqrt{\left(\frac{2rx}{2rx-x^2}\right)}$, so wird

$$\varrho = -\frac{\frac{(dx)^3\sqrt{(2rx)^3}}{\sqrt{(2rx-x^2)^3}}}{\frac{rx\,(dx)^3}{\sqrt{(2rx-x^2)^3}}} = \frac{\sqrt{(2rx)^3}}{rx}$$

und es ist daher $\varrho = 2\sqrt{2rx}$

da nun $\alpha e : \alpha m = \alpha m : \alpha\beta$

also $x : \alpha m = \alpha m : 2r$

so ist $(\alpha m)^2 = 2rx$, und es ist daher endlich

$$\varrho = 2(\alpha m)$$

Der Krümmungshalbmesser ist also zweimal so groß, als die Sehne αm des bereits abgerollten Bogens.

Aufgabe 2. Die Grundeigenschaften der Epicykloide sollen angegeben werden.

Auflösung. 1. Die Epicykloide wird durch einen bestimmten Punkt des Umfanges eines Kreises beschrieben, wenn derselbe über den Umfang eines andern Kreises hinweggerollt wird; wenn also a, Fig. 133, der Anfangspunkt der Curve ist, und m irgend ein Punkt derselben, der, indem der Erzeugungskreis den Grundkreis in a berührt, bestimmt wird, so muß der Bogen αa dem Bogen αm gleich sein, es müssen

nämlich beide gleiche Länge haben; wird daher der Winkel $aC\alpha = \varphi$ und $acm = \psi$ geſetzt, ſo müſſen dieſe zu einander ſich verhalten umgekehrt wie die Radien der Kreiſe; für $Ca = R$ und $ca = r$ muß alſo ſein

$$\varphi : \psi = r : R$$

es iſt daher $\psi = \frac{R}{r}\varphi$ und $\varphi + \psi = \left(\frac{R+r}{r}\right)\varphi$

wofür man ſetzen kann $\psi = n\varphi$ und $\varphi + \psi = m\varphi$, und es ſind nun n und m bekannte Coefficienten.

2. Es ſei $C\alpha$ die Abſciſſenlinie, $Cx = x$ und $xm = y$, ſo läßt ſich die Gleichung für die Curve auf folgende Art ableiten: Es iſt, wenn man die Normale cb auf $C\alpha$, und md auf cb fällt,

$\angle mcd = v = \psi - (90^0 - \varphi) = \varphi + \psi - 90^0 = m\varphi - 90^0$

und daher

$cd = r\cos v = r\cos(m\varphi - 90^0) = r\cos(90^0 - m\varphi) = r\sin m\varphi$

und $md = r\sin v = r\sin(m\varphi - 90^0) = -r\sin(90^0 - m\varphi)$

$= -r\cos m\varphi.$

Ferner iſt $Cb = (R+r)\cos\varphi$ und $cb = (R+r)\sin\varphi$

Da nun $x = (Cx) = Cb + md$ und $y = (xm) = cb - cd$

ſo iſt $x = (R+r)\cos\varphi - r\cos m\varphi$

und $y = (R+r)\sin\varphi - r\sin m\varphi$

Wollte man aus dieſen Werthen von x und y eine directe Gleichung zwiſchen x und y ableiten, ſo müßte φ eliminirt werden, was jedenfalls zu einem zuſammengeſetzten Ausdrucke führen würde; es iſt daher zweckmäßiger, die Coordinaten x und y als von φ abhängige veränderliche Größen anzuſehen, wobei nur nicht unbeachtet bleiben darf, daß hierdurch auch dx veränderlich wird.

3. Aus den gefundenen Werthen von x und y erhält man

$$dx = -(R+r)\,d\varphi\sin\varphi + m r\,d\varphi\sin m\varphi$$

$$dy = (R+r)\,d\varphi\cos\varphi - m r\,d\varphi\cos m\varphi$$

und weil $mr = R+r$, ſo iſt

$$dx = (R+r)\,d\varphi\,[\sin m\varphi - \sin\varphi]$$

und $dy = (R+r)\,d\varphi\,[\cos\varphi - \cos m\varphi]$.

Nun iſt bekanntlich ganz allgemein

die Subtangente $St = \frac{ydx}{dy}$ und die Subnormale $Sn = \frac{ydy}{dx}$

folglich ist für die Epicykloide

$$St = y\left(\frac{\sin m\varphi - \sin\varphi}{\cos\varphi - \cos m\varphi}\right)$$

und $$Sn = y\left(\frac{\cos\varphi - \cos m\varphi}{\sin m\varphi - \sin\varphi}\right)$$

4. Ist xn die Subnormale, so findet man die Fläche Z des Rechtecks, von welchem ng und xm die Seiten sind, durch den Ausdruck

$$Z = (ng)(xm) = (Sn + (xg))\,y = (Sn + x - (Cg))\,y$$
$$= y(Sn + x - R\cos\varphi)$$
$$= ySn\left(1 + \frac{x - R\cos\varphi}{Sn}\right)$$

und weil $x - R\cos\varphi = r(\cos\varphi - \cos m\varphi)$, so ist

$$Z = ySn\left(1 + \frac{r(\cos\varphi - \cos m\varphi)}{Sn}\right)$$

und weil $Sn = y\left(\frac{\cos\varphi - \cos m\varphi}{\sin m\varphi - \sin\varphi}\right)$, so wird

$$Z = ySn\left(1 + \frac{r(\sin m\varphi - \sin\varphi)}{y}\right)$$
$$= Sn\,(y + r(\sin m\varphi - \sin\varphi))$$

Es ist aber $y = (R + r)\sin\varphi - r\sin m\varphi$

und daher $y + r(\sin m\varphi - \sin\varphi) = R\sin\varphi$

folglich ist $Z = Sn \cdot R\sin\varphi$

und da $R\sin\varphi = (ag)$, so ist

$$Z = (nx)(ag).$$

Hiernach ist also

$$(ng)(xm) = (nx)(ag)$$

und daher $nx : xm = ng : ga$

folglich liegen die Punkte n, m und a in grader Linie, und da xn die Subnormale des Punktes m ist, so muß nm die Normale desselben sein. Die gefundene Proportion führt also zu dem Resultat, daß die Normale des Punktes m durch den Berührungspunkt a beider Kreise geht.

5. Die Formel für die Länge eines Bogens der Epicykloide läßt sich leicht auf folgende Art ableiten: Da

$$(dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

ſo auch, wenn man für dx und dy die Werthe aus No. 3.

$$(dS)^2 = 2(R+r)^2(1-\cos(m-1)\varphi)(d\varphi)^2$$

und weil $1-\cos(m-1)\varphi = 2\sin^2\left(\frac{m-1}{2}\right)\varphi$, ſo wird

$$dS = 2(R+r)\,d\varphi\,\sin\left(\frac{m-1}{2}\right)\varphi$$

Es iſt aber $m-1 = \frac{R+r}{\quad}$ $1 = \frac{R}{r}$ und daher $(m-1)\varphi$

$= n\varphi = \psi$, und $d\varphi$ $= \frac{r}{R}d\psi$; folglich iſt auch

$$dS = \frac{\quad -r)}{\quad}d\psi\sin\tfrac{1}{2}\psi$$

und hieraus erhält m lbar

$$S = \frac{4r(R+r)}{R}\int d\left(\frac{\psi}{2}\right)\sin\tfrac{1}{2}\psi = -\frac{4r(R+r)}{R}\cos\tfrac{1}{2}\psi + \text{Const}$$

und weil für $\psi = 0$ auch $S = 0$ werden muß, ſo iſt

$$0 = -\frac{4r(R+r)}{R} + \text{Const}, \text{ alſo } \text{Const} = \frac{4r(R+r)}{R}$$

und es iſt ſonach die Länge des Bogens

$$S = \frac{4r(R+r)}{R}(1-\cos\tfrac{1}{2}\psi).$$

6. Auch die Formel für den Krümmungshalbmeſſer läßt ſich nun leicht ableiten, denn da hier auch dx als veränderlich angenommen werden muß, ſo iſt

$$\varrho = \frac{(dS)^3}{dy\cdot d^2x - dx\cdot d^2y}$$

Da nun $d^2x = (R+r)\,[m\cos m\varphi - \cos\varphi](d\varphi)^2$

und $d^2y = (R+r)\,[m\sin m\varphi - \sin\varphi]\,(d\varphi)^2$

ſo erhält man nach gehöriger Reduction

$$dy\cdot d^2x - dx\cdot d^2y = -2(R+r)^2(m+1)\sin^2\left(\frac{m-1}{2}\right)\varphi\cdot(d\varphi)^2$$

$$= -2(R+r)^2\left(\frac{R+2r}{r}\right)\sin^2\tfrac{1}{2}\psi\left(d\frac{r}{R}\psi\right)^2$$

$$= \frac{-2(R+r)^2r^2(R+2r)}{R^3}\sin^2\tfrac{1}{2}\psi\,(d\psi)^2$$

da ferner $(dS)^3 = \frac{8r^3(R+r)^3}{R^3}\cdot\sin^3\tfrac{1}{2}\psi\,(d\psi)^3$

so wird $\varrho = \frac{8r^3(R+r)^3\sin^3\frac{1}{2}\psi\,(d\psi)^3}{-2(R+r)^2r^2(R+2r)\sin^2\frac{1}{2}\psi\,(d\psi)^3}$

$= -\frac{4r(R+r)}{R+2r}\cdot\sin\frac{1}{2}\psi.$

Aufgabe 3. Es sollen die Grundeigenschaften einer Hypocykloide angegeben werden.

Auflösung. 1. Die Hypocykloide wird durch einen bestimmten Punkt des Umfangs eines Kreises beschrieben, der innerhalb eines andern an dem Umfange desselben herumrollt. Ist, z. 134, aα ein Theil von dem Umfange des Grundkreises, so der die Curve erzeugende Kreis amβ von α bis a bereits abgerollt, und ist m ein Punkt der Curve, so muß der Bogen am = αa sein. Setzt man also Cα = R, ca = r, Cα = φ und ∠mca = ψ, so ist

$$\varphi : \psi = r : R$$

und daher $\psi = \frac{R}{r}\varphi = n\varphi.$

2. Von c fälle man die Normale cb auf Cα, und von b die md auf cb, so ist

$Cc : cb = 1 : \sin\varphi$ und $Cc : Cb = 1 : \cos\varphi$

oder $R - r : cb = 1 : \sin\varphi$ und $R - r : Cb = 1 : \cos\varphi$

ist also $(cb) = (R-r)\sin\varphi$ und $(Cb) = (R-r)\cos\varphi$

Ferner ist $cm : cd = 1 : \cos v$ und $cm : md = 1 : \sin v$

oder $r : cd = 1 : \cos v$ und $r : md = 1 : \sin v$

und daher $(cd) = r\cos v$ und $(md) = r\sin v$

Wird nun Cα als Abscissenlinie angenommen, Cx = x und xm = y gesetzt, so ist

$(Cx) = x = Cb + md = (R-r)\cos\varphi + r\sin v$

und $(xm) = y = cb - cd = (R-r)\sin\varphi - r\cos v$

Es ist aber $\psi + v + (90^0 - \varphi) = 180^0$

und daher $v = 90^0 + \varphi - \psi = 90^0 - (\psi - \varphi)$

Folglich ist $\sin v = \cos(\psi - \varphi)$ und $\cos\varphi = \sin(\psi - \varphi)$

und da $\psi - \varphi = \frac{R}{r}\varphi - \varphi = \frac{R-r}{r}\varphi = -\frac{R-r}{-r}\varphi$

ist, wenn man $\frac{R-r}{-r} = m$ setzt, $\psi - \varphi = -m\varphi$

daher $\sin(\psi-\varphi) = -\sin m\varphi$ und $\cos(\psi-\varphi) = \cos m\varphi$

ist also, wenn man diese Werthe setzt,

$$x = (R - r)\cos\varphi + r\cos m\varphi$$
$$\text{und } y = (R - r)\sin\varphi + r\sin m\varphi$$

Dieſe Gleichungen ſind von den für die Epicykloide nur dadurch verſchieden, daß hier überall r das entgegengeſetzte Zeichen hat, und es hätten dieſelben daher unmittelbar aus jenen abgeleitet werden können, wenn man dort $-r$ ſtatt r geſetzt hätte.

3. Da die Gleichungen für die Hypocykloide von den für die Epicykloide nicht verſchieden ſind, ſo folgt, daß auch beiden Curven dieſelben Eigenſchaften zukommen müſſen, und es läßt ſich daher hier eben ſo wie in No. 3. und 4. der vorigen Aufgabe beweiſen, daß, wenn an m eine Normale der Curve gezogen wird, in deren Richtung natürlich der Krümmungshalbmeſſer des Punktes m liegt, dieſe Normale durch den Berührungspunkt a beider Kreiſe gehen muß.

4. Auch die Formeln für die Länge eines Bogens der Hypocykloide und für den Krümmungshalbmeſſer derſelben laſſen ſich ganz auf dieſelbe Weiſe wie bei der Epicykloide ableiten.

5. Setzt man in den Gleichungen

$$x = (R - r)\cos\varphi + r\cos m\varphi$$
$$\text{und } y = (R - r)\sin\varphi + r\sin m\varphi$$

$r = \frac{1}{2}R$, alſo $m = -\frac{R-r}{r} = -1$, ſo wird

$$x = r\cos\varphi + r\cos(-\varphi) = 2r\cos\varphi = R\cos\varphi$$
$$\text{und } y = r\sin\varphi + r\sin(-\varphi) = r\sin\varphi - r\sin\varphi = 0$$

es ſind alſo in dieſem Falle die Ordinaten aller Punkte der Curve $= 0$, und dieſe iſt daher eine gerade Linie, ſie fällt nämlich mit dem Durchmeſſer des Grundkreiſes zuſammen.

Aufgabe 4. Die Grundeigenſchaften der ſphäriſchen Cykloide ſollen angegeben werden.

Auflöſung. 1. Wenn ein Kreis auf dem Umfange eines andern hinwegrollt, ohne daß beide in derſelben Ebene liegen, deren Ebenen jedoch unter einem unveränderlichen Winkel gegen einander geneigt ſind, ſo beſchreibt ein Punkt des rollenden Kreiſes die Curve, welche eine ſphäriſche Cykloide genannt wird. Errichtet man in dem Mittelpunkte des Grundkreiſes eine Normale auf der Ebene deſſelben, nimmt irgend

nen Punkt dieſer Normale als die Spitze, und den die Curve zeugenden Kreis als die Grundfläche eines normalen Kegels an, d läßt dieſen Kegel um den Umfang ſeiner Grundfläche ſich ehen, während die Spitze deſſelben ihre Lage unverändert bei- hält, ſo wird durch einen beſtimmten Punkt des Umfangs der rundfläche dieſes Kegels die ſphäriſche Cykloide beſchrieben, lche ihren Namen daher hat, weil jeder Punkt derſelben von m Punkte gleichweit abſteht, in welchem die Spitze des Kegels befindet, und die Curve daher auf der Oberfläche einer gel liegt, deren Radius der Seite des erzeugenden Kegels ich iſt.

2. Setzt man den Abſtand des Punkts, in welchem die itze des Kegels liegt, von dem Grundkreiſe = h, den Ra- s des Grundkreiſes = R, den der Grundfläche des Kegels r, die Axe deſſelben = H, die Seite des Kegels = S, den unveränderlichen Neigungswinkel der Ebene des Grund- ſes und des Erzeugungskreiſes = α, ſo hängen dieſe Grö- durch die Gleichungen von einander ab

$S^2 = R^2 + h^2$; $H^2 = S^2 - r^2$; alſo $H^2 = R^2 + h^2 - r^2$

es läßt ſich die Abhängigkeit des Winkels α von dieſen ßen auf folgende Art beſtimmen:

Es iſt in dem Viereck Cacg, Fig. 135a., C der Mittel- kt des Grundkreiſes, Ca = R der Radius deſſelben, g die itze des erzeugenden Kegels, alſo Cg = h, ca = r der dius der Grundfläche des Kegels, und gc = H die Axe elben, und daher $\angle Cac = \alpha$ der Neigungswinkel der Ebe- beider Kreiſe. Da nun bei C und c rechte Winkel ſind, ſt $\angle g = 180^0 - \alpha$, und es iſt, wenn man die Linie Cc gen denkt und dieſelbe = V ſetzt,

$$V^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha$$

und auch $V^2 = H^2 + h^2 - 2Hh\cos g$

nun $\cos g = -\cos\alpha$, ſo folgt aus dieſen beiden Glei- gen

$$H^2 + h^2 + 2Hh\cos\alpha = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha$$

hieraus folgt

$$\cos\alpha = \frac{R^2 + r^2 - H^2 - h^2}{2(Hh + Rr)}$$

weil $H^2 = R^2 + h^2 - r^2$, ſo wird

$$\cos\alpha = \frac{r^2 - h^2}{Hh + Rr} = \frac{R^2 - H^2}{Hh + Rr}$$

ilſt der Gleichung $H^2 = R^2 + h^2 - r^2$ noch eine die-
n im Nenner eliminirt werden kann.
icy für den Sinus des Neigungswinkels erhält man
infachen Ausdruck, denn es iſt

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{r^2 - h^2}{Hh + Rr}\right)^2$$

$$= \frac{\quad - (r^2 - h^2)^2}{+ Rr)^2}$$

oder weil $r^2 - h^2 =$

$$\sin^2\alpha = \frac{\quad (r^2 - h^2)(R^2 - H^2)}{Hh + Rr)^2}$$

$$= \frac{2HhRr}{(H.} \qquad \frac{\quad H^2}{} = \frac{(Rh + rH)^2}{(Hh + Rr)^2}$$

und es iſt daher $\sin\alpha = \dfrac{Rh + rH}{Hh + Rr}$

3. Die ſphäriſche Cykloide iſt eine Curve im Raume, und es iſt die Lage eines jeden Punktes derſelben daher durch drei Coordinaten beſtimmt, für welche die Gleichungen ſich auf folgende Art ableiten laſſen: Es ſei, Fig. 135, αa ein Bogen des Grundkreiſes, α der Anfangspunkt der Curve, und der Erzeugungskreis bis a fortgerollt, ſo iſt, für am = aα, m ein Punkt der Curve, wobei jedoch der Kreis am unter einem Winkel = α gegen den Grundkreis geneigt gedacht werden muß, und es iſt die gemeinſchaftliche Tangente ef des Punktes a die Durchſchnittslinie beider Ebenen. Trifft die Normale von m die Ebene des Grundkreiſes in y, und man ſetzt dieſe Normale = z, ſo iſt für die Abſciſſenaxe Cα die Lage von m durch z, Cx = x und xy = y beſtimmt. Wird nun durch m die Linie md normal auf ca gezogen, und iſt δ die Projection des Punktes d in der Ebene des Grundkreiſes, ſo muß δy parallel mit ef, und alſo auch mit md ſein, und der Abſtand der Punkte d und δ von einander iſt = z. Hiernach

$$(ad) : z = 1 : \sin\alpha \text{ und } (ad) : (a\delta) = 1 : \cos\alpha$$

und daher $z = (ad)\sin\alpha$ und $(a\delta) = (ad)\cos\alpha$

Es iſt aber $cm : cd = 1 : \cos\psi$

oder $r : (cd) = 1 : \cos\psi$

o (cd) = r cos ψ und daher (ad) = r − (cd) = r − r cos ψ
oder (ad) = r(1 − cos ψ) = r sin vers ψ
glich ist auch z = r sin vers ψ sin α und (aδ) = r sin vers ψ cos α
und weil Cδ = (ca) − (aδ) und mc : md = 1 : sin ψ
ist Cδ = R − r sin vers ψ cos α und md = δy = r sin ψ
mlich es ist, wenn man cδ = x′ und δy = y′ setzt,
x′ = R − r sin vers ψ cos α und y′ = r sin ψ
e Lage des Punktes y ist also durch die Coordinaten cδ = x′
δy = y′ bestimmt, und hieraus findet man die Werthe
Cx = x und xy = y durch die Gleichungen
x = x′ cos φ + y′ sin φ
und y = x′ sin φ − y′ cos φ
lich ist auch, wenn man für x′ und y′ die Werthe setzt,
x = (R − r sin vers ψ cos α) cos φ + r sin ψ sin φ
nd y = (R − r sin vers ψ cos α) sin φ − r sin ψ cos φ
hierzu kommt noch z = r sin vers ψ sin α
dieses sind die drei Gleichungen für die Coordinaten x, y
z, welche hier als Functionen der veränderlichen Winkel
und ψ erscheinen. Weil aber

$$\varphi : \psi = r : R, \text{ und daher } \psi = \frac{R}{r}\varphi$$

ist ψ durch φ bestimmt, und sonach sind die Coordinaten
h bloß von φ abhängig.

4. Es läßt sich nun auch die Formel für die Länge ei-
Bogens der Curve, so wie für den Krümmungshalbmesser
selben ableiten, und man kommt zu dem Resultat, daß die
chtung desselben durch den Berührungspunkt a beider Kreise geht.

Aufgabe 5. Aus den Gleichungen für die sphärische
kloide sollen die für die ebene Epicykloide und Hypocykloide
geleitet werden.

Auflösung. Die Gleichungen für die sphärische Cy-
loide sind
x = (R − r sin vers ψ cos α) cos φ + r sin ψ sin φ
y = (R − r sin vers ψ cos α) sin φ − r sin ψ cos φ
und z = r sin vers ψ sin α.
Sollen nun hieraus die Gleichungen für Epicykloide abgeleitet
rden, so muß α = 180° sein, und es ist alsdann sin α = 0, und
her, wie sich von selbst versteht, z = 0 und cos α = −1, also

$$x = (R + r\,\text{sin vers}\,\psi)\cos\varphi + r\sin\psi\sin\varphi$$
$$= (R + r(1 - \cos\psi))\cos\varphi + r\sin\psi\sin\varphi$$
$$= (R + r)\cos\varphi - r(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi)$$
$$= (R + r)\cos\varphi - r\cos(\varphi + \psi)$$
und $y = (R + r\,\text{sin vers}\,\psi)\sin\varphi - r\sin\psi\cos\varphi$
$$= (R + r(1 - \cos\psi))\sin\varphi - r\sin\psi\cos\varphi$$
$$= (R + r)\sin\varphi - r(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)$$
$$= (R + r)\sin\varphi - r\sin(\varphi + \psi)$$

und wenn man in [illegible] ücken $\varphi + \psi = \frac{R+r}{r}\varphi = m\varphi$

ſetzt, ſo erhält man

$$x = [\text{illegible}]s\varphi - r\cos m\varphi$$
und $y = [\text{illegible}]\varphi - r\sin m\varphi$

welche mit den, in [illegible] No. 2., gefundenen Gleichungen übereinſtimmen.

Sollen aus den allgemeinen Gleichungen die für die Hypocykloide abgeleitet werden, ſo muß man $\alpha = 0$ ſetzen, und d[illegible] iſt alsdann ebenfalls $z = 0$ und $\cos\alpha = +1$, alſo

$$x = (R - r\,\text{sin vers}\,\psi)\cos\varphi + r\sin\psi\sin\varphi$$
$$= (R - r(1 - \cos\psi))\cos\varphi + r\sin\psi\sin\varphi$$
$$= (R - r)\cos\varphi + r(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi)$$
$$= (R - r)\cos\varphi + r\cos(\varphi - \psi)$$
und $y = (R - r\,\text{sin vers}\,\psi)\sin\varphi - r\sin\psi\cos\varphi$
$$= (R - r(1 - \cos\psi))\sin\varphi - r\sin\psi\cos\varphi$$
$$= (R - r)\sin\varphi + r(\sin\varphi\cos\psi - \sin\psi\cos\varphi)$$
$$= (R - r)\sin\varphi + r\sin(\varphi - \psi)$$

und es wird hieraus für $\varphi - \psi = m\varphi$ erhalten

$$x = (R - r)\cos\varphi + r\cos m\varphi$$
und $y = (R - r)\sin\varphi + r\sin m\varphi$

Gleichungen, welche mit den, Aufgabe 3., gefundenen übereinſtimmen.

Aufgabe 6. Es ſollen aus den Gleichungen für die Epicykloide die für die gemeine Cykloide abgeleitet werden.

Auflöſung. Die Gleichungen für die Epicykloide ſind

$x = (R + r)\cos\varphi - r\cos m\varphi$, alſo $R + r = \frac{x + r\cos m\varphi}{\cos\varphi}$

und $y = (R + r)\sin\varphi - r\sin m\varphi$, alſo $R + r = \frac{y + r\sin m\varphi}{\sin\varphi}$

es ist daher, wenn die beiden Werthe von R + r einander gleich gesetzt werden,

$$\frac{x + r\cos m\varphi}{\cos\varphi} = \frac{y + r\sin m\varphi}{\sin\varphi}$$

daher $x\sin\varphi + r\sin\varphi\cos m\varphi = y\cos\varphi + r\cos\varphi\sin m\varphi$

weil $m\varphi = \varphi + \psi$, so wird

$x\sin\varphi = x\sin\varphi - r[\sin(\varphi+\psi)\cos\varphi - \cos(\varphi+\psi)\sin\varphi]$

nämlich es ist $y\cos\varphi = x\sin\varphi - r\sin\psi$.

Um nun hieraus die Gleichung für die gemeine Cykloide abzuleiten, muß, Fig. 133, der Radius R des Grundkreises $= \infty$ angenommen werden, wodurch

$$\varphi = \frac{r}{R}\psi = \frac{r\psi}{\infty} \text{ unendlich klein wird}$$

und es ist sonach $\cos\varphi = 1$ und $\sin\varphi = \frac{r\psi}{R}$

so die Gleichung für die Cykloide

$$y = x \cdot \frac{r\psi}{R} - r\sin\psi$$

Es ist aber, Fig. 133, $x = (Cx) = R + (\alpha x)$, wofür, weil $R = \infty$ ist, $x = R$ gesetzt werden kann, und es wird daher

$$y = r\psi - r\sin\psi$$

Nimmt man aber, Fig. 132, den Bogen $ad = \alpha m$ für den Radius $= r$, $ax = x$ und $xm = y$, so ist

$$r\psi = \text{Bogen } ad = r\,\text{Arc sin vers}\frac{x}{r}$$

und $r\sin\psi = (xd) = \sqrt{x(2r-x)} = \sqrt{(2rx - x^2)}$

folglich ist, wenn man diese Werthe setzt,

$$y = r\,\text{Arc sin vers}\frac{x}{r} - \sqrt{(2rx - x^2)}$$

die Gleichung für die gemeine Cykloide, welche mit der, Aufgabe 1., gefundenen übereinstimmt.

Zusatz. Nach Aufgabe 2. No. 6. ist die Formel für den Krümmungshalbmesser der Epicykloide

$$\varrho = \frac{4r(R+r)}{R+2r}\sin\tfrac{1}{2}\psi$$

nun, wenn man $R = \infty$ setzt, $R + r = R + 2r$ wird, für die gemeine Cykloide $\varrho = 4r\sin\frac{1}{2}\psi$.

Es iſt aber, Fig. 132, $r \sin \frac{1}{2}\psi = \frac{1}{2}(cm)$, folglich iſt der Krümmungshalbmeſſer für die gemeine Cykloide

$$\rho = 4 \times \tfrac{1}{2}(cm) = 2(cm).$$

§. 76.

Aufgaben zur Beſtimmung der Form der Zähne und Linien

Aufgabe 1. Ein Getriebe wird durch eine grade, gezahnte Stange oder [illegible] n ſogenannten Kammbaum bewegt; es ſoll die F[illegible]hne des Kammbaums beſtimmt werden.

Auflöſung. D[illegible] der Zähne des Kammbaums hängt natürlich v[illegible] der Stöcke des Getriebes ab, die hierbei als beka[illegible]eſetzt werden muß, und es ſind daher drei Fälle zu u[illegible]n. Werden nämlich

1. die Stäbe als bloße materielle Linien angeſehen, und es iſt MN, Fig. 136, der Kammbaum, aa′ ein Zahn deſſelben, amm der Umfang des Getriebes, und a einer von den Triebſtöcken, ſo wird, indem a bis α vorrückt, der Punkt a in dem Getriebe bis m gedreht; da nun die Bewegung rollend ſein muß, ſo iſt am = aα, und m ein Punkt der Curve αmα′, nach welcher die Zähne gekrümmt ſein müſſen; hieraus geht hervor, daß αmα′ eine Cykloide iſt, die den Umfang amm des Getriebes zum Erzeugungskreiſe hat. Bei der Cykloide geht aber die Normale des Punktes m durch den Berührungspunkt a (nach §. 75. Aufgabe 1. No. 3.); folglich iſt die bewegende Kraft conſtant, wie aus §. 74. Aufgabe 4. ſich ergiebt, und es entſprechen daher die Zähne, wenn ſie die Form einer gemeinen Cykloide haben, allen Anforderungen der zweckmäßigſten Geſtalt.

2. Sind die Triebſtöcke Cylinder, die man nicht als bloße materielle Linien anſehen darf, ſondern muß auch die Dicke derſelben berückſichtigt werden, ſo bleibt noch immer die Form der Curve αmα′ dieſelbe, es muß dieſe Linie aber durch die Axe der Triebſtöcke gehen, und die Form der Zähne wird alſo erhalten, wenn man zu αmα′ in einer Entfernung von derſelben, welche dem Halbmeſſer der Cylinder gleich iſt, eine parallele Curve zieht.

3. Iſt das Getriebe mit Zähnen verſehen, die eine ebene

che haben, so muß die Normale ma des Punktes m der ve zugleich auch normal auf der Ebene des Zahns von x Getriebe sein, und es muß daher die Tangente mg des nktes m in der Ebene des Zahnes liegen. Da nun die nen der Zähne sich in der Axe des Getriebes schneiden, so t, daß g ein Punkt dieser Axe ist, und es ist daher ga der Bmesser des Getriebes. Hieraus geht also hervor, daß, n das Getriebe mit Zähnen versehen ist, die eine ebene che haben, die Zähne des Kammbaums in einer Cykloide ümmt sein müssen, deren Erzeugungskreis den Halbmesser Getriebes zum Durchmesser hat.

Aufgabe 2. Ein Getriebe wird durch ein Stirnrad be- t; es soll die vortheilhafteste Gestalt der Zähne des Stirn- es angegeben werden.

Auflösung. Es sei, Fig. 130, C der Mittelpunkt des des und c der des Getriebes, so wird, wenn das Rad sich der Richtung MaN dreht, das Getriebe in der Richtung m herumgetrieben, indem der Zahn aa' den Punkt a des triebes fortschiebt, und es wird, wenn a bis α sich gedreht t, der fortgeschobene Punkt des Getriebes in m sich befin- n, und hier den Zahn berühren. Da nun bei der vortheil- ftesten Gestalt der Zähne die Bewegung wälzend sein muß, folgt, daß die Zähne nothwendig eine solche Form haben üssen, daß, für jede Lage des Punktes m, die Bogen aα und n gleiche Länge haben, und die Normale des Punktes m nch den Berührungspunkt a beider Kreise geht. Hieraus lgt; daß die Form der Zähne durch die, von dem Punkt m ährend der Bewegung von a bis m, beschriebene Curve αm stimmt ist, und es ist diese Curve eine Epicykloide. Indes- n sind hier nach der verschiedenen Form der Stäbe oder hne des Getriebes folgende Fälle zu unterscheiden:

1. Ist das Getriebe mit kreisrunden Stäben versehen, ist $\alpha a'$ ein Bogen der Epicykloide, welche durch die Axe s Stabes geht, und die Krümmung des Zahns wird erhal- n, wenn man mit $\alpha a'$, in einer Entfernung, welche dem Ra- us des Stabes gleich ist, eine Parallele zieht, und es ist in i Falle der Umfang des Getriebes der Erzeugungskreis

der Epicykloide, und der Umfang des Rades ist der Grund-
kreis derselben.

2. Hat das Getriebe Zähne mit ebener Fläche, so muß
diese eine Berührungsfläche für den Punkt m sein, in welchem sie mit einem Zahne des Stirnrades zusammentrifft, und es wird daher durch die auf am normale Tangente ma die Lage der Oberfläche des Zahnes von dem Getriebe bestimmt. Da nun ∠ame = 90°, so ist ae der Durchmesser des Erzeugungskreises der E[illegible] nach welcher die Zähne des Rades gekrümmt si[illegible] ie Richtung der Zähne durch die Axe des Getriebes, [illegible], diese Richtungen sich aber in e schneiden, so folg[illegible] daß e in diesem Falle der Mittelpunkt des Getri[illegible] es ist sonach, wenn die Zähne des Getriebes eine [illegible]he haben, der Halbmesser des Getriebes der Durch[illegible]s Erzeugungskreises der Epicykloide. Nun wird zwar hierdurch der oben angegebenen Bedingung, daß die Bogen beider Kreise gleich groß sein müssen, nicht Genüge geleistet; es ist aber alsdann am kein Bogen des Umfangs von dem Getriebe, weil e der Mittelpunkt desselben und em < ea ist. Die Bewegung ist aber dessen ungeachtet wälzend, weil jetzt der Erzeugungskreis ame der Epicykloide zugleich als der einer Hypocykloide angesehen werden kann, die innerhalb des Umfangs des Getriebes beschrieben wird, und diese Hypocykloide ist in diesem Falle eine gerade Linie, da der Radius des Erzeugungskreises halb so groß ist, als der des dazu gehörigen Grundkreises.

3. Hieraus geht nun zugleich hervor, daß bei zwei in einander eingreifenden, gezahnten Rädern die Zähne auch geformt werden können, daß man, für einen und denselben Erzeugungskreis, die des Rades nach einer Epicykloide und die des Getriebes nach einer Hypocykloide krümmt.

Aufgabe 3. Ein Getriebe wird durch ein Kammrad bewegt; es soll die vortheilhafteste Form der Kämme des Kammrades angegeben werden.

Auflösung. Bei dem Kammrade liegen die Axen der Zähne nicht in der Ebene des Rades, und der Durchschnitt des Getriebes ist daher eine Ebene, welche die des Rades unter irgend einem Neigungswinkel schneidet. Da nun die

ung durchgehend wälzend sein muß, so folgt, daß das Ge-
e auf dem Umfange des Kammrades eine sphärische Cy-
e beschreibt, und es ist hierdurch die Form der Kämme
nmt. Die Größe des Erzeugungskreises der hierbei zu
chenden sphärischen Cykloide ist in diesem Falle, eben so
bei den beiden vorhergehenden Aufgaben, von der Form
Stäbe oder Zähne des Getriebes abhängig.

Aufgabe 4. Ein Getriebe wird durch ein Stirnrad be-
; es soll die erforderliche Länge der Zähne des Rades an-
ben werden.

Auflösung. Der Zahn aa' darf bei m, Fig. 130, den
Bstock des Getriebes nicht früher verlassen, als bis der
nde Triebstock bei a mit dem nächsten Zahne aa' zusam-
trifft, und es ist daher, wenn ma die Theilung des Ge-
es ist, μm die erforderliche Länge der Zähne, wenn die
runden Triebstöcke als bloße materielle Linien angesehen
den. Ist aber mo $= \rho$ der Halbmesser der Triebstöcke, so
d die erforderliche Länge der Zähne erhalten, wenn man
gezogen denkt, und von dieser Linie den Radius des Ra-
Ca $=$ R abzieht.

Ist der zu der Theilung am $=$ c gehörige Centriwinkel
Getriebes acm $=$ c, so ist in dem Dreieck cCm

$$(Cm)^2 = (Cc)^2 + (cm)^2 - 2\,(Cc)\,(cm)\cos c$$

daher auch, weil Ca $=$ R, ca $=$ cm $=$ r, wenn die
ge mμ des Zahnes $=$ x gesetzt wird,

$$(R+x)^2 = (R+r)^2 + r^2 - 2(R+r)\,r\cos c$$

glich ist $x = -R + \sqrt{[(R+r)^2 + r^2 - 2(R+r)\,r\cos c]}$
erforderliche Länge des Zahnes für kreisrunde Triebstöcke,
fern dieselben bloß als materielle Linien angesehen werden.

Nimmt man aber auf den Radius mo $= \rho$ derselben
ksicht, so wird Co $=$ R $+$ x. Es ist aber in dem gleich-
nkligen Dreieck acm die Linie am $= 2r\sin\frac{1}{2}c$, also ao $=$
$\sin\frac{1}{2}c - \rho$ und $\angle cam = \frac{180^0 - c}{2} = 90^0 - \frac{1}{2}c$, folglich
am $= 90^0 + \frac{1}{2}c = \varphi$. Da nun

$$(Co)^2 = (Ca)^2 + (ao)^2 - 2\,(Ca)\,(ao)\cos\varphi$$

auch $(R+x)^2 = R^2 + (2r\sin\frac{1}{2}c - \rho)^2 - 2R(\sin\frac{1}{2}c - \rho)\cos\varphi$
weil $\cos\varphi = \cos(90^0 + \frac{1}{2}c) = -\cos(90^0 - \frac{1}{2}c) = -\sin\frac{1}{2}c$

ſo wird $(R+x)^2=R^2+(2r\sin\frac{1}{2}c-\varrho)^2+2R(2r\sin\frac{1}{2}c-\varrho)\sin\frac{1}{2}c$ und hieraus folgt

$x=-R+\sqrt{[R^2+(2r\sin\frac{1}{2}c-\varrho)^2+2R(2r\sin\frac{1}{2}c-\varrho)\sin\frac{1}{2}c]}$ die Formel für die kleinſte Länge der Zähne bei kreisrunden Triebſtöcken.

Iſt das Getriebe aber mit Zähnen verſehen, die eine ebene Fläche haben, ſo iſt ae der Halbmeſſer des Getriebes, und daher, wenn der Centriwinkel für die Theilung $= c$ geſetzt wird, $ae = r$ und $\angle aem = c$, folglich iſt $em = r\cos c$. Da nun

$$(Cm)^2 = (Ce)^2+(em)^2-2(Ce)(em)\cos c$$

ſo iſt jetzt

$$(R+x)^2 = (R+r)^2+(r\cos c)^2-2(R+r)r\cos c\cdot\cos c$$

nämlich es iſt

$$\begin{aligned}(R+x)^2 &= R^2+2Rr+r^2+r^2\cos^2 c-2Rr\cos^2 c-2r^2\cos^2 c\\ &= R^2+2Rr(1-\cos^2 c)+r^2(1-\cos^2 c)\\ &= R^2+2Rr\sin^2 c+r^2\sin^2 c\end{aligned}$$

alſo $(R+x)^2 = R^2+r(2R+r)\sin^2 c$

und daher $x=-R+\sqrt{[R^2+r(2R+r)\sin^2\frac{1}{2}c]}$.

Zuſatz. Aus der hier mitgetheilten Anleitung zur Berechnung der kleinſten Länge der Zähne für den Fall, wenn ein Getriebe durch ein Stirnrad bewegt wird, läßt ſich nun das Verfahren für andere Fälle leicht ableiten, und es kann dieſes daher der eigenen Uebung überlaſſen bleiben.

Aufgabe 5. Es ſoll die erforderliche Kraft angegeben werden, um die bei einem durch ein Stirnrad bewegten Getriebe zwiſchen Zahn und Stock ſtattfindende Friction zu überwinden.

Auflöſung. Man ſetze die an dem Punkt a, Fig. 130, tangential wirkende Kraft, durch welche die Bewegung erzeugt wird, $= P$, und zerlege dieſe Kraft in zwei Theilkräfte, welche die Richtungen aC und am haben, ſo fällt die Richtung der letztern, deren Größe $= X$ ſein ſoll, mit der Normale des Punktes m der Curve, nach welcher die Zähne gekrümmt ſind, zuſammen. Hiernach iſt X der normale Druck des Zahns gegen den Stock, wodurch eine Friction $= \mu X$ entſteht, die durch eine eben ſo große Kraft in der Richtung der Tangente mo aufgehoben wird. Wird nun mz normal auf Cm gezogen, ſo

[illegible] μX als aus zwei Seitenkräften bestehend angesehen wer-
[illegible] die in den Richtungen mC und mn wirken. Setzt man
[illegible] letztere dieser beiden Kräfte $= Z$ und $Ca = z$, so ist das
[illegible] derselben $= zZ$, und da an dem Punkte a die Z
[illegible] Kraft P hat ein Moment $= RP$, weil $Ca = R$
[illegible] Es muß also

$$RP' = zZ \text{ sein, und daher } P' = \frac{zZ}{R}$$

[illegible] an dem Umfange des Rades erforderliche Kraft P, durch
[illegible] die Friction überwältigt wird, ist also durch die Glei-
[illegible] $P' = \frac{zZ}{R}$ bestimmt, wobei es nun darauf ankommt, die
[illegible] von z und Z durch bekannte Größen auszudrücken.
[illegible] in der Richtung mo wirkende Kraft $= \mu X$ besteht, nach
[illegible] obigen Annahme, aus zwei Seitenkräften in den Richtun-
[illegible] mC und mz, und es ist die letztere $= Z$ gesetzt worden.
[illegible] nach ist

$$\mu X : Z = 1 : \sin(omC)$$

[illegible] aber om verlängert durch den Endpunkt e des Durch-
[illegible] ae geht, so ist

$$Ce : Cm = \sin(Cme) : \sin e = \sin(omC) : \sin\tfrac{1}{2}c$$

[illegible] der zu der Theilung am gehörige Centriwinkel $acm = c$
[illegible] wird, und es ist daher auch, weil $Ce = R + 2r$ und
[illegible] $= z$,

$$R + 2r : z = \sin(omC) : \sin\tfrac{1}{2}c$$

$$\text{folglich ist } \sin(omC) = \frac{(R + 2r)\sin\frac{1}{2}c}{z}$$

[illegible] der Proportion $\mu X : Z = 1 : \sin(omC)$ aber folgt

$$\sin(omC) = \frac{Z}{\mu X}$$

$$\text{also ist } \frac{Z}{\mu X} = \frac{(R + 2r)\sin\frac{1}{2}c}{z}$$

[illegible] hieraus erhält man

$$zZ = \mu X (R + 2r)\sin\tfrac{1}{2}c$$

[illegible] weil $P' = \frac{zZ}{R}$, so ist auch

$$P' = \frac{\mu X (R + 2r)\sin\frac{1}{2}c}{R}$$

wo es jetzt nur noch darauf ankommt, den Werth von X zu
her zu beſtimmen. Es iſt aber X die Seitenkraft in der Rich
tung am der, tangential an a wirkenden Kraft P, und es
die zweite Seitenkraft die Richtung aC, folglich iſt

$$P : X = \sin(Cam) : \sin 90^\circ$$

oder $P : X = \sin(90^\circ + \frac{1}{2}c) : 1$

und daher $X = \frac{P}{\sin(90^\circ+\frac{1}{2}c)} = \frac{P}{\cos\frac{1}{2}c}$

Setzt man dieſen [illegible], ſo wird

$$P' = \frac{(R+2r)\sin\frac{1}{2}c}{R}$$

und daher e [illegible] $= \left(\frac{R+2r}{R}\right)\mu P \operatorname{tg}\frac{1}{2}c$

der Ausdruck für die [illegible] erwindung der Friction erfo
liche Vermehrung der [illegible].

Aufgabe 6. Das Getriebe, welches durch ein Et
rad bewegt wird, iſt mit Zähnen verſehen, die eine ebene Fl
haben; es ſoll die zur Ueberwindung der Friction zwiſ
den Zähnen erforderliche Vermehrung der bewegenden K
angegeben werden.

Auflöſung. Es iſt hier, wie bei der vorigen Aufg
die geſuchte Kraft P′ durch die Gleichung beſtimmt

$$P' = \frac{zZ}{R}$$

und man hat eben ſo wie dort

$$\mu X : Z = 1 : \sin(omC), \text{ alſo } \sin(omC) = \frac{Z}{\mu X}$$

$$\text{und } Ce : Cm = \sin(omC) : \sin e$$

jetzt iſt aber e der Mittelpunkt des Getriebes, alſo Ce = r
und $\angle e = c$, folglich wird

$$R+r : z = \sin(omC) : \sin c, \text{ alſo } \sin(omC) = \frac{(R+r)}{z}$$

und es iſt daher, wenn die beiden Werthe von sin(omC)
ander gleich geſetzt werden,

$$\frac{Z}{\mu X} = \frac{(R+r)\sin c}{z}, \text{ alſo } zZ = \mu X (R+r)\sin c$$

$$\text{und hiernach } P' = \frac{\mu X (R+r)\sin c}{R}$$

ner ist jetzt wieder, wie in Aufgabe 5.,

$$P : X = \sin(Cam) : \sin 90^0$$

ist aber e der Mittelpunkt des Getriebes ist, so wird Cam $e + 90^0 = 90^0 + c$, und daher

$$P : X = \sin(90^0 + c) : 1$$

folglich ist jetzt $X = \frac{P}{\sin(90^0 + c)} = \frac{P}{\cos c}$

etzt man diesen Werth für X, so wird erhalten

$$P' = \frac{\mu P}{\cos c} \cdot \frac{(R + r)\sin c}{R}$$

nämlich es ist $P' = \left(\frac{R+r}{R}\right)\mu P \operatorname{tg} c$

e erforderliche Kraft.

Zusatz 1. Setzt man in der Formel $P' = \left(\frac{R+r}{R}\right)\mu P \operatorname{tg} c$ en Radius $R = \infty$, so wird das Stirnrad eine gezahnte Stange, und es ist alsdann $\frac{R+r}{R} = 1$, folglich ist die zur Ueberwältigung der Friction erforderliche Kraft, wenn ein Kammum ein gezahntes Getriebe bewegt, durch die Gleichung bemmt

$$P' = \mu P \operatorname{tg} c$$

oll die zur Ueberwältigung der Friction erforderliche Kraft r den Fall bestimmt werden, wenn das durch den Kammum bewegte Getriebe mit kreisrunden Triebstöcken versehen , so muß in der Formel Aufgabe 5.

$$P' = \left(\frac{R+2r}{R}\right)\mu P \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c$$

$= \infty$ gesetzt werden, wodurch nun $\frac{R+2r}{R} = 1$ wird, und ist daher alsdann

$$P' = \mu P \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}c.$$

Zusatz 2. Setzt man die Anzahl der Zähne des Stirnes $= N$, und die Anzahl der Triebstöcke $= n$, so ist

$$R : r = N : n$$

also $R : R + r = N : N + n$ und $\frac{R+r}{R} = \frac{N+n}{N}$

und $R : R+2r = N : N+2n$ und $\frac{R+2r}{R} = \frac{N+2n}{N}$

und es ist nun $c = \frac{360^0}{n}$, also $\frac{1}{2}c = \frac{180^0}{n}$

folglich ist die zur Ueberwältigung der Friction erforderliche Kraft, wenn das Getriebe mit Triebstöcken versehen ist,

$$P' = \left(\frac{N+2n}{N}\right)\mu P \operatorname{tg}\frac{180}{n}$$

und für ein gezahntes Getriebe

$$P' = \left(\frac{N+n}{N}\right)\mu P \operatorname{tg}\frac{360}{n}$$

§. 77.

Einige Aufgaben von der Evolvente des Kreises.

Denkt man sich um einen Kreis and, Fig. 137, einen vollkommen biegsamen Faden gelegt, und wickelt diesen so ab, daß der abgewickelte Theil immer in gleicher Spannung erhalten wird, und stets in der Ebene des Kreises bleibt, so hat, wenn die Abwicklung von a bis n geschehen ist, der Faden die Lage nm, und es ist nun nm eine Tangente des Punktes n des Kreises, und zugleich ist die Linie nm dem bereits abgewickelten Bogen na des Kreises gleich. Bei dieser Abwickelung nun beschreibt der Endpunkt a des Fadens eine Curve, welche die Evolvente des Kreises genannt wird, und den Kreis selbst nennt man in diesem Falle, in Beziehung auf die dazu gehörige Evolvente, die Evolute. Statt des Kreises kann übrigens auch durch jede andere Curve, als Evolute, eine dazugehörige Evolvente durch Abwicklung erzeugt werden; doch ist für die gegenwärtige Absicht, wo die zweckmäßigste Form des Daumens einer Daumenwelle ermittelt werden soll, die Evolvente des Kreises besonders wichtig.

Aufgabe 1. Es sollen die Gleichungen für die Evolvente eines Kreises bestimmt werden.

Auflösung. Man ziehe von dem Mittelpunkte c des Kreises durch den Anfangspunkt a der Curve die Linie ca, nehme diese als Abscissenlinie an, und setze $cx = x$, $xm = y$, und den Winkel $acn = \varphi$. Ferner sei der Radius $ca = R$, so ist der Bogen $an = R\varphi$, wo φ nicht als durch Grade ge-

ckt gedacht werden muß, sondern seiner Länge nach, für Radius = 1. Da nun der Punkt m der Curve durch bscisse cn = R und die Ordinate nm = Rφ bestimmt läßt sich die Lage desselben für die Coordinaten cx = x xm = y durch die Gleichung bestimmen

$$x = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi$$

und $y = x' \sin\varphi - y' \cos\varphi$

es hier $x' = (cn) = R$ und $y' = (nm) = R\varphi$, also die gesuchten Gleichungen

$$x = R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi$$

und $y = R\sin\varphi - R\varphi\cos\varphi$

Aufgabe 2. Die Länge S eines Bogens am der Kreisente soll bestimmt werden.

Auflösung. Aus den gefundenen Gleichungen folgt

$-Rd\varphi\sin\varphi + R\varphi d\sin\varphi + Rd\varphi \cdot \sin\varphi = R\varphi d\varphi\cos\varphi$

$dy = Rd\varphi\cos\varphi - R\varphi d\cos\varphi - Rd\varphi\cdot\cos\varphi = R\varphi d\varphi\sin\varphi$

nun $(dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

ist auch $(dS)^2 = R^2\varphi^2(d\varphi)^2\cos^2\varphi + R^2\varphi^2(d\varphi)^2\sin^2\varphi$

doch es ist $(dS)^2 = R^2\varphi^2(d\varphi)^2[\cos^2\varphi + \sin^2\varphi] = R^2\varphi^2(d\varphi)^2$

und daher $dS = R\varphi d\varphi$

folglich ist $S = \frac{1}{2}R\varphi^2 + \text{Const}$

aber für $\varphi = 0$ auch $S = 0$ werden muß, so ist die Konstante ebenfalls = 0, und es ist daher

$$S = \tfrac{1}{2}R\varphi^2$$

Aufgabe 3. Die Größe des Krümmungshalbmessers des Punktes m der Evolvente wird gesucht.

Auflösung. Die allgemeine Formel für den Krümmungshalbmesser ϱ ist

$$\varrho = \frac{[(dx)^2 + (dy)^2]^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x} = \frac{(dS)^3}{dxd^2y - dyd^2x}$$

ist

$dy = R\varphi d\varphi\sin\varphi$ und $dx = R\varphi d\varphi\cos\varphi$

und daher $d^2y = R\varphi(d\varphi)^2\cos\varphi + R(d\varphi)^2\sin\varphi$

und $d^2x = -R\varphi(d\varphi)^2\sin\varphi + R(d\varphi)^2\cos\varphi$

$$= R^2\varphi^2(d\varphi)^3\cos^2\varphi + R^2\varphi(d\varphi)^3\sin\varphi\cos\varphi$$

$$= R^2\varphi^2(d\varphi)^3\sin^2\varphi - R^2\varphi(d\varphi)^3\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\text{also } dx\,d^2y - dy\,d^2x = R^2\varphi^2(d\varphi)^2$$

folglich wird

$$\varrho = \frac{(dS)^3}{R^2\varphi^2(d\varphi)^3}$$

und weil $dS = R\varphi d\varphi$, so ist

$$\varrho = \frac{R^3\varphi^3(d\varphi)^3}{R^2\varphi^2(d\varphi)^3} = R\varphi$$

Die Linie mn ist aber ebenfalls $= R\varphi$, folglich ist, für jeden Punkt m der Curve, der abgewickelte Theil mn des Fadens, der Krümmungshalbmesser der Größe nach, wie sich auch unmittelbar erkennen läßt, da, wenn der Faden noch weiter abgewickelt wird, der kleine Theil $m\mu$ des Bogens der Curve unbedingt mit dem Radius nm beschrieben wird, woraus zugleich hervorgeht, daß nm der Krümmungshalbmesser auch der Lage nach ist.

Zusatz. Daß nm nicht nur der Größe, sondern auch der Lage nach der Krümmungshalbmesser ist, kann unmittelbar auf folgende Art bewiesen werden: Man ziehe an den Punkt m die Tangente mt, so ist xt die Subtangente $=$ St des Punktes m, und es ist daher, wenn $\angle mtx = \psi$ gesetzt wird,

$$tx : xm = 1 : tg\psi$$

$$\text{oder } St : y = 1 : tg\psi, \text{ also } tg\psi = \frac{y}{St}$$

und weil ganz allemein $St = \frac{ydx}{dy}$, so folgt

$$tg\psi = \frac{dy}{dx}$$

nämlich es ist, wenn man für dy und dx die Werthe aus Aufgabe 2. setzt,

$$tg\psi = \frac{R\varphi d\varphi \sin\varphi}{R\varphi d\varphi \cos\varphi} = tg\varphi$$

und hieraus folgt $\psi = \varphi$. Die Tangente mt läuft also mit dem Radius nc parallel, und daher muß die Normale des Punktes m auch normal auf cn sein, und da mn als Tangente des Kreises auf cn normal ist, so muß die Normale des Punktes m, und daher auch der Krümmungshalbmesser mit mn der Richtung nach zusammenfallen. Es ist also wie-

lich mn der Krümmungshalbmeſſer der Größe und der Lage nach.

Aufgabe 4. Es ſoll der Inhalt der von der Curve am und den graden Linien ax und xm eingeſchloſſenen Fläche beſtimmt werden.

Auflöſung. Setzt man den geſuchten Inhalt der Fläche = Z, ſo iſt ganz allgemein

$$Z = \int y\,dx$$

da nun hier $y = R\sin\varphi - R\varphi\cos\varphi$ und $dx = R\varphi d\varphi\cos\varphi$, ſo wird

$$Z = R^2\int[\varphi d\varphi\sin\varphi\cos\varphi - \varphi^2 d\varphi\cos^2\varphi]$$
$$= R^2\int\left[\tfrac{1}{2}\varphi d\varphi\sin 2\varphi - \varphi^2 d\varphi\cdot\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right]$$

und wenn man $2\varphi = \psi$ ſetzt, ſo wird

$$Z = R^2\int[\tfrac{1}{8}\psi d\psi\sin\psi - \tfrac{1}{2}\varphi^2 d\varphi - \tfrac{1}{16}\psi^2 d\psi\cos\psi]$$

und es iſt daher $\frac{Z}{R^2} = \frac{1}{8}\int\psi d\psi\sin\psi - \frac{1}{16}\int\psi^2 d\psi\cos\psi - \frac{\varphi^3}{6}$

und $\frac{Z}{R^2} + \frac{\varphi^3}{6} = \frac{1}{8}\int\psi d\psi\sin\psi - \frac{1}{16}\int\psi^2 d\psi\cos\psi.$

Nach Meier Hirſch's Integraltafeln Seite 288. iſt aber

$$\int\psi d\psi\sin\psi = -\psi\cos\psi + \sin\psi$$

und $\int\psi^2 d\psi\cos\psi = \psi^2\sin\psi + 2\psi\cos\psi - 2\sin\psi$

folglich iſt auch, wenn man dieſe Werthe ſetzt,

$$\frac{Z}{R^2} + \frac{\varphi^3}{6} = \tfrac{1}{8}(-\psi\cos\psi + \sin\psi) - \tfrac{1}{16}(\psi^2\sin\psi + 2\psi\cos\psi - 2\sin\psi)$$
$$= -\frac{\varphi\cos 2\varphi}{4} + \frac{\sin 2\varphi}{8} - \frac{\varphi^2\sin 2\varphi}{4} - \frac{\varphi\cos 2\varphi}{4} + \frac{\sin 2\varphi}{8}$$
$$= -\frac{\varphi\cos 2\varphi}{2} - \frac{\varphi^2\sin 2\varphi}{4} + \frac{\sin 2\varphi}{4}$$
$$= \tfrac{1}{2}[-\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - \varphi^2\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi]$$
$$= \tfrac{1}{2}(\varphi\sin^2\varphi - \varphi\cos^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi - \varphi^2\sin\varphi\cos\varphi)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)$$

Da nun $\sin\varphi - \varphi\cos\varphi = \frac{y}{R}$ und $\cos\varphi + \varphi\sin\varphi = \frac{x}{R}$

ſo iſt

$$\frac{Z}{R^2} + \frac{\varphi^3}{6} = \frac{xy}{2R^2}$$

und hieraus folgt $Z + \frac{R^3\varphi^3}{6} = \frac{1}{2}xy$

es iſt alſo $Z = \frac{1}{2}xy - \frac{R^2\varphi^3}{6}$

wo keine Conſtante hinzukommt, weil für $\varphi = 0$ auch $y = 0$ wird, und alsdann $Z = 0$ ſein muß.

Zuſatz. Es iſt alſo die Fläche

$$amx = Z = \frac{1}{2}xy - \frac{R^3\varphi^3}{6}$$

da nun, wenn man die [illegible] zieht, die Fläche des Dreiecks $cmx = \frac{1}{2}xy$ iſt, ſo wi

$$amx = \frac{1}{2}x - \frac{R^3\varphi^3}{6}$$

und es iſt d [illegible] $x - amx = \frac{R^3\varphi^3}{6}$

nämlich es iſt die Fläche des Dreiecks cma, von welchem die eine Seite am die Evolvente iſt, $= \frac{R^2\varphi^3}{6}$

und daher auch $cma = \frac{R\varphi^2}{2} \times \frac{R\varphi}{3}$

Die Fläche cma iſt alſo einem Rechteck gleich, welches die Curve $cm = \frac{R\varphi^2}{2}$ zur Grundlinie und den dritten Theil der Linie $mn = R\varphi$ zur Höhe hat.

§. 78.

Aufgaben von der Daumenwelle.

Aufgabe 1. Ein Stampfer AB, Fig. 137a, der durch Scheibelatten in dieſer Lage erhalten wird, ſich aber frei in den Richtungen BA und AB bewegen kann, iſt mit einem Hebezapfen ac verſehen, und ſoll mittelſt der Hebedaumen an einer Daumenwelle gehoben werden, ſo daß, — wenn, nachdem der Stampfer eine gewiſſe Höhe erreicht hat, der Hebedaumen die Hebelatte verläßt, — er frei herabfällt, um durch ſein Gewicht einen Gegenſtand zu zerſtoßen oder zu zerquetſchen; es ſoll die zweckmäßigſte Form der Hebedaumen angegeben werden.

Auflöſung. Hat ſich die Daumenwelle ſo weit gedreht, daß α bis α' gekommen iſt, und wird während dieſer Zeit der

Stampfer so weit gehoben, daß die Hebelatte, welche anfangs
e Lage aα hatte, nun in der Lage bβ ist, so berührt dieselbe
n Daumen jetzt in β, und verläßt denselben bei einer wei-
rn Drehung der Welle, so daß alsdann der Stampfer frei
rabfällt. Soll nun das Moment der bewegenden Kraft
nstant sein, so muß die Kraft in der Richtung αβ, also in
r Richtung der Tangente des Punktes α wirken, oder setzt
an das Gewicht des zu hebenden Stampfers = P, so wi-
rsteht derselbe in der mit AB parallelen Richtung βα mit
inem Gewicht = P, und es ist daher für cα = R das Mo-
ent = RP. Hieraus geht also hervor, daß αβ normal auf
m Punkt β der Curve α′β sein muß; damit aber die Be-
egung gleichförmig werde, muß außerdem auch αβ = αα′
n; da nun diese beiden Eigenschaften der Kreisevolvente zu-
mmen, so folgt, daß die Daumen nach dieser Curve ge-
ömmt sein müssen, wenn sie die zweckmäßigste Form haben
llen.

Zusatz 1. Bei dem Heben des Stampfers berührt der
aumen stets die äußere Kante der Hebelatte, und es ent-
ht eine bedeutende Friction, indem der Daumen an dieser
ante hingleitet; um diese Friction zu vermindern, kann man
n dem Ende der Hebelatte eine Rolle anbringen; es muß aber
dann die durch die Axe der Rolle gehende Curve eine Kreis-
olvente sein, und die Krümmung der Daumen wird eine Pa-
llele zu dieser Curve, welche in einer Entfernung von der-
ben, die dem Radius der Rolle gleich ist, beschrieben wird.

Zusatz 2. Die Bewegung eines Stampfers ist von der
ner gezahnten Stange, Fig. 136, nicht verschieden, nur daß
i dieser, in §. 76. Aufgabe 1., die Form der Zähne der Stange
stimmt wurde, während hier die Hebelatte als eben voraus-
setzt wird. Es geht also hieraus hervor, daß, wenn man
n Zähnen einer gezahnten Stange eine ebene Fläche giebt,
e Zähne des Getriebes, eben so wie die Daumen einer Dau-
enwelle, nach einer Kreisevolvente gekrümmt werden müssen.

Aufgabe 2. Soll eine Daumenwelle stets dieselbe Last
n heben haben, so müssen mehrere Stampfer durch dieselbe
wegt werden, weil bei einem einzelnen Stampfer, während
fällt, die Welle von demselben nicht belastet ist. Die An-

zahl der Stampfer sei gegeben, und eben so auch die Anzahl der Daumen für jeden Stampfer, also wie oft bei einem einmaligen Umdrehen der Welle ein und derselbe Stampfer gehoben wird; es soll bestimmt werden, wie die Höhe, zu welcher die Stampfer gehoben werden, der Radius der Welle und die Länge der Daumen von einander abhängen.

Auflösung. Es sei die Anzahl der Stampfer, von welchen einer nach dem andern gehoben wird, $= k$, und die Zahl der Daumen $= nk$, so muß der Umfang der Welle nothwendig in nk gleiche Theile getheilt werden. Setzt man nun den Radius der Welle $= R$, so ist der Umfang der Welle $= 2R\pi$, und daher jeder der nk gleichen Bogen $= \frac{2R\pi}{nk}$; ein solcher Bogen $= \alpha\alpha'$, Fig. 137a, muß $= \alpha\beta$ sein, welches die Höhe $= h$ ist, zu der ein Stampfer gehoben wird, und dieses giebt die Gleichung

$$h = \frac{2R\pi}{nk}$$

woraus sich h finden läßt, wenn außer n und k auch R gegeben ist, und man kann umgekehrt R berechnen, wenn h bestimmt ist. Endlich ist

$$(c\beta) = V(R^2 + h^2)$$

und also auch, wenn die Länge $d\beta$ der Daumen $= z$ gesetzt wird,

$$z + R = V(R^2 + h^2)$$

und hieraus folgt $z = -R + V(R^2 + h^2)$

Zusatz. Von den k Stampfern wird Einer nach dem andern gehoben, und es hat die Welle stets nur Einen zu heben; es wird aber gewöhnlich diese Anzahl Stampfer mehrmal nebeneinander angebracht, so daß die Zahl aller Stampfer $= mk$ für eine ganze Zahl $= m$ ist, und die Welle enthält nmk Daumen, von welchen m immer in einer graden Linie sich befinden, die parallel mit der Axe der Welle ist. Wenn also das Gewicht eines einzelnen Stampfers $= P$ ist, so wird die von der Welle zu hebende Last $= mP$.

Aufgabe 3. Es sei der normal auf den Daumen an dem Punkte β in der Richtung $\beta\alpha$ wirkende Druck $= Z$; es soll die zur Ueberwältigung der Friction zwischen Daumen und

ıtte erforderliche Kraft in der Richtung $\alpha\beta = X$ be-
t werden.

Auflösung. Durch den Druck $= Z$ wird eine Friction erzeugt, die in der Richtung βb widersteht. Soll nun der Richtung βx mit μZ im Gleichgewicht sein, so muß eine dritte Kraft in der Richtung βc angenommen wer-
ie keinen Einfluß weiter hat, weil sie auf die Axe der wirkt, und es ist sonach bei den an dem Punkte β im gewicht stehenden Kräften, die in den Richtungen βb, nd βc wirken,

$$X : \mu Z = \sin(b\beta c) : \sin(x\beta c)$$

aher, wenn $\angle \alpha c\beta = \varphi$ gesetzt wird,

$$X : \mu Z = \sin(180^\circ - \varphi) : \sin(90^\circ + \varphi)$$

$$\text{oder } X : \mu Z = \sin\varphi : \cos\varphi$$

$$\text{und hieraus folgt } X = \frac{\mu Z \sin\varphi}{\cos\varphi} = \mu Z \operatorname{tg}\varphi$$

es der Ausdruck ist für die Kraft, welche zur Ueberwäl-
g der Friction erfordert wird.

Zusatz. Zur Ueberwältigung des Druckes $= Z$ ist eine so große Kraft in der Richtung $\alpha\beta$ erforderlich; die Kraft welche also gebraucht wird, um dem ganzen Druck nebst araus entstehenden Friction das Gleichgewicht zu halten, aher

$$V = Z + \mu Z \operatorname{tg}\varphi = Z(1 + \mu \operatorname{tg}\varphi)$$

es ist diese Kraft veränderlich, weil der Winkel φ verän-
h ist.

Aufgbe 4. Der durch die Daumwelle zu überwältigende t sei $= Z$, welcher in der Richtung $\beta\alpha$ parallel mit dem mpfer AB wirkt; es soll angegeben werden, wie dieser t von dem Gewichte des Stampfers und der Friction an Scheidelatten erzeugt wird.

Auflösung. Indem der Stampfer durch die Kraft Z, e bei α in der Richtung $\alpha\beta$ wirkt, gehoben wird, ent-
eine zweifache Friction gegen die Scheidelatten; nämlich, er Druck $= Z$ eine Reibung zwischen dem Daumen und zapfen bei α erzeugt, so wird dadurch der Stampfer mit ei-
Kraft $= \mu Z$ in der Richtung $a\alpha$ angezogen, und es ent-
hierdurch ein Druck gegen die Scheidelatten an A′ und

B', der mit α' und β' bezeichnet werden kann, und außerdem entsteht durch das Gewicht des Stampfers $= P$, weil zur Hebung desselben eine eben so große Kraft bei α erforderlich ist, ein Druck an die Scheidelatten A' und B', der bei beiden gleich groß ist und der mit p bezeichnet werden soll; sowohl p als α' und β' wirken in horizontaler Richtung. Zur Ueberwältigung der durch diesen Druck erzeugten Friction ist eine Kraft $= P'$ an α in der Richtung $\alpha\beta$ erforderlich, woraus folgt, daß

$$Z = P + P' \text{ sein muß.}$$

Da die oberen Scheidelatten einen Druck nach entgegengesetzten Richtungen erleiden, nämlich A einen Druck $= p$ und A' einen Druck $= \alpha'$, so ist der ganze Druck an der obern Scheidelatte, wenn $p > \alpha'$ angenommen wird, $= p - \alpha'$. Die untere Scheidelatte erleidet sowohl den Druck β' als auch den Druck p in der Richtung von B', und es ist daher der ganze Druck an der untern Scheidelatte $= p + \beta'$. Die durch den Druck an beiden Scheidelatten entstehende Friction ist sonach

$$P' = \mu(p - \alpha') + \mu(p + \beta') = \mu(2p - \alpha' + \beta')$$

und es ist daher $Z = P + P' = P + \mu(2p - \alpha' + \beta')$.

Der Werth von p, α' und β' läßt sich auf folgende Art bestimmen: es sei der Abstand der obern Scheidelatte von der untern, also gh, $= h$, und die Länge des Hebezapfens $a\alpha = a$, so ist, weil der Druck p durch eine an α parallel mit hg wirkende Kraft P erzeugt wird, nach §. 25. $p = \frac{aP}{h}$. Der Druck α' und β' wird erzeugt durch die an α in der Richtung $a\alpha$ wirkende Kraft $= \mu Z$, und es ist daher, wenn man die veränderliche Höhe $ha = x$, also $ag = h - x$ setzt,

$$\alpha' = \frac{x \cdot \mu Z}{h} \text{ und } \beta' = \frac{(h-x) \cdot \mu Z}{h}$$

Werden diese Werthe in dem Ausdruck für P' gesetzt, so erhält man

$$P' = \mu(2p - \alpha' + \beta') = \mu\left[\frac{2aP}{h} - \frac{x \cdot \mu Z}{h} + \frac{(h-x) \cdot \mu Z}{h}\right]$$

$$= \mu\left[\frac{2aP + (h - 2x)\mu Z}{h}\right]$$

$$x \text{ ist also } = \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$$

Setzen wir

$$\text{[illegible]} = \text{[illegible]}$$

so wird auch $\log x = \log(\text{[illegible]})$

oder

$$x = \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$$

Beispiel. Der Logarithmus von x gesucht. Wenn $\log x$ [illegible] $\log x$ ist, so ist auch $\log x$ [illegible] $\log x$ und

$$\log x = \text{[illegible]} \quad \text{also} \quad x = \text{[illegible]}$$

Aufgabe. Eine [illegible] Zahl x der Bedingung [illegible] x [illegible] x [illegible] x

Wird aber für Z der Werth geſetzt aus dem Zuſatz zu Aufgabe 4., ſo erhält man

$$V = \frac{P(1+\mu \operatorname{tg}\varphi)}{1-\mu^2}$$

Zuſatz. Die Formel

$$V = \frac{(h+2a\mu)P(1+\mu \operatorname{tg}\varphi)}{h-(h-2x)\mu^2}$$

enthält die beiden veränd[illegible] Größen φ und x; da aber, in Aufgabe 5., angegeben w[illegible]n iſt, wie φ und x von einander abhängen, ſo kann [illegible] der einen von dieſen Größen ihr Werth, durch die and[illegible]sgedrückt, geſetzt werden, und man erhält hierdurch

$$V = \frac{(h+2a[illegible]}{R[l} \quad \frac{(R+\mu(x-g))}{(h-2x)\mu^2]}$$

oder, wenn man x wegſchaffen und φ beibehalten will,

$$V = \frac{(h+2a\mu)P(1+\mu \operatorname{tg}\varphi)}{h(1-\mu^2)+2(g+R \operatorname{tg}\varphi)\mu^2}$$

Aufgabe 7. Es ſind für V zwei verſchiedene Werthe gefunden worden, welche von der Richtung des Drucks bei der obern Scheidelatte abhängen; es iſt nämlich

$$V = V' = \frac{P(h+2a\mu)(1+\mu \operatorname{tg}\varphi)}{h(1-\mu^2)+2(g+R \operatorname{tg}\varphi)\mu^2}$$

wenn $p > \alpha'$ iſt, und

$$V = V'' = \frac{P(1+\mu \operatorname{tg}\varphi)}{1-\mu^2}$$

in dem Fall, wenn $\alpha' > p$. Es ſollen die Bedingungen näher beſtimmt werden, unter welchen die eine oder die andere dieſer Formeln angewendet werden muß.

Auflöſung. Es iſt $p = \frac{aP}{h}$ und $\alpha' = \frac{x \cdot \mu Z}{h}$, ſoll alſo $\alpha' > p$ ſein, ſo muß die Bedingung ſtattfinden

$$\frac{x \cdot \mu Z}{h} > \frac{aP}{h}$$

und alſo auch $x \cdot \mu Z > aP$

und weil nach dem Zuſatz zu Aufgabe 4., wenn $\alpha' > p$ ſein ſoll, $Z = \frac{P}{1-\mu^2}$ iſt, ſo wird die Bedingung

$$\frac{x \cdot \mu P}{1-\mu^2} > aP$$

$$\text{und daher } x > \frac{a(1-\mu^2)}{\mu}$$

indet diese Bedingung für den kleinsten Werth von x statt, so für $x = (ha) = g$, so ist auch $\alpha' > p$, und man erhält die erforderliche Kraft $V'' = \frac{P(1+\mu tg\varphi)}{1-\mu^2}$. Soll der ngekehrte Fall stattfinden, soll also $p > \alpha'$ sein, so muß ch $aP > x \cdot \mu Z$ sein, und man muß hier für Z den Werth s Aufgabe 4. setzen, wodurch die Bedingung wird

$$aP > \frac{x\mu(h+2a\mu)P}{h-(h-2x)\mu^2}$$

$$\text{also } ah - ah\mu^2 + 2ax\mu^2 > x\mu h + 2ax\mu^2$$

$$\text{woraus erhalten wird } \frac{a(1-\mu^2)}{\mu} > x.$$

Welcher von beiden Werthen für V, ob also V' oder V'' benutzt erden muß, hängt mithin davon ab, ob unter allen Umstän- n ist

$$x < \frac{a(1-\mu^2)}{\mu}, \text{ oder } x > \frac{a(1-\mu^2)}{\mu}$$

: erstere dieser Bedingungen muß selbst für den möglichst ößten, und die letztere für den möglichst kleinsten Werth von noch stattfinden, wenn die Kraft bei dem Heben des Stam- ers nicht von V' zu V'' übergehen soll.

Zusatz. Da $x = g + R tg\varphi$, so muß, wenn die erfor- liche Kraft $= V''$ sein soll, die Bedingung stattfinden

$$g + R tg\varphi > \frac{a(1-\mu^2)}{\mu}$$

$$\text{und daher } tg\varphi > \frac{a(1-\mu^2) - \mu g}{R\mu}$$

Aufgabe 9. Es soll der Unterschied angegeben werden ischen den Kräften V' und V'', welche erforderlich sind, je chdem $\bar{x}$ kleiner oder größer als $\frac{a(1-\mu^2)}{\mu}$ ist.

Auflösung. Da

$$V' = \frac{P(h+2a\mu)(1+\mu tg\varphi)}{h(1-\mu^2)+2x\mu^2}$$

$$\text{und } V'' = \frac{P(1+\mu \operatorname{tg}\varphi)}{1-\mu^2}$$

ſo iſt die geſuchte Gleichung

$$V' - V'' = P(1+\mu \operatorname{tg}\varphi)\left[\frac{h+2a\mu}{h(1-\mu^2)+2x\mu^2} - \frac{1}{1-\mu^2}\right]$$

nämlich es iſt

$$V' - V'' = P(1+\mu \operatorname{tg}\varphi)\left[\frac{2a\mu(1-\mu^2)-2x\mu^2}{[h(1-\mu^2)+2x\mu^2](1-\mu^2)}\right]$$

$$= P(1+\mu \operatorname{tg}\varphi)\left[\frac{\mu[a(1-\mu^2)-x\mu^2]}{[h(1-\mu^2)+2x\mu^2)(1-\mu^2)}\right]$$

Hieraus geht alſo hervor:

$V' > V''$, wenn $a(1-\quad) > x\mu$, alſo $x < \frac{a(1-\mu^2)}{\mu}$

nämlich in dem Falle, wenn die anzuwendende Kraft $= V'$ ſein muß, und umgekehrt.

Zuſatz. Iſt zwar anfangs $x < \frac{a(1-\mu^2)}{\mu}$, wird der Werth von x aber bei dem Heben des Stampfers größer als dieſer Ausdruck, ſo iſt für irgend einen Punkt auch $x = \frac{a(1-\mu^2)}{\mu}$ und es iſt in dieſem Augenblick $V' = V''$, und es geht die eine Kraft in die andere über. Für dieſen Werth von x wird

$$V' = V'' = \frac{P(1+\mu \operatorname{tg}\varphi)}{1-\mu^2} = \frac{P}{1-\mu^2}\left[1+\mu\left(\frac{x-g}{R}\right)\right]$$

$$= \frac{P}{R(1-\mu^2)}[R-\mu g+\mu x]$$

für $x = \frac{a(1-\mu^2)}{\mu}$, und es iſt daher alsdann

$$V' = V'' = \frac{P(R-\mu g+a(1-\mu^2))}{R(1-\mu^2)}.$$

Zweiter Abschnitt.

Aufgaben aus der Statik der Gewölbe.

§. 79.

Allgemeine Aufgaben.

Aufgabe 1. Es ist aαββ, Fig. 138, der Durchschnitt von einem Theile eines aus mehreren Keilen zusammengesetzten, nach irgend einer Curve gekrümmten Gewölbebogens, von welchem das Ausweichen der Gewölbsteine bei α durch eine vertikale Wand ak, und bei ββ durch eine feste Widerlage verhindert wird; man soll die Größe der Pressungen der Gewölbsteine in den einzelnen Fugen aα, bβ, cγ ꝛc. berechnen.

Auflösung. Man bezeichne die Gewichte der einzelnen Gewölbsteine, von dem obersten an der vertikalen Wand anliegenden an gerechnet, mit A_1; A_2; A_3 ···· A_n und die Winkel, unter welchen die Vertikale ak von den verlängerten Fugenlinien bβ, cγ, dδ ···· geschnitten werden, mit φ_1; φ_2; φ_3 ···· φ_n. Sind nun s_1; s_2; s_3 ···· die Schwerpunkte der einzelnen Gewölbsteine, so kann man die Gewichte A_1; A_2; A_3 ···· als an diesen Punkten in den Richtungen s_1b_1; s_2b_2; s_3b_3 ···· parallel mit ak wirkende Kräfte ansehen, und wird jede derselben in zwei Seitenkräfte zerlegt, die normal auf den beiden anliegenden Fugen sind, so lernt man hierdurch die gesuchte Größe der Pressungen kennen.

Die Pressung von A_1 gegen aα, also nach oben zu, sei $= M_1$, und die gegen die Fuge bβ, also nach unten zu, $= N_1$; eben so sei die durch A_2 erzeugte Pressung nach oben hin gegen bβ $= M_2$, und die nach unten zu gegen cγ $= N_2$; die Pressungen von A_3 mögen auf gleiche Weise durch M_3 und N_3 bezeichnet werden, und ganz allgemein die von A durch M_n und N_n. Nun ist

$A_1 : M_1 = \sin(\alpha_1+\beta_1) : \sin\beta_1$ und $A_1 : N_1 = \sin(\alpha_1+\beta_1) : \sin$
$A_2 : M_2 = \sin(\alpha_2+\beta_2) : \sin\beta_2$ und $A_2 : N_2 = \sin(\alpha_2+\beta_2) : \sin$
$A_3 : M_3 = \sin(\alpha_3+\beta_3) : \sin\beta_3$ und $A_3 : N_3 = \sin(\alpha_3+\beta_3) : \sin$
und ganz allgemein für den rten Gewölbſtein
$A_r : M_r = \sin(\alpha_r+\beta_r) : \sin\beta_r$ und $A_r : N_r = \sin(\alpha_r+\beta_r) : \sin$
Es iſt alſo

$$M_1 = \frac{A_1 \sin\beta_1}{\sin(\alpha_1+\beta_1)} \text{ und } N_1 = \frac{A_1 \sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\beta_1)}$$

$$M_2 = \frac{A_2 \sin\beta_2}{\sin(\alpha_2+\beta_2)} \text{ und } N_2 = \frac{A_2 \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2+\beta_2)}$$

$$M_3 = \frac{A_3 \sin\beta_3}{\sin(\alpha_3+\beta_3)} \text{ und } N_3 = \frac{A_3 \sin\alpha_3}{\sin(\alpha_3+\beta_3)} \text{ ꝛc.}$$

$$\text{und } M_r = \frac{A_r \sin\beta_r}{\sin(\alpha_r+\beta_r)} \text{ und } N_r = \frac{A_r \sin\alpha_r}{\sin(\alpha_r+\beta_r)}$$

Nun iſt $\alpha_1+\beta_1 = 180^0-\varphi$, und $\beta_1 = 90^0-\varphi$, alſo $\alpha_1 = 9$
Ferner wird $\alpha_2+\beta_2$ erhalten, wenn man den Winkel, un
welchem die Fugenlinien $b\beta$ und $c\gamma$ ſich ſchneiden, von 1
abzieht, und da dieſer Winkel $= \varphi_2-\varphi_1$ iſt, ſo iſt
$\alpha_2+\beta_2 = 180^0-(\varphi_2-\varphi_1)$ und $\beta_2 = 90^0-\varphi_2$, alſo $\alpha_2 = 90^0+$
Aus demſelben Grunde iſt,
$\alpha_3+\beta_3 = 180^0-(\varphi_3-\varphi_2)$ und $\beta_3 = 90^0-\varphi_3$, alſo $\alpha_3 = 90^0+$
$\alpha_4+\beta_4 = 180^0-(\varphi_4-\varphi_3)$ und $\beta_4 = 90^0-\varphi_4$, alſo $\alpha_4 = 90^0+$
und ganz allgemein
$\alpha_r+\beta_r = 180^0-(\varphi_r-\varphi_{(r-1)})$ und $\beta_r = 90^0-\varphi_r$, alſo $\alpha_r = 90^0+\varphi_{(r-}$
Setzt man dieſe Werthe in den obigen Ausdrücken, ſo erh
man für die geſuchte Preſſungen die Formeln

$$M_1 = \frac{A_1 \cos\varphi_1}{\sin\varphi_1} \quad \text{und} \quad N_1 = \frac{A_1}{\sin\varphi_1}$$

$$M_2 = \frac{A_2 \cos\varphi_2}{\sin(\varphi_2-\varphi_1)} \text{ und } N_2 = \frac{A_2 \cos\varphi_1}{\sin(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$M_3 = \frac{A_3 \cos\varphi_3}{\sin(\varphi_3-\varphi_2)} \text{ und } N_3 = \frac{A_3 \cos\varphi_2}{\sin(\varphi_3-\varphi_2)}$$

und es iſt ganz allgemein

$$M_r = \frac{A_r \cos\varphi_r}{\sin(\varphi_r-\varphi_{(r-1)})} \text{ und } N_r = \frac{A_r \cos\varphi_{(r-1)}}{\sin(\varphi_r-\varphi_{(r-1)})}$$

Zuſatz. Es iſt

cos,

$$\frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta\cos\alpha-\sin\alpha}$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha)}$$

$$\text{ebenso } \frac{\cos\gamma}{\sin(\beta-\gamma)} = \frac{\cos\gamma}{\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma} = \frac{1}{\sin\beta-\cos\beta\operatorname{tg}\gamma}$$

$$= \frac{1}{\cos\beta(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\gamma)}$$

Gleich ist auch

$$\frac{\cos\varphi_2}{\sin(\varphi_2-\varphi_1)} = \frac{1}{\cos\varphi_1(\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1)}$$

$$\text{und } \frac{\cos\varphi_1}{\sin(\varphi_2-\varphi_1)} = \frac{1}{\cos\varphi_2(\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1)}$$

so überhaupt

$$\frac{\cos\varphi_r}{\sin(\varphi_r-\varphi_{(r-1)})} = \frac{1}{\cos\varphi_{(r-1)}(\operatorname{tg}\varphi_r-\operatorname{tg}\varphi_{(r-1)})}$$

$$\text{und } \frac{\cos\varphi_{(r-1)}}{\sin(\varphi_r-\varphi_{(r-1)})} = \frac{1}{\cos\varphi_r(\operatorname{tg}\varphi_r-\operatorname{tg}\varphi_{(r-1)})}$$

Daher wird auch, wenn man diese Werthe in den für M_r und N_r gefundenen Ausdrücken benutzt,

$$M_1 = \frac{A_1}{\operatorname{tg}\varphi_1} \quad \text{und } N_1 = \frac{A_1}{\cos\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_1}$$

$$M_2 = \frac{A_2}{\cos\varphi_1(\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1)} \text{ und } N_2 = \frac{A_2}{\cos\varphi_2(\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1)}$$

$$M_3 = \frac{A_3}{\cos\varphi_2(\operatorname{tg}\varphi_3-\operatorname{tg}\varphi_2)} \text{ und } N_3 = \frac{A_3}{\cos\varphi_3(\operatorname{tg}\varphi_3-\operatorname{tg}\varphi_2)} \text{ und}$$

$$M_r = \frac{A_r}{\cos\varphi_{(r-1)}(\operatorname{tg}\varphi_r-\operatorname{tg}\varphi_{(r-1)})} \text{ und } N_r = \frac{A_r}{\cos\varphi_r(\operatorname{tg}\varphi_r-\operatorname{tg}\varphi_{(r-1)})}$$

Aufgabe 2. Die Fuge $b\beta$, in welcher die Gewölbsteine A_1 und A_2 zusammenstoßen, erleidet eine Pressung $= N_1$ in der Richtung g_1n_1, und eine Pressung $= M_2$ in der entgegengesetzten Richtung g_2n_1; eben so erleidet die Fuge $c\gamma$ zwei Pressungen in entgegengesetzten Richtungen N_2 und M_3; an die dritte Fuge sind diese Pressungen N_2 und M_4 ꝛc. Es soll hieraus die algebraische Summe der Pressungen für jede Fuge besonders, also die bei derselben stattfindende Pressungsdifferenz berechnet werden.

Auflösung. Setzt man die Pressungsdifferenz für die

erste Fuge $b\beta = D_1$; für die zweite $c\gamma = D_2$; für die dritte $d\delta = D_3$ u. s. w., für die $r$te Fuge $= D_r$, so ist, wenn man annimmt, daß die Pressung nach unten überall größer als nach oben sei,

$$D_1 = N_1 - M_2;\ D_2 = N_2 - M_3$$
$$D_3 = N_3 - M_4 \text{ ꝛc.};\ D_r = N_r - M_{(r+1)}$$

und es ist daher, wenn man die Werthe aus dem obigen Zusatze setzt,

$$D_1 = \frac{1}{\cos\varphi_1}\left[\frac{A_1}{\operatorname{tg}\varphi_1} - \frac{A_2}{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}\right]$$
$$D_2 = \frac{1}{\cos\varphi_2}\left[\frac{A_2}{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1} - \frac{A_3}{\operatorname{tg}\varphi_3 - \operatorname{tg}\varphi_2}\right]$$
$$D_3 = \frac{1}{\cos\varphi_3}\left[\frac{A_3}{\operatorname{tg}\varphi_3 - \operatorname{tg}\varphi_2} - \frac{A_4}{\operatorname{tg}_4 - \operatorname{tg}\varphi_3}\right] \text{ ꝛc.}$$
$$D_r = \frac{1}{\cos\varphi_r}\left[\frac{A_r}{\operatorname{tg}\varphi_r - \operatorname{tg}\varphi_{(r-1)}} - \frac{A_{(r+1)}}{\operatorname{tg}\varphi_{(r+1)} - \operatorname{tg}\varphi_r}\right]$$

Aufgabe 3. Es sollen die Bedingungsgleichungen für den Fall angegeben werden, wenn die Pressungen in jeder Fuge unter sich im Gleichgewicht sind, so daß also die Pressungsdifferenzen $= 0$ werden.

Auflösung. Um diese Bedingungsgleichungen kennen zu lernen, braucht man nur in den in der vorigen Aufgabe gefundenen Ausdrücken $D_1 = D_2 = D_3 \cdots = D_r = 0$ zu setzen. Hiernach wird

$$D_1 = \frac{1}{\cos\varphi_1}\left[\frac{A_1}{\operatorname{tg}\varphi_1} - \frac{A_2}{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}\right] = 0$$
$$D_2 = \frac{1}{\cos\varphi_2}\left[\frac{A_2}{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1} - \frac{A_3}{\operatorname{tg}\varphi_3 - \operatorname{tg}\varphi_2}\right] = 0 \text{ ꝛc.}$$

und dieses giebt

$$A_1(\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1) = A_2\operatorname{tg}\varphi_1$$
$$A_2(\operatorname{tg}\varphi_3 - \operatorname{tg}\varphi_2) = A_3(\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1)$$

und eben so erhält man die folgenden Bedingungsgleichungen

$$A_3(\operatorname{tg}\varphi_4 - \operatorname{tg}\varphi_3) = A_4(\operatorname{tg}\varphi_3 - \operatorname{tg}\varphi_2)$$
$$A_4(\operatorname{tg}\varphi_5 - \operatorname{tg}\varphi_4) = A_5(\operatorname{tg}\varphi_4 - \operatorname{tg}\varphi_5) \text{ ꝛc.}$$
$$A_r(\operatorname{tg}\varphi_{(r+1)} - \operatorname{tg}\varphi_r) = A_{(r+1)}(\operatorname{tg}\varphi_r - \operatorname{tg}_{(r-1)}).$$

Werden alle diese Gleichungen miteinander multiplicirt, so daß man die Theile links von dem Gleichzeichen, und eben so auch

die Theile rechts von demſelben in ein Produkt vereinigt, ſo erhält man

$$A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdots A_r (tg\varphi_2 - tg\varphi_1)(tg\varphi_3 - \varphi_2) \cdots (tg\varphi_{(r+1)} - tg\varphi_r) =$$
$$A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdots A_{(r+1)}\, tg\varphi_1 (tg\varphi_2 - tg\varphi_1)(tg\varphi_3 - tg\varphi_2) \cdots (tg\varphi_r - tg\varphi_{(r-1)})$$

und es wird daher, wenn man die gemeinſchaftlichen Factoren wegläßt,

$$A_1 (tg\varphi_{(r+1)} - tg\varphi_r) = A_{(r+1)}\, tg\varphi_1$$

woraus nun für jeden Werth von r folgt

$$A_{(r+1)} = \left(\frac{tg\varphi_{(r+1)} - tg\varphi_r}{tg\varphi_1}\right) A_1$$

Da nun (nach Aufgabe 1.) $\frac{A_1}{tg\varphi_1} = M_1$, ſo wird auch

$$A_{(r+1)} = (tg\varphi_{(r+1)} - tg\varphi_r)\, M_1.$$

Zuſatz. Setzt man in der zuletzt gefundenen Gleichung nach und nach r = 0, 1, 2, 3 ꝛc., ſo wird erhalten

$$A_1 = M_1 tg\varphi_1$$
$$A_2 = M_1 (tg\varphi_2 - tg\varphi_1)$$
$$A_3 = M_1 (tg\varphi_3 - tg\varphi_2)$$
$$A_4 = M_1 (tg\varphi_4 - tg\varphi_3)$$
$$\vdots$$
$$A_r = M_1 (tg\varphi_r - tg\varphi_{(r-1)})$$

und hieraus erhält man durch Addition

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \cdots + A_r = M_1 tg\varphi_r$$

Nämlich es iſt, wenn die Summe der Gewichte aller Gewölbſteine vom 1ſten bis zum rten = A geſetzt wird,

$$A = M_1 tg\varphi_r$$

für den Fall, wenn die Preſſungsdifferenzen = 0 ſind.

Aufgabe 4. Die in dem Punkt n, Fig. 139, ſtattfindende Preſſungsdifferenz = D ſoll in zwei Seitenkräfte zerlegt werden, von welchen die eine nv = V vertikal, und die andere nz = Z horizontal iſt, und es ſoll die Größe einer jeden dieſer beiden Seitenkräfte angegeben werden.

Auflöſung. Da D in der Richtung no normal gegen cγ wirkt, und nv parallel mit ak iſt, ſo muß, wenn die Vertikale ak von der verlängerten cγ unter einem Winkel = α geſchnitten wird, ∠zno = ∠vnγ = α ſein, und es iſt daher ∠onv = 90° − α. Daher iſt

$$D : Z = 1 : \cos\alpha \text{ und } D : V = 1 : \sin\alpha$$
$$\text{alſo } Z = D\cos\alpha \text{ und } V = D\sin\alpha.$$

Aufgabe 5. Alle in den Fugen eines Gewölbebogens vorkommenden Preſſungsdifferenzen ſollen in Theilkräfte zerlegt werden, welche in vertikalen und horizontalen Richtungen wirken, und es ſoll die Summe der hieraus erhaltenen vertikalen, ſo wie die der horizontalen Kräfte beſtimmt werden.

Auflöſung. Setzt man die aus der Preſſungsdifferenz D_r erhaltene horizontale Seitenkraft $= Z_r$, und die vertikale $= V_r$, und wird der Winkel, unter welchem die Vertikallinie ak von der rten Fugenlinie geſchnitten wird, $= \varphi_r$ geſetzt, ſo iſt, nach Aufgabe 4.,

$$Z_r = D_r\cos\varphi_r \text{ und } V_r = D_r\sin\varphi_r$$

Setzt man in dieſer Gleichung nach und nach $r = 1, 2, 3$ ꝛc., ſo wird

$$Z_1 = D_1\cos\varphi_1 \text{ und } V_1 = D_1\sin\varphi_1$$
$$Z_2 = D_2\cos\varphi_2 \text{ " } V_2 = D_2\sin\varphi_2$$
$$Z_3 = D_3\cos\varphi_3 \text{ " } V_3 = D_3\sin\varphi_3 \text{ ꝛc.}$$

und es iſt daher die Summe Z der horizontal wirkenden Kräfte

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 \cdots + Z_r$$
$$= D_1\cos\varphi_1 + D_2\cos\varphi_2 + D_3\cos\varphi_3 \cdots + D_r\cos\varphi_r$$

und die Summe V der vertikal wirkenden Kräfte iſt

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \cdots + V_r$$
$$= D_1\sin\varphi_1 + D_2\sin\varphi_2 + D_3\sin\varphi_3 \cdots + D_r\sin\varphi_r$$

Nach Aufgabe 2. aber iſt

$$D_1\cos\varphi_1 = \frac{A_1}{\operatorname{tg}\varphi_1} - \frac{A_2}{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}$$
$$D_2\cos\varphi_2 = \frac{A_2}{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1} - \frac{A_3}{\operatorname{tg}\varphi_3 - \operatorname{tg}\varphi_2}$$
$$D_3\cos\varphi_3 = \frac{A_3}{\operatorname{tg}\varphi_3 - \operatorname{tg}\varphi_2} - \frac{A_4}{\operatorname{tg}\varphi_4 - \operatorname{tg}\varphi_3}$$
$$\vdots$$
$$D_r\cos\varphi_r = \frac{A_r}{\operatorname{tg}\varphi_r - \operatorname{tg}\varphi_{(r-1)}} - \frac{A_{(r+1)}}{\operatorname{tg}\varphi_{(r+1)} - \operatorname{tg}\varphi_r}$$

man erhält alſo, wenn dieſe Ausdrücke ſummirt werden, die Summe der horizontal wirkenden Kräfte

$$1)\ Z = \frac{A_1}{\operatorname{tg}\varphi_1} - \frac{A_{(r+1)}}{\operatorname{tg}\varphi_{(r+1)} - \operatorname{tg}\varphi_r}$$

Aus der allgemeinen Gleichung für die Preſſungsdifferenz

$$D_r = \frac{1}{\cos\varphi_r}\left[\frac{A_r}{tg\varphi_r - tg\varphi_{(r-1)}} - \frac{A_{(r+1)}}{tg\varphi_{(r+1)} - tg\varphi_r}\right]'$$

folgt, wenn man mit $\sin\varphi_r$ multiplicirt,

$$D_r \sin\varphi_r = \frac{A_r tg\varphi_r}{tg\varphi_r - tg\varphi_{(r-1)}} - \frac{A_{(r+1)} tg\varphi_r}{tg\varphi_{(r+1)} - tg\varphi_r}$$

und es iſt daher

$$D_1 \sin\varphi_1 = A_1 - \frac{A_2 tg\varphi_1}{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}$$

$$D_2 \sin\varphi_2 = \frac{A_2 tg\varphi_2}{tg\varphi_2 - tg\varphi_1} - \frac{A_3 tg\varphi_2}{tg\varphi_3 - tg\varphi_2}$$

$$D_3 \sin\varphi_3 = \frac{A_3 tg\varphi_3}{tg\varphi_3 - tg\varphi_2} - \frac{A_4 tg\varphi_3}{tg\varphi_4 - tg\varphi_3}$$

$$\vdots$$

$$D_r \sin\varphi_r = \frac{A_r tg\varphi_r}{tg\varphi_r - tg\varphi_{(r-1)}} - \frac{A_{(r+1)} tg\varphi_r}{tg\varphi_{(r+1)} - tg\varphi_r}$$

und man erhält hieraus durch Addition, wenn immer das 2te Glied einer Reihe mit dem erſten der folgenden Reihe verbunden wird, die Summe der vertikal wirkenden Kräfte

$$2)\ V = A_1 + A_2 + A_3 \cdots + A_r - \frac{A_{(r+1)} tg\varphi_r}{tg\varphi_{(r+1)} - tg\varphi_r}$$

Zuſatz 1. Nach dem Zuſatze zu Aufgabe 1. iſt

$$\frac{A_{(r+1)}}{tg\varphi_{(r+1)} - tg\varphi_r} = M_{(r+1)} \cos\varphi_r$$

folglich wird auch, wenn man dieſen Werth benutzt,

$$1)\ Z = \frac{A_1}{tg\varphi_1} - M_{(r+1)} \cos\varphi_r$$

$$2)\ V = A_1 + A_2 + A_3 \cdots + A_r - M_{(r+1)} \sin\varphi_r$$

Iſt nun der rte Gewölbſtein der letzte, liegt derſelbe alſo unmittelbar an der feſten Widerlage an, ſo wird $M_{(r+1)} = 0$, und es iſt daher die Summe der Horizontalpreſſungen des ganzen Gewölbebogens

$$Z = \frac{A_1}{tg\varphi_1} = M_1$$

und die Summe der Vertikalpreſſungen deſſelben iſt

$$V = A_1 + A_2 + A_3 \cdots + A^r = A.$$

Zuſatz 2. Sind die Preſſungsdifferenzen = 0, ſo findet bloß eine normale Preſſung = N_r des letzten Gewölb-

steins gegen die Widerlage statt, und es ist die hieraus entstehende Horizontalpressung $Z = N_r \cos\varphi_r$, und die Vertikalpressung ist $V = N_r \sin\varphi_r$.

Nun ist nach Aufgabe 1.

$$N_r = \frac{A_r}{\cos\varphi_r(\operatorname{tg}\varphi_r - \operatorname{tg}\varphi_{(r-1)})}$$

und nach Aufgabe 3., wenn die Pressungsdifferenzen $= 0$ sind,

$$A_r = M_1(\operatorname{tg}\varphi_r - \operatorname{tg}\varphi_{(r-1)})$$

$$\text{also } \frac{A_r}{\operatorname{tg}\varphi_r - \operatorname{tg}\varphi_{(r-1)}} = M_1$$

Folglich ist für diesen Fall die Summe aller Horizontalpressungen

$$Z = M_1$$

und die der Vertikalpressungen wird

$$V = M_1 \operatorname{tg}\varphi_r = A.$$

Zusatz 3. Die Summe der Horizontalpressungen ist also bei jedem Gewölbebogen, der Normalpressung M_1 des ersten Gewölbsteins gegen die vertikale Widerlage gleich, und die Summe der Vertikalpressungen beträgt soviel, als die Summe der Gewichte der sämmtlichen Gewölbsteine. Die Summe der Momente aber ist in dem Falle, wo die Pressungsdifferenzen $= 0$ sind, verschieden von dieser Summe in dem entgegengesetzten Falle.

Aufgabe 6. Es soll angegeben werden, wie groß in irgend einer Fuge der aus der Summe der Pressungsdifferenzen erzeugte normale Druck ist, und welche Kraft sich in Folge dieser Differenzen in der Richtung der Fuge äußert.

Auflösung. Die Summe der in der rten Fuge wirkenden vertikalen Kräfte ist $= V$, und die der horizontalen $= Z$. Wird nun jede dieser beiden Kräfte in zwei Seitenkräfte zerlegt, von welchen die eine normal ist gegen die Fuge, und die andere in der Richtung derselben wirkt, so lassen sich hieraus die gesuchten Kräfte bestimmen. Es sei, Fig. 139, $nv = V$ die Summe der vertikal wirkenden Kräfte, und man setze die aus derselben entstehende normale Seitenkraft in der Richtung $no = p'$, und die in der Richtung der Fugenlinie $n\gamma$ entstehende $= q'$. Die Summe der horizontal, also parallel mit nz wirkenden Kräfte sei $= Z$, und die hieraus entstehenden Seitenkräfte in der Richtung parallel mit no und

in der Richtung der Fuge mögen durch p'' und q'' bezeichnet werden. Schneidet nun cy verlängert die Vertikale ak unter einem Winkel $= \alpha$, so ist auch $\angle zno = \angle vny = \alpha$ und $\angle onv = 90^0 - \alpha$, und es ist nun

$$V : p' = 1 : \sin\alpha \text{ und } V : q' = 1 : \cos\alpha$$
$$Z : p'' = 1 : \cos\alpha \text{ und } Z : q'' = 1 : \sin\alpha$$

folglich

$$p' = V\sin\alpha \text{ und } q' = V\cos\alpha$$
$$p'' = Z\cos\alpha \text{ und } q'' = Z\sin\alpha$$

Wird nun der durch die Pressungsdifferenzen in der rten Fuge erzeugte normale Druck, welcher die Pressungssumme genannt werden kann, $= S_r$ gesetzt, und der Druck in der Richtung der Fugenlinie, welchen man die Schubkraft nennt, $= Q_r$, so ist

$$S_r = p' + p'' = V\sin\alpha + Z\cos\alpha$$
$$\text{und } Q_r = -q' + q'' = -V\cos\alpha + Z\sin\alpha.$$

Es ist also auch für $\angle\alpha = \varphi_r$

$$S_r = p' + p'' = V\sin\varphi_r + Z\cos\varphi_r$$
$$\text{und } Q_r = q'' - q' = Z\sin\varphi_r - V\cos\varphi_r$$

Nun ist, nach Aufgabe 5. Zusatz 1.,

$$Z = \frac{A_1}{\operatorname{tg}\varphi_1} - M_{(r+1)}\cos\varphi_r \text{ und}$$

$$V = A_1 + A_2 + \cdots A_r - M_{(r+1)}\sin\varphi_r = A - M_{(r+1)}\sin\varphi_r$$

folglich ist auch die Pressungssumme in der rten Fuge

$$S_r = \left[A - M_{(r+1)}\sin\varphi_r\right]\sin\varphi_r + \left[\frac{A_1}{\operatorname{tg}\varphi_1} - M_{(r+1)}\cos\varphi_r\right]\cos\varphi_r$$

$$= A\sin\varphi_r + \frac{A_1\cos\varphi_r}{\operatorname{tg}\varphi_1} - M_{(r+1)}\left(\sin^2\varphi_r + \cos^2\varphi_r\right)$$

$$= (A\operatorname{tg}\varphi_r + A_1\cot\varphi_1)\cos\varphi_r - M_{(r+1)}$$

und die Summe der Schubkräfte für r Fugen wird

$$Q_r = \left[\frac{A_1}{\operatorname{tg}\varphi_1} - M_{(r+1)}\cos\varphi_r\right]\sin\varphi_r - \left[A - M_{(r+1)}\sin\varphi_r\right]\cos\varphi_r$$

$$= \frac{A_1\sin\varphi_r}{\operatorname{tg}\varphi_1} - A\cos\varphi_r$$

$$= (A_1\cot\varphi_1 - A\cot\varphi_r)\sin\varphi_r$$

Zusatz. Sind die Pressungsdifferenzen $= 0$, so muß auch für die rte Fuge, so lange es nicht die letzte ist, sowohl S_r als auch $Q_r = 0$ werden. Diese Werthe lassen sich aus

den gefundenen Formeln für den angegebenen Fall auf
gende Art ableiten:

Es iſt

$$S_r = (A \operatorname{tg} \varphi_r + A_1 \cot \varphi_1) \cos \varphi_r - M_{(r+1)}$$

und wenn die Preſſungsdifferenzen = 0 ſind, ſo iſt, nach
Zuſatz zu Aufgabe 3.,

$$A_1 \cot \varphi_1 = \frac{A_1}{\operatorname{tg} \varphi_1} = M_1 = \frac{A}{\operatorname{tg} \varphi_r}$$

folglich iſt

$$S_r = \left(A \qquad \frac{A}{\operatorname{tg} \varphi_r}\right) \cos \varphi_r - M_{(r+1)}$$

$$= \frac{A}{} \qquad)\cos \varphi_r - M_{(r+1)}$$

$$= \frac{A}{} \qquad \varphi_r - M_{(r+1)} = \frac{A \sec \varphi_r}{\operatorname{tg} \varphi_r} - M$$

$$= \frac{A}{\sin \varphi_r} - M_{(r+1)}$$

oder weil $A = M_1 \operatorname{tg} \varphi_r$, ſo iſt

$$S_r = \frac{M_1}{\cos \varphi_r} - M_{(r+1)}$$

Nun iſt aber, nach Aufgabe 3.,

$$M_1 = \frac{A_{(r+1)}}{\operatorname{tg} \varphi_{(r+1)} - \operatorname{tg} \varphi_r}$$

und daher $\frac{M_1}{\cos \varphi_r} = \frac{A_{(r+1)}}{\cos \varphi_r (\operatorname{tg} \varphi_{(r+1)} - \operatorname{tg} \varphi_r)} = M_{(r+1}$

nach Aufgabe 1.;

folglich iſt $S_r = M_{(r+1)} - M_{(r+1)} = 0.$

Ferner iſt $Q_r = (A_1 \cot \varphi_1 - A \cot \varphi_r) \sin \varphi_r$

oder $Q_r = \left(\frac{A_1}{\operatorname{tg} \varphi_1} - \frac{A}{\operatorname{tg} \varphi_r}\right) \sin \varphi_r$

Da nun, nach dem Zuſatz zu Aufgabe 3.,

$$\frac{A_1}{\operatorname{tg} \varphi_1} = M_1 \text{ und auch } \frac{A}{\operatorname{tg} \varphi_r} = M_1$$

ſo iſt auch $Q_r = (M_1 - M_1) \sin \varphi_r = 0.$

Es iſt alſo unter den angegebenen Bedingungen ſowohl S_r auch $Q_r = 0$.

Iſt die rte Fuge die letzte, ſo wird noch immer $Q_r =$ und weil alsdann auch $M_{(r+1)} = 0$ iſt, inſofern hierdurch

ung des (r+1)ten Steins nach oben bezeichnet wird,
ält man in dieſem Falle

$$S_r = M_{(r+1)} = N_r$$

e Größe der Preſſung des rten Steins nach unten, wie
n muß.

Aufgabe 7. Von der in dem Punkt n, Fig. 140, nor-
gegen $c\gamma$ wirkenden Preſſungsdifferenz = D, ſoll das
ent in Beziehung auf den Punkt g angegeben werden.

Auflöſung. Es ſei die Lage von g beſtimmt durch
h und kg = g, und die Lage von n ſei beſtimmt durch
chtwinkligen Coordinaten ax = x und xn = y, ſo iſt
ertikale nv = h − x, und die Horizontale nz = vg =
y. Wird nun die normal gegen $c\gamma$ wirkende Kraft D
ie horizontale Seitenkraft = Z, und in eine vertikale
zerlegt, ſo iſt nach Aufgabe 4.

$$Z = D\cos\varphi \text{ und } V = D\sin\varphi$$

s iſt alſo das Moment der Kraft D für die Axe

$$gk = (gv)\cdot V = (g-y)D\sin\varphi$$

ür die Axe gh iſt das Moment

$$= (gz)\cdot Z = (h-x)D\cos\varphi.$$

Aufgabe 8. Es ſoll die Summe der Momente der
tlichen Preſſungsdifferenzen in Beziehung auf die Axen
ıd gh angegeben werden.

Auflöſung. Iſt, Fig. 138, die Lage des Punktes n_1
mt durch die Coordinaten x_1 und y_1; die von n_2 durch
d y_2, und ganz allgemein die von n_r durch x_r und y_r,
ezeichnet man, wie in Aufgabe 5., die Theilkräfte von
on welchen die eine horizontal und die andere vertikal
mit Z_r und V_r, ſo iſt, nach Aufgabe 7., das Moment
D_r in Beziehung auf die Axe gk, Fig. 140.,

$$= (g-y_r)V_r = (g-y_r)D_r\sin\varphi_r$$

as Moment in Beziehung auf die Axe gh iſt

$$= (h-x_r)Z_r = (h-x_r)D_r\cos\varphi_r$$

us erhält man die Summe der Momente, wenn nach
nach r = 1, 2, 3···· geſetzt und alles addirt wird. Setzt
dieſe Summe für die horizontal wirkenden Theilkräfte = H,
für die vertikal wirkenden = K, ſo iſt

$$= (h-x_1)Z_1+(h-x_2)Z_2+(h-x_3)Z_3\cdots+(h-x_r)Z_r$$

und $K=(g-y_1)V_1+(g-y_2)V_2+(g-y_3)V_3\cdots+(g-y_r)$
nämlich es ist
$H = h[Z_1+Z_2+Z_3\cdots+Z_r]-(x_1Z_1+x_2Z_2+x_3Z_3\cdots+x_r$
und weil, nach Aufgabe 5.,

$$Z_1+Z_2+Z_3\cdots+Z_r = Z = \frac{A_1}{tg\varphi_1}-\frac{A_{(r+1)}}{tg\varphi_{(r+1)}-tg\varphi_r}$$

so wird

1) $H = hZ-(x_1Z_1+x_2Z_2+x_3Z_3\cdots+x_rZ_r)$

wo nun für Z_1, Z_2, $Z_3\cdots$ und für Z die bekannten Wert
gesetzt werden können.

Ferner ist

$K=g[V_1+V_2+V_3\cdots+V_r]-(y_1V_1+y_2V_2+y_3V_3\cdots+y_rV_r$

und weil $V_1+V_2+V_3\cdots+V_r = V = A-\frac{A_{(r+1)}tg\varphi_r}{tg\varphi_{(r+1)}-tg\varphi_r}$

so wird 2) $K = gV-(y_1V_1+y_2V_2+y_3V_3\cdots+y_rV_r)$.

Aufgabe 9. Das Moment der Stabilität der Widerlage eines Gewölbes soll bestimmt werden, so daß dieselbe den durch die Pressungsdifferenzen entstehenden Druck abzuhalten im Stande ist.

Auflösung. Ist gh, Fig. 141, die äußere Linie der Widerlage, von welcher glsh einen Durchschnitt bildet, und ist dieselbe gegen das Verschieben in der Richtung lg gesichert, so kann durch die Pressungsdifferenzen nur ein Umwerfen derselben erfolgen, wobei ein Drehen der Widerlage um die Kante, von welcher g ein Punkt ist, stattfinden muß. Das Drehungsmoment wird nothwendig durch die horizontal wirkenden Theilkräfte der Pressungsdifferenzen erzeugt, und es ist dasselbe daher nach Aufgabe 8. =

$$H = hZ-(x_1Z_1+x_2Z_2+x_3Z_3\cdots+x_rZ_r)$$

für $Z_r = D_r\cos\varphi_r$ und $Z = \frac{A_1}{tg\varphi_1}$, weil alsdann $A_{(r+1)}=0$ ist.

Diesem Drehungsmomente widersteht der Gewölbebogen durch das Moment der vertikal wirkenden Theilkräfte $= K$
$= gV-(y_1V_1+y_2V_2+y_3V_3\cdots+y_rV_r)$
für $V_r = D_r\sin\varphi_r$ und $V = A$
und durch die Stabilität der Widerlage selbst. Setzt man

ieſe Stabilität = W, ſo muß, wenn die Widerlage ge-
as Umwerfen geſichert ſein ſoll,

$$W + K = H$$

und daher $W = H - K$ ſein;

forderliche Stabilität der Widerlage iſt alſo durch die aus
Preſſungsdifferenzen erzeugten Momente H und K be-
it.

Aufgabe 10. Die erforderliche Stärke der Widerlage
beſtimmt werden, ſo daß ſie gegen das Umwerfen ge-
t iſt.

Auflöſung. Iſt glsh, Fig. 141 a., ein Durchſchnitt der
rlage, und man ſetzt die geſuchte Stärke gl derſelben = w,
höhe ls = c und gh = C, und ihre ganze Länge = l,
der Kubikinhalt des Theils, von welchem gls den Durch-
tt bildet, = clw, und die Normale von dem Schwerpunkt
Theils auf die Grundfläche trifft dieſelbe in μ, ſo daß
$= \frac{gl}{2} = \frac{1}{2}w$ iſt; folglich iſt für dieſen Theil die Kraft,
welcher ſie dem Umwerfen widerſteht, wenn das Gewicht
Kubikeinheit der Maſſe, aus welcher die Widerlage beſteht,
G bezeichnet wird,

$$= \tfrac{1}{2}w \cdot clw \cdot G$$

hls iſt der Inhalt $= \frac{(C-c)wl}{2}$, alſo das Gewicht $=$
$\frac{(C-c)wl}{2} \cdot G$, und der Schwerpunkt liegt in n, ſo daß mn
$\frac{1}{3}h$; es iſt alſo auch $mo = \mu v = \frac{g\mu}{3}$. Folglich iſt $gv =$
$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}w = \frac{w}{3}$. Der Theil der Widerlage, von wel-
hls der Durchſchnitt iſt, widerſteht alſo mit einer Kraft =

$$\tfrac{1}{2}w \cdot \frac{(C-c)wl}{2} \cdot G$$

er iſt die Stabilität W der ganzen Widerlage

$$W = \tfrac{1}{2}w \cdot clw \cdot G + \tfrac{1}{3}w \cdot \frac{(C-c)lw}{2} \cdot G$$

$$= w^2lG\left(\frac{c}{2} + \frac{C-c}{6}\right) = \frac{w^2lG(C+2c)}{6}$$

Nun muß nach Aufgabe 9., wenn die Widerlage die erforderliche Stabilität haben soll,

$$W = H - K$$

sein, folglich muß auch die Gleichung stattfinden

$$\frac{w^2 l G (C + 2c)}{6} = H - K$$

und hieraus erhält man

$$w = \sqrt{\left[\frac{6(H-K)}{lG(C+2c)}\right]}$$

die gesuchte Formel für die erforderliche Stärke der Widerlage, wenn die Werthe von H und K als bekannt angenommen werden.

Zusatz 1. Aus §. 32. Aufgabe 5. findet man unmittelbar den Abstand des Schwerpunktes eines Paralleltrapez gleh von der einen Seite $gh = \frac{(C+2c)w}{3(C+c)}$ und es ist dieses auch der Abstand des Punktes μ (in welchem die Normale von dem Schwerpunkte auf die Grundfläche diese trifft) von g. Man erhält daher das Moment der ganzen Widerlage in Beziehung auf den Punkt g, wenn man diesen Ausdruck mit dem Gewicht der ganzen Widerlage, also mit $\left(\frac{C+c}{2}\right) wl \cdot G$ multiplicirt. Dieses Produkt giebt ebenfalls den Werth von W,

$$W = \frac{(C+2c)w}{3(C+c)} \times \left(\frac{C+c}{2}\right) wl \cdot G = \frac{w^2 l G (C+2c)}{6}$$

Zusatz 2. Die Formel, durch welche der Werth von w berechnet werden muß, wird etwas verwickelter, wenn man berücksichtigt, daß auch der Werth von K zum Theil von w abhängt, denn es ist

$$K = gV - (y_1 V_1 + y_2 V_2 + y_3 V_3 \cdots + y_n V_n)$$

und $g = (kg)$, Fig. 141. Es ist also, wenn die bekannte Entfernung $kl = k$ gesetzt wird, $g = k + w$, und daher

$$K = (k+w)V - (y_1 V_1 + y_2 V_2 + y_3 V_3 \cdots + y_n V_n)$$

wofür man zur Abkürzung setzen kann

$$K = wV + L$$

wo nun $L = kV - (y_1 V_1 + y_2 V_2 + y_3 V_3 \cdots + y_n V_n)$ von w unabhängig ist.

Die allgemeine Gleichung $W = H - K$ wird hiernach

$$\frac{w^2 lG(C+2c)}{6} = H - wV - L$$

folglich ist $\frac{w^2 lG(C+2c)}{6} + Vw = H - L$

also $w^2 + \frac{6V}{lG(C+2c)} \cdot w = \frac{6(H-L)}{lG(C+2c)}$

daher $\left(w + \frac{3V}{lG(C+2c)}\right)^2 = \frac{6(H-L)}{lG(C+2c)} + \frac{9V^2}{l^2G^2(C+2c)^2}$

woraus endlich erhalten wird

$$w = \frac{-3V + \sqrt{[6(H-L)lG(C+2c) + 9V^2]}}{lG(C+2c)}$$

Aufgabe 11. Die Stärke des Theils der Widerlage eines Gewölbes, worauf der Gewölbebogen ruhet, und wovon gh, Fig. 142, einen Durchschnitt bildet, ist gegeben, man hat also die Linie $lg = m$; es soll die Stärke des hervorragenden Theils der Widerlage, wovon hgg'h' ein Durchschnitt ist, so bestimmt werden, daß die ganze Widerlage dadurch die erforderliche Stabilität erhält.

Auflösung. Wird die Bezeichnung wie bei der vorigen Aufgabe beibehalten, nur daß man hier $lg = m$ setzt, so ist für den Theil glsh der Abstand des Schwerpunktes von g, nach Aufgabe 10. Zusatz 2., $= \frac{(C+2c)m}{3(C+c)}$. Wird also gg' $= w$, so ist der Abstand von $g' = \frac{(C+2c)m}{3(C+c)} + w$, und der Flächinhalt dieses Theils der Widerlage ist $= \left(\frac{C+c}{2}\right) mlG$, folglich die Stabilität in Beziehung auf den Punkt g' $=$

$$\left[\frac{(C+2c)m}{3(C+c)} + w\right]\left(\frac{C+c}{2}\right) mlG.$$

Für denselben Punkt g' ist die Stabilität des Theils der Widerlage, von welchem g'ghh' den Durchschnitt bildet, $= \frac{C}{2} wlG$, folglich ist die Stabilität der ganzen Widerlage $=$

$$V = \frac{ClG}{2} \cdot w^2 + \left[\frac{(C+2c)m}{3(C+c)} + w\right] \cdot \left(\frac{C+c}{2}\right) mlG.$$

Setzt man dieſen Werth von W in der Gleichung

$$W = H - K$$

ſo iſt auch w durch eine quadratiſche Gleichung beſtimmt, bei ebenfalls geſetzt werden kann

$$K = wV + L$$

nur iſt hier in dem Ausdruck

$$L = kV - (y_1V_1 + y_2V_2 + y_3V_3 \cdots + y_rV_r)$$

$$k = (kg), \text{ Fig. 141.}$$

Aufgabe 12. Es ſoll angegeben werden, in w durch die Friction der wölbſteine das Verſchieben Theils des Gewölbeb erhindert wird, wenn auch Z riſſe entſtehen.

Auflöſung. ehme an, daß die Gewöl A_1; A_2; A_3 durch r on ſo zuſammenhängen, daß Fig. 138, als eine zu hängende Maſſe angeſehen kann, und daß dieſes auch bei dem unterhalb dδ liegenden des Gewölbebogens der Fall iſt, daß aber in dδ durch einen Zufall ein Fugenriß ſich erzeugt hat, ſo kann da wölbſtück acδd durch die in den Fugen oberhalb dδ w menden Schubkräfte verſchoben werden, und es wird bloß durch die Friction verhindert, welche aus dem N drucke dieſes Stückes gegen dδ entſteht. Nach Aufgab aber der Normaldruck in der rten Fuge, oder die hier w mende Preſſungsſumme,

$$S_r = (A \operatorname{tg} \varphi_r + A_1 \cot \varphi_1) \cos \varphi_r - M_{(r+1)}$$

und die Summe der Schubkräfte in dieſer Fuge, paral derſelben, iſt

$$Q_r = (A_1 \cot \varphi_1 - A \cot \varphi_r) \sin \varphi_r$$

Iſt nun der Frictionscoefficient $= \mu$, ſo wird μS_r t Schubkraft entgegenwirkende Kraft, und es kann daher Ausgleiten des Gewölbſtückes ſtattfinden, ſo lange

$$\mu S_r > Q_r$$

iſt, und die nähern Bedingungen werden aus der Gle erhalten

$$\mu S_r = Q_r$$

wobei $M_{(r+1)} = 0$ geſetzt werden kann, wenn man anni daß der unterhalb dδ liegende Theil des Gewölbes ei ſammenhängendes Stück bildet, und daher der ganze

als zu der Widerlage gehörend angesehen werden kann. Hiernach ist in dieser Gleichung

$$S_r = (A\,\mathrm{tg}\,\varphi_r + A_1 \cot\varphi_1)\cos\varphi_r = A\sin\varphi_r + \frac{A_1}{\mathrm{tg}\,\varphi_1}\cos\varphi_r$$

und $Q_r = (A_1\cot\varphi_1 - A\cot\varphi_r)\sin\varphi_r = \frac{A_1}{\mathrm{tg}\,\varphi_1}\sin\varphi_r - A\cos\varphi_r$

wo $A = A_1 + A_2 + A_3 \ldots + A_r$ das Gewicht des ganzen Gewölbstückes $a\alpha\delta d$ bedeutet, und $\frac{A_1}{\mathrm{tg}\,\varphi_1} = M_1$ die Horizontalpressung gegen $a\alpha$ ist. Hiernach erhält die obige Gleichung die Form

$$\mu\,(A\sin\varphi_r + M_1\cos\varphi_r) = M_1\sin\varphi_r - A\cos\varphi_r$$

Soll also ein Ausgleiten verhindert werden, so muß

$$\mu \gtrless \frac{M_1\sin\varphi_r - A\cos\varphi_r}{M_1\cos\varphi_r + A\sin\varphi_r} \text{ sein,}$$

und wenn man wirklich theilt, so wird erhalten

$$\mu \gtrless \mathrm{tg}\,\varphi_r - \frac{A\cos\varphi_r + A\sin\varphi_r\,\mathrm{tg}\,\varphi_r}{M_1\cos\varphi_r + A\sin\varphi_r}$$

$$= \mathrm{tg}\,\varphi_r - \frac{A\cos^2\varphi_r + A\sin^2\varphi_r)}{\cos\varphi_r(M_1\cos\varphi_r + A\sin\varphi_r)}$$

$$= \mathrm{tg}\,\varphi_r - \frac{A}{\cos\varphi_r S_r}$$

Hieraus geht also hervor, daß wenigstens für den Theil des Gewölbebogens kein Ausgleiten möglich ist, für welchen noch nicht $\mathrm{tg}\,\varphi_r > \mu$ wird.

Da ferner

$$\frac{A}{\cos\varphi_r S_r} = \frac{1}{\sin\varphi_r\cos\varphi_r} - \frac{M_1}{S_r\sin\varphi_r}$$

so ist auch

$$\mu \gtrless \mathrm{tg}\,\varphi_r - \frac{1}{\sin\varphi_r\cos\varphi_r} + \frac{M_1}{S_r\sin\varphi_r}$$

woraus sich erkennen läßt, innerhalb welcher Grenzen der Werth von μ liegen muß, wenn das Ausgleiten eines Gewölbstückes überhaupt nicht möglich sein soll.

Zusatz. Aus der Gleichung

$$\mu\,(A\sin\varphi_r + M_1\cos\varphi_r) = M_1\sin\varphi_r - A\cos\varphi_r$$

folgt, daß überhaupt kein Ausgleiten erfolgen kann, wenn

$$M_1\sin\varphi_r = A\cos\varphi_r$$

daß ein ſolches denkbar iſt in der Richtung δd für

$$M_1 \sin\varphi_1 > A\cos\varphi_1$$

und umgekehrt in der Richtung $d\delta$, alſo nach unten zu,

$$M_1 \sin\varphi_1 < A\cos\varphi_1$$

Aufgabe 13. Von der in dem Punkt n der Fuge Fig. 143, normal wirkenden Preſſungsdifferenz D ſoll Moment in Beziehung auf die ihrer Lage nach gegebene genlinie ep und die ...u derſelben gezogene ef, für Anfangspunkt e b ...rden.

Auflöſung. Sc ...n die Fugenlinien cγ und ep in g unter dem Winkel ...nd man zerlegt die in der ...tung nd normal geg ...irkende Kraft D in zwei S... kräfte p und q, der... ...ngen normal gegen die Axe und ef ſind, ſo iſt

$$D : p = 1 : \cos dnp \text{ und } D : q = 1 : \sin dnp$$

oder weil $\angle dnp = \psi$, ſo iſt

$$D : p = 1 : \cos\psi \text{ und } D : q = 1 : \sin\psi$$

und es iſt daher

$$p = D\cos\psi \text{ und } q = D\sin\psi.$$

Da nun das Moment für den Anfangspunkt e beſtimmt den ſoll, ſo iſt daſſelbe

$$\text{für die Axe eg} = (ep)\cdot p = (ep)\,D\cos\psi$$

$$\text{und für die Axe ef} = (eq)\cdot q = (eq)\,D\sin\psi$$

wo nun noch die Werthe von ep und eq näher beſtimmt den müſſen.

Die Lage des Punktes n ſei in Beziehung auf die ... tikale ak beſtimmt durch die Coordinaten $ax = x$ und $xn =$ und die ihrer Lage nach gegebene Linie eg ſchneide die ak dem Punkte h, ſo daß $ah = h$ und $eh = g$, ſo iſt in ... Winkel $abc = \beta$ die Lage von n durch $hx = h - x$ ... $xn = y$ gegeben, und es laſſen ſich hieraus die Werthe ... hp und pn in dem Viereck nxhp beſtimmen, und man fin...

$$(hp) = (h - x)\cos\beta + y\sin\beta$$

$$\text{und } (pn) = (h - x)\sin\beta - y\cos\beta$$

folglich iſt $(ep) = (he) - (hp) = g - (h - x)\cos\beta - y\sin$...

$$\text{und } (eq) = (pn) = (h - x)\sin\beta - y\cos\beta$$

D

Daher sind die gesuchten Momente

$(ep)\cdot p = (ep)\,D\cos\psi = [g-(h-x)\cos\beta - y\sin\beta]\,D\cos\psi$

$(eq)\cdot q = (eq)\,D\sin\psi = [(h-x)\sin\beta - y\cos\beta]\,D\sin\psi$

und es ist $\psi = \beta - \alpha$.

Aufgabe 14. Die Summe der Momente aller Pressungsdifferenzen der oberhalb ep liegenden Fugen soll für den Punkt e und die beiden Axen eg und ef bestimmt werden.

Auflösung. Ist ep die rte Fuge, welche die Vertikale ak unter einem Winkel $= \varphi_r$ schneidet, und $c\gamma$ die nte Fugenlinie, von welcher ak unter dem Winkel φ_n geschnitten wird, und sind die Coordinaten für den Punkt n die Linien $ax = x$ und $xn = y_n$, so wird $\psi = \varphi_r - \varphi_n$, und das Moment der nten Pressungsdifferenz $= D_n$ ist für die Axe eg =

$$p_n = [g-(h-x_n)\cos\varphi_r - y_n\sin\varphi_r]\,D_n\cos(\varphi_r-\varphi_n)$$

und für die Axe ef ist das Moment

$$q_n = [(h-x_n)\sin\varphi_r - y_n\cos\varphi_r]\,D_n\sin(\varphi_r-\varphi_n).$$

Hieraus erhält man die Momente für die 1ste, 2te, 3te ꝛc. Pressungsdifferenz, wenn man nach und nach $n = 1, 2, 3\cdots r$ setzt, und es ist hiernach

$$p_1 = [g-(h-x_1)\cos\varphi_r - y_1\sin\varphi_r]\,D_1\cos(\varphi_r-\varphi_1)$$
$$p_2 = [g-(h-x_2)\cos\varphi_r - y_2\sin\varphi_r]\,D_2\cos(\varphi_r-\varphi_2)$$
$$p_3 = [g-(h-x_3)\cos\varphi_r - y_3\sin\varphi_r]\,D_3\cos(\varphi_r-\varphi_3)$$
$$\vdots$$
$$p_r = [g-(h-x_r)\cos\varphi_r - y_r\sin\varphi_r]\,D_r.$$

Wird also die Summe der sämmtlichen Momente für die Axe eg mit S bezeichnet, so ist

$$S = p_1 + p_2 + p_3\cdots + p_r =$$
$$(g-h\cos\varphi_r)[D_1\cos(\varphi_r-\varphi_1) + D_2\cos(\varphi_r-\varphi_2) + D_3\cos(\varphi_r-\varphi_3)\cdots + D_r\cos(\varphi_r-\varphi_r)]$$
$$+[x_1D_1\cos(\varphi_r-\varphi_1) + x_2D_2\cos(\varphi_r-\varphi_2) + x_3D_3\cos(\varphi_r-\varphi_3)\cdots + x_rD_r\cos(\varphi_r-\varphi_r)]\cos\varphi_r$$
$$-[y_1D_1\cos(\varphi_r-\varphi_1) + y_2D_2\cos(\varphi_r-\varphi_2) + y_3D_3\cos(\varphi_r-\varphi_3)\cdots + y_rD_r\cos(\varphi_r-\varphi_r)]\sin\varphi_r.$$

Ferner ist, wenn in der Gleichung für q nach und nach $n = 1, 2, 3\cdots r$ gesetzt wird,

$$q_1 = [(h-x_1)\sin\varphi_r - y_1\cos\varphi_r]\,D_1\sin(\varphi_r-\varphi_1)$$
$$q_2 = [(h-x_2)\sin\varphi_r - y_2\cos\varphi_r]\,D_2\sin(\varphi_r-\varphi_2)$$
$$q_3 = [(h-x_3)\sin\varphi_r - y_3\cos\varphi_r]\,D_3\sin(\varphi_r-\varphi_3)$$

und es ist hier das letzte Glied

$$q_{(r-1)} = [(h - x_{(r-1)}) \sin \varphi_r - y_{(r-1)} \cos \varphi_r] D_{(r-1)} \sin(\varphi_r - \varphi_{(r-1)})$$

Setzt man also die Summe der Momente für die Axe ef = T, so wird

$$T = q_1 + q_2 + q_3 \cdots + q_{(r-1)} =$$
$$h \sin \varphi_r [D_1 \sin(\varphi_r - \varphi_1) + D_2 \sin(\varphi_r - \varphi_2) + D_3 \sin(\varphi_r - \varphi_3) \cdots + [D_{(r-1)} \sin(\varphi_r - \varphi_{(r-1)})]$$
$$- [x_1 D_1 \sin(\varphi_r - \varphi_1) + x_2 D_2 \sin(\varphi_r - \varphi_2) + x_3 D_3 \sin(\varphi_r - \varphi_3) \cdots + x_{(r-1)} D_{(r-1)} \sin(\varphi_r - \varphi_{(r-1)})] \sin \varphi_r$$
$$- [y_1 D_1 \sin(\varphi_r - \varphi_1) + y_2 D_2 \sin(\varphi_r - \varphi_2) + y_3 D_3 \sin(\varphi_r - \varphi_3) \cdots + y_{(r-1)} D_{(r-1)} \sin(\varphi_r - \varphi_{(r-1)})] \cos \varphi_r$$

Diese Ausdrücke für S und T lassen sich erst alsdann auf eine einfachere Form bringen, wenn die Abhängigkeit der Coordinaten x und y von dem Winkel φ, und die Werthe von φ_n näher bestimmt sind.

Zusatz. Entstehen durch irgend einen Zufall in den Fugen $a\alpha$ und $e\varepsilon$, Fig. 138, Fugenrisse, so kann das Zusammenstürzen des Gewölbes auch dadurch erfolgen, daß der zwischen den Fugenrissen liegende Bogen um e als um eine Axe gedreht wird. Das Drehungsmoment bildet sich hier nothwendig aus den Theilen q_n der Pressungsdifferenzen, und es ist dasselbe der oben gefundene Werth

$$T = q_1 + q_2 + q_3 \cdots + q_{(r-1)}$$

Soll dieses Moment keine Drehung erzeugen können, so darf es nicht größer sein, als das derselben widerstehende Moment

$$S = p_1 + p_2 + p_3 \cdots + p_r$$

und daher ist die Bedingung, unter welcher der Gewölbebogen gegen das Einstürzen gesichert wird,

$$S \geqq T$$

es muß also sein

$$p_1 + p_2 + p_3 \cdots + p_r \geqq q_1 + q_2 + q_3 \cdots + q_{(r-1)}$$

Findet diese Bedingung statt, und ist nach Aufgabe 12. auch

$$\mu \geqq \frac{M_1 \sin \varphi_r - A \cos \varphi_r}{M_1 \cos \varphi_r + A \sin \varphi_r}$$

und hat die Widerlage die erforderliche Stärke, so ist das Gewölbe gegen das Einstürzen gesichert.

§. 80.

bungen von gleich starken kreisförmigen Gewölbebogen.

1. Sind, Fig. 138, die Curven ae und $\alpha\varepsilon$ ein paar ncentrische Kreisbogen, und werden dieselben von den Fulinien $a\alpha$, $b\beta$ ꝛc. normal geschnitten, so treffen dieselben mmtlich in dem Mittelpunkte des Kreises zusammen, und sind für $ab = bc = cd$ ꝛc., die Winkel, unter welchen je zwei neben einander liegende Fugen schneiden, gleich ß, und eben so sind in diesem Falle auch die Gewichte der zelnen Gewölbsteine von gleicher Größe. Es ist also bei ser Voraussetzung

$$A_1 = A_2 = A_3 \cdots = A_r$$

$$\text{und } \varphi_r = r\varphi.$$

2. Die, für die normalen Pressungen der einzelnen Gelbsteine gegeneinander, in §. 74. Aufgabe 1., erhaltenen Ausdrücke

$$M_r = \frac{A_r \cos\varphi_r}{\sin(\varphi_r - \varphi_{(r-1)})} \text{ und } N_r = \frac{A_r \cos\varphi_{(r-1)}}{\sin(\varphi_r - \varphi_{(r-1)})}$$

rden also jetzt

$$M_r = \frac{A_1 \cos r\varphi}{\sin\varphi} \text{ und } N_r = \frac{A_1 \cos(r-1)\varphi}{\sin\varphi}$$

3. Hieraus erhält man nun für die Pressungsdifferenz die Formel

$$D_r = N_r - M_{(r+1)}$$

$$= \frac{A_1 \cos(r-1)\varphi}{\sin\varphi} - \frac{A_1 \cos(r+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

$$= \frac{A_1}{\sin\varphi}[\cos(r-1)\varphi - \cos(r+1)\varphi]$$

d weil überhaupt

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)$$

so ist auch $\cos(r-1)\varphi - \cos(r+1)\varphi = 2\sin r\varphi \sin\varphi$

d es wird daher

$$D_r = \frac{A_1}{\sin\varphi} \cdot 2\sin r\varphi \sin\varphi = 2A_1 \sin r\varphi$$

glich ist

$$D_1 = 2A_1 \sin\varphi$$
$$D_2 = 2A_1 \sin 2\varphi$$
$$D_3 = 2A_1 \sin 3\varphi \text{ ꝛc.}$$

4. Wird die Pressungsdifferenz D_r in zwei Seitenkräfte

zerlegt, von welchen die eine Z_r horizontal, und die andere V_r vertikal wirkt, ſo iſt, nach Aufgabe 4.,

$$Z_r = D_r \cos r\varphi, \text{ und } V_r = D_r \sin r\varphi,$$

und es iſt daher bei der hier ſtattfindenden Vorausſetzung

$$Z_r = 2A_1 \sin r\varphi \cos r\varphi = A_1 \sin 2r\varphi$$

$$\text{und } V_r = 2A_1 \sin r\varphi \sin r\varphi = 2A_1 \sin^2 r\varphi.$$

Es iſt alſo

$$Z_1 = A_1 \sin 2\varphi \text{ und } V_1 = 2A_1 \sin^2 \varphi$$
$$Z_2 = A_1 \sin 4\varphi \quad " \quad V_2 = 2A_1 \sin^2 2\varphi$$
$$Z_3 = A_1 \sin 6\varphi \quad " \quad V_3 = 2A_1 \sin^2 3\varphi$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$Z_r = A_1 \sin 2r\varphi \quad " \quad V_r = 2A_1 \sin^2 r\varphi.$$

5. Die Summe Z aller horizontal wirkenden Theilkräfte iſt ganz allgemein, nach §. 79. Aufgabe 5.,

$$Z = \frac{A_1}{\operatorname{tg}\varphi_1} - \frac{A_{(r+1)}}{\operatorname{tg}\varphi_{(r+1)} - \operatorname{tg}\varphi_r}$$

alſo iſt hier $Z = \dfrac{A_1}{\operatorname{tg}\varphi} - \dfrac{A_1}{\operatorname{tg}(r+1)\varphi - \operatorname{tg} r\varphi}$

und weil $\operatorname{tg}(r+1)\varphi - \operatorname{tg} r\varphi = \dfrac{\sin(r+1)\varphi}{\cos(r+1)\varphi} - \dfrac{\sin r\varphi}{\cos r\varphi}$

$$= \frac{\sin(r+1)\varphi \cos r\varphi - \cos(r+1)\varphi \sin r\varphi}{\cos(r+1)\varphi \cos r\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos(r+1)\varphi \cos r\varphi}$$

ſo wird $Z = \dfrac{A_1}{\operatorname{tg}\varphi} - \dfrac{A_1 \cos(r+1)\varphi \cos r\varphi}{\sin\varphi}$

und da nach No. 2. $\dfrac{A_1 \cos(r+1)\varphi}{\sin\varphi} = M_{(r+1)}$

ſo iſt I. $$Z = \frac{A_1}{\operatorname{tg}\varphi} - M_{(r+1)} \cos r\varphi.$$

Die Summe der vertikal wirkenden Theilkräfte iſt

$$V = A_1 + A_2 + A_3 \cdots + A_r - \frac{A_{(r+1)} \operatorname{tg}\varphi_r}{\operatorname{tg}\varphi_{(r+1)} - \operatorname{tg}\varphi_r}$$
$$= A_1 + A_2 + A_3 \cdots + A_r - M_{(r+1)} \sin\varphi_r$$

folglich iſt II. $$V = rA_1 - M_{(r+1)} \sin r\varphi.$$

Zuſatz 1. Es iſt für Z zuerſt der Werth gefunden worden

$$Z = \frac{A_1}{\operatorname{tg}\varphi} - \frac{A_1 \cos(r+1)\varphi \cos r\varphi}{\sin\varphi}$$

und es iſt auch

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 \cdots + Z_r$$

, wenn man die Werthe aus No. 4. ſetzt,

$$= A_1 \sin 2\varphi + A_1 \sin 4\varphi + A_1 \sin 6\varphi \cdots + A_1 \sin 2r\varphi$$

ich wird erhalten, wenn man die beiden Ausdrücke für Z
ıber gleich ſetzt,

$$A_1[\sin 2\varphi + \sin 4\varphi + \sin 6\varphi \cdots + \sin 2r\varphi]$$
$$= A_1\left[\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} - \frac{\cos(r+1)\varphi \cos r\varphi}{\sin\varphi}\right]$$
$$= A_1\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\cos(r+1)\varphi \cos r\varphi}{\sin\varphi}\right]$$
$$= \frac{A_1}{\sin\varphi}[\cos\varphi - (\cos r\varphi \cos\varphi - \sin r\varphi \sin\varphi)\cos r\varphi]$$
$$= \frac{A_1}{\sin\varphi}[\cos\varphi (1 - \cos^2 r\varphi) + \sin r\varphi \cos r\varphi \sin\varphi]$$
$$= \frac{A_1}{\sin\varphi}(\cos\varphi \sin^2 r\varphi + \sin r\varphi \cos r\varphi \sin\varphi)$$
$$\frac{\sin r\varphi}{\sin\varphi}(\sin r\varphi \cos\varphi + \cos r\varphi \sin\varphi) = \frac{A_1 \sin r\varphi \sin(r+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

hieraus erhält man endlich

$$\varphi + \sin 4\varphi + \sin 6\varphi \cdots + \sin 2r\varphi = \frac{\sin r\varphi \sin(r+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

der Richtigkeit dieſer Summationsformel findet man ei-
›irecten Beweis in dem zweiten Bande von Unger's prak-
ı Uebungen für angehende Mathematiker Seite 438.

Zuſatz 2. Es iſt gefunden worden

$$V = rA_1 - M_{(r+1)} \sin r\varphi$$
$$= rA_1 - \frac{A_1 \cos(r+1)\varphi}{\sin\varphi} \cdot \sin r\varphi$$

:s muß auch ſein

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \cdots + V_r$$
$$= 2A_1[\sin^2\varphi + \sin^2 2\varphi + \sin^2 3\varphi \cdots + \sin^2 r\varphi]$$

ch iſt auch

$$\varphi + \sin^2 2\varphi + \sin^2 3\varphi \cdots + \sin^2 r\varphi] = r - \frac{\sin r\varphi \cos(r+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

übrigens $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$, ſo folgt hieraus auch

$$-\cos 2\varphi) + (1 - \cos 4\varphi) + (1 - \cos 6\varphi) \cdots + (1 - \cos 2r\varphi)]$$
$$= r - [\cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 6\varphi \cdots + \cos 2r\varphi] =$$
$$r - \frac{\sin r\varphi \cos(r+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

und es iſt daher

$$\cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 6\varphi \cdots + \cos 2r\varphi = \frac{\sin r\varphi \cos(r+1)}{\sin \varphi}$$

Zuſatz 3. Aus der Summe der Reihe

$$2[\sin^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi + \sin^2 3\varphi \cdots + \sin^2 r\varphi] = r - \frac{\sin r\varphi \cos(r+1)}{\sin \varphi}$$

folgt auch

$$2[(1-\cos^2\varphi)+(1-\cos^2 2\varphi)+(1-\cos^2 3\varphi)\cdots+(1-\cos^2 r$$
$$= 2r - 2[\cos^2\varphi \quad \varphi + \cos^2 3\varphi \cdots + \cos^2 r\varphi] =$$
$$r \cdot \quad \frac{\cos(r+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

und es iſt daher

$$2[\cos^2\varphi + c \quad \cos^2 3\varphi \cdots + \cos^2 r\varphi] =$$
$$r \quad \frac{\cos(r+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

6. Die Summe der Normalpreſſungen $= S_r$ in der Fuge iſt, nach §. 79. Aufgabe 6.,

$$S_r = (A - M_{(r+1)} \sin\varphi_r) \sin\varphi_r + \left(\frac{A_1}{\operatorname{tg}\varphi_1} - M_{(r+1)} \cos\varphi_r\right) \cos$$
$$= A \sin\varphi_r + \frac{A_1}{\operatorname{tg}\varphi_1} \cos\varphi_r - M_{(r+1)}$$

und die Größe der Schubkraft iſt daſelbſt

$$Q_r = \left(\frac{A_1}{\operatorname{tg}\varphi_1} - M_{(r+1)} \cos\varphi_r\right) \sin\varphi_r - (A - M_{(r+1)} \sin\varphi_r) \cos$$
$$= \frac{A_1}{\operatorname{tg}\varphi_1} \sin\varphi_r - A \cos\varphi_r$$

daher iſt bei der in dieſem §. ſtattfindenden Vorausſetzung

$$S_r = rA_1 \sin r\varphi + \frac{A_1 \cos r\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} - M_{(r+1)}$$

$$\text{und } Q_r = \frac{A_1 \sin r\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} - rA_1 \cos r\varphi.$$

Da nun, wenn die Friction das Ausgleiten eines Bogenſtück verhindern ſoll,

$$\mu S_r \gtrless Q_r$$

ſein muß, ſo wird dieſe Bedingung, wenn man $M_{(r+1)} =$ ſetzt,

$$\mu\left[rA_1 \sin r\varphi + \frac{A_1 \cos r\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}\right] \gtrless \frac{A_1 \sin r\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} - rA_1 \cos r\varphi$$

nd weil $\frac{A_1}{\operatorname{tg}\varphi} = M_1$, so wird

$$\mu \gtrless \frac{M_1 \sin r\varphi - rA_1 \cos r\varphi}{M_1 \cos r\varphi + rA_1 \sin r\varphi}$$

7. Wirkt an dem Punkte n, normal gegen den Radius n, Fig. 140, eine Kraft D, und man zerlegt dieselbe in eine orizontale und eine vertikale Seitenkraft, so ist für amc $= \varphi$ e in der Richtung nz wirkende horizontale Seitenkraft $Z =$ $\cos\varphi$, und die vertikale in der Richtung nv wirkende ist $= D\sin\varphi$. In Beziehung auf den Punkt g für die Coor- natenaxen gk und gh ist also das Moment

$$\text{von } Z = (gz)Z = (gz)D\cos\varphi$$
$$\text{und von } V = (gv)V = (gv)D\sin\varphi.$$

Setzt man nun gk $= g$, den Radius ma $=$ mn $= R$, mk $= h$, $x = x$ und xn $= y$, so ist

$(gz) = kx = h + R - x$ und $(gv) = (zn) = g - y$

nd weil $(mx) = R - x = R\cos\varphi$ und $(nx) = y = R\sin\varphi$, wird

$$(gz) = h + R\cos\varphi \text{ und } (gv) = g - R\sin\varphi.$$

Olglich ist das Moment von Z

$(gz)D\cos\varphi = (h + R\cos\varphi)D\cos\varphi = hD\cos\varphi + RD\cos^2\varphi$

d das Moment von V ist

$(gv)D\sin\varphi = (g - R\sin\varphi)D\sin\varphi = gD\sin\varphi - RD\sin^2\varphi$

e Differenz beider Momente ist also

$$Z - V = hD\cos\varphi + RD\cos^2\varphi - gD\sin\varphi + RD\sin^2\varphi$$
$$= hD\cos\varphi + RD - gD\sin\varphi.$$

Will man diese Differenz für die rte Pressungsdifferenz ken- en lernen, so muß $\varphi = \varphi_r = r\varphi$ und $D = D_r = 2A_1\sin r\varphi$ gesetzt werden, und es ist daher

$$-V_r = h\cdot 2A_1\sin r\varphi\cdot\cos r\varphi + R\cdot 2A_1\sin r\varphi - g\cdot 2A_1\sin r\varphi\cdot\sin r\varphi$$
$$= hA_1\sin 2r\varphi + 2A_1R\sin r\varphi - 2A_1g\sin^2 r\varphi.$$

Ebenso ist, wenn man nach und nach r $= 1, 2, 3$ ꝛc. setzt,

$$Z_1 - V_1 = hA_1\sin 2\varphi + 2A_1R\sin\varphi - 2A_1g\sin^2\varphi$$
$$Z_2 - V_2 = hA_1\sin 4\varphi + 2A_1R\sin 2\varphi - 2A_1g\sin^2 2\varphi$$
$$Z_3 - V_3 = hA_1\sin 6\varphi + 2A_1R\sin 3\varphi - 2A_1g\sin^2 3\varphi$$
$$\text{u. s. w.}$$

nd es ist daher, wenn die Summe der Momente der hori-

zontal wirkenden Theilkräfte = H, und die der vertikal wirkenden = K geſetzt wird,

$$H - K = hA_1[\sin 2\varphi + \sin 4\varphi + \sin 6\varphi \cdots + \sin 2r\varphi] + 2A_1R[\sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi \cdots + \sin r\varphi] - 2A_1g[\sin^2\varphi + \sin^2 2\varphi + \sin^2 3\varphi \cdots + \sin^2 r\varphi]$$

Nun iſt aber, nach No. 4. Zuſatz 1.,

$$\sin 2\varphi + \sin 4\varphi + \sin 6\varphi \cdots + \sin 2r\varphi = \frac{\sin r\varphi \sin(r+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

und daher, wenn $\frac{1}{2}\varphi$ ſtatt φ geſetzt wird,

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi \cdots + \sin r\varphi = \frac{\sin\frac{1}{2}r\varphi \sin\frac{1}{2}(r+1)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

und nach No. 4. Zuſatz 2. iſt

$$\sin^2\varphi + \sin^2 2\varphi + \sin^2 3\varphi \cdots + \sin^2 r\varphi = \frac{1}{2}\left[r - \frac{\sin r\varphi \cos(r+1)\varphi}{\sin\varphi}\right]$$

Folglich iſt auch, wenn man dieſe Werthe ſetzt,

$$H - K = hA_1 \cdot \frac{\sin r\varphi \sin(r+1)\varphi}{\sin\varphi} + 2A_1R \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}r\varphi \sin\frac{1}{2}(r+1)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi} - A_1g\left(r - \frac{\sin r\varphi \cos(r+1)\varphi}{\sin\varphi}\right)$$

8. Das Moment der Stabilität der Widerlage eines Gewölbes = W iſt nach §. 79. Aufgabe 9. durch die Formel beſtimmt

$$W = H - K$$

und daher iſt auch W durch die Gleichung beſtimmt

$$W = hA_1 \cdot \frac{\sin r\varphi \sin(r+1)\varphi}{\sin\varphi} + 2A_1R \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}r\varphi \sin\frac{1}{2}(r+1)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi} - A_1g\left[r - \frac{\sin r\varphi \cos(r+1)\varphi}{\sin\varphi}\right]$$

nämlich es iſt

$$W = \frac{A_1 \sin r\varphi}{\sin\varphi}(h\sin(r+1)\varphi + g\cos(r+1)\varphi) + 2A_1R\frac{\sin\frac{1}{2}r\varphi \sin\frac{1}{2}(r+1)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi} - rA_1g.$$

Aus dieſer Gleichung läßt ſich nun die erforderliche Stärke der Widerlage für einen kreisförmigen Gewölbebogen berechnen.

9. Nach §. 79. Aufgabe 13. iſt das Moment der in u normal gegen cγ, Fig. 143, wirkenden Kraft D für die Axe

$$(eg) = (ep) \cdot p = (ep) \cdot D\cos\psi$$

und für die Axe $(\alpha\beta) = (eq) \cdot q = (eq) \cdot D \sin\psi$
und es ist $\psi = \beta - \alpha$.

nun, Fig. 138, ae und $\alpha\varepsilon$ concentrische Kreisbogen, ist
be = cd ꝛc., und ist $e\varepsilon$ die rte und $c\gamma$ die nte Fu-
ie, so wird $\beta = \varphi_r = r\varphi$ und $\alpha = \varphi_n = n\varphi$, und es
her in diesem Falle $\psi = (r-n)\varphi$, also werden die
ente

$= (ep) D_n \cos(r-n)\varphi$ und $q_n = (eq) D_n \sin(r-n)\varphi$
beil $D_n = 2A_1 \sin n\varphi$, so erhält man

$$p_n = 2(ep) A_1 \sin n\varphi \cos(r-n)\varphi$$
$$q_n = 2(eq) A_1 \sin n\varphi \sin(r-n)\varphi.$$

$na = mn = R$, Fig. 144, und $me = g$ ist aber
$(ep) = (me) - (mp) = g - R\cos(r-n)\varphi$
$nd\ (eq) = (np) = R\sin(r-n)\varphi$
h wird auch

$p_n = 2(g - R\cos(r-n)\varphi) A_1 \sin n\varphi \cos(r-n)\varphi$
$2gA_1 \sin n\varphi \cos(r-n)\varphi - 2RA_1 \sin n\varphi \cos^2(r-n)\varphi$
und $q_n = 2A_1 R \sin n\varphi \sin^2(r-n)\varphi$.

10. Um nun die Summe aller Momente der oberhalb
orkommenden Preſſungsdifferenzen für die Axen ek und
nen zu lernen, muß man in den für p_n und q_n gefun-
Ausdrücken nach und nach $n = 1, 2, 3$ bis $n = r$
Auf dieſe Weiſe erhält man

$= 2gA_1 \sin\varphi \cos(r-1)\varphi - 2RA_1 \sin\varphi \cos^2(r-1)\varphi$
$= 2gA_1 \sin 2\varphi \cos(r-2)\varphi - 2RA_1 \sin 2\varphi \cos^2(r-2)\varphi$
$= 2gA_1 \sin 3\varphi \cos(r-3)\varphi - 2RA_1 \sin 3\varphi \cos^2(r-3)\varphi$

$= 2gA_1 \sin r\varphi - 2RA \sin r\varphi$

es ist, wenn die Summe dieſer Momente $= S$ geſetzt

$$S = p_1 + p_2 + p_3 \cdots + p_r$$
$= 2gA_1 [\sin\varphi \cos(r-1)\varphi + \sin 2\varphi \cos(r-2)\varphi +$
$\sin 3\varphi \cos(r-3)\varphi \cdots + \sin r\varphi \cos(r-r)\varphi]$
$- 2RA_1 [\sin\varphi \cos^2(r-1)\varphi + \sin 2\varphi \cos^2(r-2)\varphi$
$+ \sin 3\varphi \cos^2(r-3)\varphi \cdots + \sin r\varphi \cos^2(r-r)\varphi].$

:r ist

$$q_1 = 2RA_1 \sin\varphi \sin^2(r-1)\varphi$$
$$q_2 = 2RA_1 \sin 2\varphi \sin^2(r-2)\varphi$$

$$q_3 = 2RA_1 \sin 3\varphi \sin^2(r-3)\varphi$$
$$\vdots$$
$$q_{(r-1)} = 2RA_1 \sin(r-1)\varphi \sin^2\varphi$$

und dieſes iſt das letzte Glied, weil das Folgende, alſo q_r, den Factor $\sin(r-r)\varphi = \sin 0^0 = 0$ enthält.

Die Summe dieſer Momente $= T$ iſt hiernach

$$T = q_1 + q_2 + q_3 \cdots + q_{(r-1)} =$$
$$2RA_1[\sin\varphi \sin^2(r-1)\varphi + \sin 2\varphi \sin^2(r-2)\varphi + \sin 3\varphi \sin^2(r-3)\varphi$$
$$\cdots \quad -1)\varphi \sin^2\varphi]$$

11. Setzt man ſo wird die Gleichung erhalten

$$2gA_1[\sin\varphi\cos(r-1)\varphi \quad \text{os}(r-2)\varphi \cdots + \sin r\varphi\cos(r-r)\varphi]$$
$$-2RA_1[\sin\varphi\,c \quad \varphi + \sin 2\varphi\cos^2(r-2)\varphi \cdots$$
$$+ \quad s^2(r-r)\varphi]$$
$$= 2RA_1[\sin\varphi\,si \quad \varphi + \sin 2\varphi \sin^2(r-2)\varphi \cdots$$
$$+\sin_1\varphi \quad {}^2(r-r)\varphi]$$

und es iſt daher, wenn das zweite Glied des erſten Theils dieſer Gleichung herübergeſchafft wird,

$$2gA_1[\sin\varphi\cos(r-1)\varphi + \sin 2\varphi\cos(r-2)\varphi + \sin 3\varphi\cos(r-3)\varphi$$
$$\cdots + \sin r\varphi\cos(r-r)\varphi]$$
$$= 2RA_1[\sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi \cdots + \sin r\varphi]$$

nämlich es iſt

$$g[\sin\varphi\cos(r-1)\varphi + \sin 2\varphi\cos(r-2)\varphi + \sin 3\varphi\cos(r-3)\varphi \cdots$$
$$+\sin r\varphi\cos(r-r)\varphi] = R\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}r\varphi\sin\frac{1}{2}(r+1)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

Um aber auch die mit g multiplicirte Reihe zu ſummiren, braucht man nur zu berückſichtigen, daß

$$\sin n\varphi\cos(r-n)\varphi = \sin n\varphi[\cos r\varphi\cos n\varphi + \sin r\varphi\sin n\varphi]$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos r\varphi\sin 2n\varphi + \sin r\varphi\sin^2 n\varphi$$

Es iſt alſo

$$\sin\varphi\cos(r-1)\varphi = \tfrac{1}{2}\cos r\varphi\sin 2\varphi + \sin r\varphi\sin^2\varphi$$
$$\sin 2\varphi\cos(r-2)\varphi = \tfrac{1}{2}\cos r\varphi\sin 4\varphi + \sin r\varphi\sin^2 2\varphi$$
$$\sin 3\varphi\cos(r-3)\varphi = \tfrac{1}{2}\cos r\varphi\sin 6\varphi + \sin r\varphi\sin^2 3\varphi$$
$$\vdots$$
$$\sin r\varphi\cos(r-r)\varphi = \tfrac{1}{2}\cos r\varphi\sin 2r\varphi + \sin r\varphi\sin^2 r\varphi$$

folglich iſt

$$g[\sin\varphi\cos(r-1)\varphi + \sin 2\varphi\cos(r-2)\varphi + \sin 3\varphi\cos(r-3)\varphi$$
$$\cdots + \sin r\varphi\cos(r-r)\varphi] =$$

$$\frac{g\cos r\varphi}{2}[\sin 2\varphi+\sin 4\varphi+\sin 6\varphi\cdots+\sin 2r\varphi]$$

$$+g\sin r\varphi[\sin^2\varphi+\sin^2 2\varphi+\sin^2 3\varphi\cdots+\sin^2 r\varphi]=$$

$$\frac{\cos r\varphi}{2}\cdot\frac{\sin r\varphi\sin(r+1)\varphi}{\sin\varphi}+\frac{g\sin r\varphi}{2}\left(r-\frac{\sin r\varphi\cos(r+1)\varphi}{\sin\varphi}\right)$$

$$\frac{g\sin r\varphi}{2\sin\varphi}[\cos r\varphi\sin(r+1)\varphi-\sin r\varphi\cos(r+1)\varphi]+\frac{gr\sin r\varphi}{2}$$

$$=\frac{g\sin r\varphi}{2\sin\varphi}\cdot\sin\varphi+\frac{gr\sin r\varphi}{2}=\left(\frac{r+1}{2}\right)g\sin r\varphi$$

Gleichung $S = T$ führt also zu dem Resultat

$$\left(\frac{r+1}{2}\right)g\sin r\varphi = R\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}r\varphi\sin\frac{1}{2}(r+1)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

da $\sin r\varphi = 2\sin\frac{1}{2}r\varphi\cos\frac{1}{2}r\varphi$, so ist auch

$$(r+1)g\cos\tfrac{1}{2}r\varphi\sin\tfrac{1}{2}\varphi = R\sin\left(\frac{r+1}{2}\right)\varphi$$

Gleichung, aus welcher die erforderliche Stärke des Gebes berechnet werden kann.

§. 81.
Aufgaben.

Aufgabe 1. Die Größe der Horizontalpressung des ersten Gewölbsteines A_1 gegen die Vertikale ak, Fig. 145, bei einem kreisförmigen Gewölbebogen, also der Werth von M_1, näher bestimmt werden.

Auflösung. Es ist ganz allgemein $M_1 = \frac{A_1\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1} - A_1\cot\varphi_1$. Ist nun, Fig. 145, $a\alpha\beta b$ der Durchschnitt von , und die Länge des Gewölbes $= l$, so ist der Kubikinhalt $A_1 = l\times a\alpha\beta b$, und man kennt durch diesen Ausdruck gleich auch das Gewicht von A_1, wenn man die Kubikeinheit der Masse des Gewölbes als Gewichtseinheit annimmt. ter dieser Voraussetzung wird $A_1 = l\times a\alpha\beta b$. Wird $m\alpha = r$ und $\alpha a = b$ gesetzt, und bedeutet φ die Länge Bogens für den Radius $= 1$, so ist

$$(\alpha\beta) = r\varphi \text{ und } (ab) = (r+b)\varphi$$

es ist daher die Fläche

$$m = \frac{r}{2}\cdot r\varphi = \frac{r^2\varphi}{2} \text{ und } abm = \frac{r+b}{2}(r+b)\varphi = \frac{(r+b)^2\varphi}{2}$$

folglich iſt $ab\beta\alpha = \frac{(r+b)^2\varphi}{2} - \frac{r^2\varphi}{2} = \left(\frac{2rb+b^2}{2}\right)\varphi = \frac{b(2r+b)\varphi}{2}$

und es wird daher der geſuchte Werth von

$$M_1 = A_1 \cot\varphi = l \cdot ab\beta\alpha \cdot \cot\varphi = \frac{lb(2r+b)}{2} \cdot \varphi\cot\varphi.$$

Sind alſo die Dimenſionen l, r und b gegeben, ſo hängt der Werth der Preſſung M_1 von dem Produkt $\varphi\cot\varphi$ ab, und es iſt M_1 vollkommen beſtimmt, ſobald der Winkel φ gegeben iſt. Aber auch unabhängig von φ läßt ſich der Werth von M_1 ermitteln, wenn, wie dieſes gewöhnlich angenommen werden kann, φ ein kleiner Bogen iſt; denn da bekanntlich

$$\varphi = \operatorname{tg}\varphi - \frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5\varphi}{5} - \frac{\operatorname{tg}^7\varphi}{7} \ldots.$$

und $\operatorname{tg}\varphi\cot\varphi = 1$, ſo iſt

$$\varphi\cot\varphi = 1 - \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{3} + \frac{\operatorname{tg}^4\varphi}{5} + \frac{\operatorname{tg}^6\varphi}{7} \ldots.$$

und weil, für einen kleinen Werth von φ, die Tangente dieſes Winkels ein ächter Bruch von unbedeutendem Werthe wird, ſo kann man $\varphi\cot\varphi = 1$ ſetzen, und es iſt alsdann

$$M_1 = \frac{lb(2r+b)}{2}$$

Aufgabe 2. Von einem kreisförmigen, gleich ſtarken Gewölbebogen iſt der Radius der innern Wölbung $= r$ gegeben, und die Stärke des Gewölbes $= b$, ſo daß $r + b = R$ der Radius der äußern Wölbung iſt; man ſoll den Abſtand des Schwerpunktes des Bogens von dem Mittelpunkte des Kreiſes beſtimmen.

Auflöſung. Wird, Fig. 145, die Länge des Bogens $ab = L$ und die von $\alpha\beta = l$ geſetzt, die zu ab gehörige Sehne $= S$, und die zu $\alpha\beta$ gehörige $= s$, ſo iſt für den Ausſchnitt abm der Abſtand des Schwerpunktes von dem Mittelpunkt $m = \frac{2RS}{3L}$ und die Fläche des Ausſchnitts $= \frac{RL}{2}$, alſo das Moment des Ausſchnitts $= \frac{R^2S}{3}$, und eben ſo iſt das Moment des Ausſchnitts $\alpha\beta m = \frac{r^2s}{3}$.

Die Fläche $ab\beta\alpha$ ist $= \frac{RL-rl}{2}$, und daher, wenn der
Tand des Schwerpunktes derselben von $m=x$ gesetzt wird,
Moment $= \left(\frac{RL-rl}{2}\right)x$.

Da nun abm aus $\alpha\beta m$ und $ab\beta\alpha$ besteht, so muß die
mme der Momente dieser beiden letztern dem von abm
ch sein, und es findet daher die Gleichung statt

$$\left(\frac{RL-rl}{2}\right)x + \frac{r^2s}{3} = \frac{R^2S}{3}$$

$$\text{woraus folgt } x = \frac{2(R^2S-r^2s)}{3(RL-rl)}$$

n ist aber die Länge des Bogens $L = R\varphi$ und $l = r\varphi$,
die Sehne $S = 2R\sin\frac{1}{2}\varphi$ und $s = 2r\sin\frac{1}{2}\varphi$, folglich
, wenn man diese Werthe setzt,

$$= \frac{2(R^2\cdot 2R\sin\frac{1}{2}\varphi - r^2\cdot 2r\sin\frac{1}{2}\varphi)}{3(R\cdot R\varphi - r\cdot r\varphi)} = \frac{4(R^3-r^3)\sin\frac{1}{2}\varphi}{3(R^2-r^2)\varphi}$$

$$= \frac{4(R^2+Rr+r^2)\sin\frac{1}{2}\varphi}{3(R+r)\varphi}$$

wenn man in diesem Ausdruck für R den Werth $r+b$
, so wird

$$x = \frac{4(3r^2+3rb+b^2)\sin\frac{1}{2}\varphi}{3(2r+b)\varphi}$$

Zusatz 1. Setzt man $r+\frac{1}{2}b=\varrho$, so wird ϱ der mitt-
Halbmesser genannt, und es ist nun $r = \varrho - \frac{1}{2}b$ und
$= \varrho + \frac{1}{2}b$, also

$$R^2 = \varrho^2 + \varrho b + \tfrac{1}{4}b^2$$
$$Rr = \varrho^2 \quad - \tfrac{1}{4}b^2$$
$$r^2 = \varrho^2 - \varrho b + \tfrac{1}{4}b^2$$

daher $R^2 + Rr + r^2 = 3\varrho^2 + \frac{1}{4}b^2$ und $R+r = 2\varrho$,
Lich ist auch

$$x = \frac{4(3\varrho^2+\frac{1}{4}b^2)\sin\frac{1}{2}\varphi}{3\cdot 2\varrho\varphi} = \frac{(12\varrho^2+b^2)\sin\frac{1}{2}\varphi}{6\varrho\varphi}$$

weil $\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\varphi} = \frac{S}{2L} = \frac{s}{2l}$, so kann man auch setzen, wenn
nd L′ die zu dem Winkel φ für den Radius ϱ gehörige
ne und Länge des Bogens bedeuten,

$$x = \frac{S'}{L'} \cdot \left(\frac{12\varrho^2 + b^2}{12\varrho}\right)$$

Ist aber φ ein sehr kleiner Bogen, so wird $\sin\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}\varphi$, und es ist alsdann S' und L' nicht verschieden von einander. Für diesen Fall erhält man also

$$x = \frac{12\varrho^2 + b^2}{12\varrho} = \varrho + \frac{b^2}{12\varrho}$$

Zusatz 2. Wollte man $ab\beta\alpha$, Fig. 145, als ein Paralleltrapez ansehen, so würde man finden

$$x = r + \frac{b((\alpha\beta) + 2(ab))}{3(\alpha\beta + ab)}$$

und daher auch, weil $\alpha\beta = r\varphi$ und $ab = R\varphi$,

$$x = r + \frac{b(r+2R)}{3(r+R)} = r + \frac{(R-r)(r+2R)}{3(r+R)}$$

woraus erhalten wird, wenn man alles auf gleiche Benennung bringt,

$$x = \frac{2(R^2 + Rr + r^2)}{3(R+r)}$$

Setzt man hier $R = \varrho + \frac{1}{2}b$ und $r = \varrho - \frac{1}{2}b$, so wird

$$x = \frac{2(3\varrho^2 + \frac{1}{4}b^2)}{3 \cdot 2\varrho} = \frac{12\varrho^2 + b^2}{12\varrho}.$$

Wenn also φ einen so kleinen Werth hat, daß $\sin\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}\varphi$ gesetzt werden kann, oder was dasselbe ist, daß die Sehne nicht wesentlich von dem dazu gehörigen Bogen abweicht, so kann die Lage des Schwerpunktes von $ab\beta\alpha$, eben so wie bei einem Paralleltrapez berechnet werden. Ist dieses aber nicht der Fall, so muß man den für das Paralleltrapez sich ergebenden Ausdruck $\frac{12\varrho^2 + b^2}{12\varrho}$ noch mit dem Coefficienten $\frac{S'}{L'} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\varphi}{\varphi}$ multipliciren, und weil $\frac{2\sin\frac{1}{2}\varphi}{\varphi} < 1$, so folgt, daß der Schwerpunkt der Figur $ab\beta\alpha$ dem Mittelpunkt m etwas näher liegt, als wenn dieselbe ein Paralleltrapez wäre.

Aufgabe 3. Das Moment W der Widerlage lehg, Fig. 145, eines kreisförmigen, gleich starken Gewölbebogens soll in Beziehung auf den Punkt g bestimmt werden.

Auflösung. Für $m\alpha = r$, $\alpha a = \varepsilon e = b$, also $ma =$

$= R = r + b$ und $\angle ame = n\varphi$, ist auch $\angle \varepsilon em = n\varphi$, daher

$\varepsilon e : em = 1 : \cos n\varphi$ und $\varepsilon e : \varepsilon m = 1 : \sin n\varphi$

folglich ist $em = b\cos n\varphi$ und $\varepsilon m = b\sin n\varphi$

ier ist $m\varepsilon : \varepsilon n = 1 : \sin n\varphi$ und $m\varepsilon : mn = 1 : \cos n\varphi$

also $\varepsilon n = r\sin n\varphi$ und $mn = r\cos n\varphi$.

nun $km = h$ gesetzt, so ist

$$l\varepsilon = c = km + mn = h + r\cos n\varphi$$

$gh = C = c + (em) = R + r\cos n\varphi + b\cos n\varphi = h + R\cos n\varphi$

r ist die Fläche von dem Paralleltrapez $edl\varepsilon = \frac{c)(m\varepsilon)}{2} = \frac{(C+c)b\sin n\varphi}{2} = \frac{(2h+(R+r)\cos n\varphi)b\sin n\varphi}{2}$

er Abstand des Schwerpunktes von d ist $= \frac{(C+2c)b\sin n\varphi}{3(C+c)}$

nun, wenn man das Gewicht der Kubikeinheit der Masse Widerlage $= 1$ setzt, und die Länge der Widerlage $= l$, Gewicht derselben $=$

$$\frac{l(C+c)b\sin n\varphi}{2} = \frac{(2h+(R+r)\cos n\varphi)b\sin n\varphi}{2}$$

so ist, für $gd = x$, das Moment des Theils der Wider- von welchem $edl\varepsilon$ den Durchschnitt bildet,

$$+\frac{(C+2c)b\sin n\varphi}{3(C+c)}\Big) \cdot \frac{l(2h+(R+r)\cos n\varphi)b\sin n\varphi}{2}$$

$$= \left[x + \frac{(3h+(2r+R)\cos n\varphi)b\sin n\varphi}{3(2h+(R+r)\cos n\varphi}\right] \times \frac{l(2h+(R+r)\cos n\varphi)b\sin n\varphi}{2}$$

für $R + r = 2\varrho$ wird dieses Moment $=$

$$\frac{(3h+(2\varrho+r)\cos n\varphi)b\sin n\varphi}{6(h+\varrho\cos n\varphi)}\Big) \times l(h+\varrho\cos n\varphi)b\sin n\varphi =$$

$+\varrho\cos n\varphi)b\sin n\varphi + \frac{1}{6}l(3h+(2\varrho+r)\cos n\varphi)b^2\sin^2 n\varphi$

wofür man zur Abkürzung setzen kann $Ax + B$.

rdem ist das Moment des Theils der Widerlage, von em hgde der Durchschnitt ist, $= \frac{x}{2} \cdot Cx = \frac{x^2}{2}(h + R\cos n\varphi)$,

Moment der ganzen Widerlage ist also

$$= \frac{x^2(h+R\cos n\varphi)}{2} + Ax + B = \frac{C^2}{2}x^2 + Ax + B.$$

Aufgabe 4. Es ſoll die Gleichung angegeben we
durch welche die Stärke der Widerlage eines kreisförmige
wölbebogens beſtimmt werden kann.

Auflöſung. Nach §. 80. No. 7. iſt, wenn man d
ſtatt r und ϱ für R ſetzt,

$$H-K = hA_1\frac{\sin n\varphi\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}+2A_1\varrho\frac{\sin\frac{1}{2}n\varphi\sin\frac{1}{2}(n+$$

$$-\qquad\qquad\frac{\text{nn}\varphi\cos(n+1)\varphi}{\sin\varphi}\Big)$$

wo alle Größen a n x unabhängig ſind, und
$g = (kg) = (nm)$ $= R\sin n\varphi + x$. Da nun
$K = W$

ſo erhält man, w der Werth aus der voriger
gabe geſetzt wird,

$$hA_1\frac{\sin n\varphi\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}+2A_1\varrho\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}n\varphi\sin\frac{1}{2}(n+1)}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

$$-A_1(R\sin n\varphi+x)\left(n-\frac{\sin n\varphi\cos(n+1)\varphi}{\sin\varphi}\right)=$$

$$\frac{x^2(h+R\cos n\varphi)}{2}+lx(h+\varrho\cos n\varphi)b\sin n\varphi$$

$$+\tfrac{1}{6}l(3h+(2\varrho+r)\cos n\varphi)b^2\sin^2 n\varphi$$

die Gleichung, durch welche der Werth von x ſich berec
läßt. Wobei für A_1 der Kubikinhalt des oberſten Ge
ſteins geſetzt werden muß $= (ab\beta\alpha)\cdot l = \frac{(R^2-r^2)\varphi}{2}\cdot$

$$\frac{(R+r)(R-r)\varphi}{2}\cdot l = \frac{2\varrho b\varphi}{2}\cdot l = lb\varrho\varphi.$$

Aufgabe 5. Ein kreisförmiger Gewölbebogen ae, Fig. 1
iſt ſo belaſtet, daß die obere Fläche eine horizontale Eb
bildet, und es iſt adDA ein Durchſchnitt der Belaſtung;
ſoll der hieraus entſtehende vertikale Druck für jeden Kei
ſonders berechnet werden.

Auflöſung. Der auf dem Bogen cd aufliegende Th
der Belaſtung hat cdDC zum Durchſchnitt, und es hängt
Größe des Druckes auf dieſem Bogen daher von der Fl
cdDC ab, deren Inhalt wie der eines Paralleltrapez be
net wird, indem man cd als die Sehne dieſes Bogens a
hen kann. Iſt nun der Winkel amc $= \varphi$ und cmd =

t man den Radius ma = R und die Höhe aA = H,

cc′ = R sin φ und dd′ = R sin (φ + ψ)
aher iſt (γδ) = dd′ − cc′ = R(sin(φ + ψ) − sin φ)
il allgemein sin α − sin β = 2 cos ½(α + β) sin ½(α − β)
auch sin(φ + ψ) − sin φ = 2 cos(cos φ + ½ψ) sin ½ψ
nd es iſt daher (γδ) = 2R cos(φ + ½ψ) sin ½ψ.
ſt ac′ = R sinvers φ und ad′ = R sinvers (φ + ψ)
ber iſt Cc = H + R sinvers φ = H + R(1 − cos φ)
= H + R sinvers (φ + ψ) = H + R(1 − cos(φ + ψ))
wird Cc + Dd = 2H + 2R − R(cos φ + cos(φ + ψ))
l allgemein
cos α + cos β = 2 cos ½(α + β) cos ½(α − β)
auch cos(φ + ψ) + cos φ = 2 cos(φ + ½ψ) cos ½ψ
ach wird Cc + Dd = 2H + 2R − 2R cos(φ + ½ψ) cos ½ψ
t alſo $\frac{Cc + Dd}{2}$ = H + R − R cos(φ + ½ψ) cos ½ψ
it γδ = 2R cos(φ + ½ψ) sin ½ψ multiplicirt, giebt die
dDC = F, nämlich es iſt
H + R − R cos(φ + ½ψ) cos ½ψ] · 2R cos(φ + ½ψ) sin ½ψ
+R) cos(φ + ½ψ) sin ½ψ − 2R² cos²(φ + ½ψ) sin ½ψ cos ½ψ
(H + R) cos(φ + ½ψ) sin ½ψ − R² cos²(φ + ½ψ) sin ψ.
eſer Ausdruck mit der Länge l des Gewölbes multi-
o erhält man, wenn die Kubikeinheit zugleich als Ge-
iheit gebraucht wird, die Größe der Laſt über cd.

ſatz. Setzt man in dem gefundenen Ausdrucke (n − 1)φ
nd ψ = φ, ſo lernt man die Laſt über jedem einzelnen Ge-
für den Fall kennen, wenn alle gleich groß ſind. Bei
oraussetzung wird die Laſt über dem nten Gewölbſteine

$$(H+R)\cos\left(\frac{2n-1}{2}\right)\varphi \sin\tfrac{1}{2}\varphi - lR^2\cos^2\left(\frac{2n-1}{2}\right)\varphi \sin\varphi.$$

fgabe 6. Es ſoll die Größe der über r Gewölbſteinen
Laſt, wenn die obere Fläche eine horizontale Ebene
ngegeben werden.

flöſung. Wird die Fläche des Durchſchnitts der
dem 1ſten Gewölbſtein = F_1, über dem 2ten = F_2 ꝛc.
nd werden alle Bogen gleich groß angenommen, ſo
enn man in der Formel des vorigen Zuſatzes nach
) n = 1, 2, 3.... bis r ſetzt,

$$F_1 = 2R(H+R)\cos\tfrac{1}{2}\varphi\sin\tfrac{1}{2}\varphi - R^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin\varphi$$
$$F_2 = 2R(H+R)\cos\tfrac{3}{2}\varphi\sin\tfrac{1}{2}\varphi - R^2\cos^2\tfrac{3}{2}\varphi\sin\varphi$$
$$F_3 = 2R(H+R)\cos\tfrac{5}{2}\varphi\sin\tfrac{1}{2}\varphi - R^2\cos^2\tfrac{5}{2}\varphi\sin\varphi$$
$$\vdots$$
$$F_r = 2R(H+R)\cos\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi\sin\tfrac{1}{2}\varphi - R^2\cos^2\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi\sin\varphi$$

und es ist daher, wenn die ganze Fläche mit F bezeichnet wird,

$$F = F_1 + F_2 + F_3 \cdots + F_r =$$
$$2R(H+R)\left[\cos\tfrac{1}{2}\varphi + \cos\tfrac{3}{2}\varphi + \cos\tfrac{5}{2}\varphi \cdots + \cos\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi\right]\sin\tfrac{1}{2}\varphi$$
$$- R^2\left[\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi + \cos^2\tfrac{3}{2}\varphi + \cos^2\tfrac{5}{2}\varphi \cdots + \cos^2\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi\right]\sin\varphi.$$

Nach dem zweiten Bande der praktischen Uebungen für angehende Mathematiker, Seite 442., ist

$$\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) \cdots + \cos(a+nb) = \frac{\cos(a+\frac{1}{2}nb)\sin\frac{1}{2}(n+1)b}{\sin\frac{1}{2}b} \cdots \text{I}$$

es ist also auch, wenn man $a = \frac{1}{2}\varphi$, $b = \varphi$ und $n = r-1$ setzt,

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi + \cos\tfrac{3}{2}\varphi + \cos\tfrac{5}{2}\varphi \cdots + \cos\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi =$$
$$\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{r-1}{2}\varphi\right)\sin\frac{r}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi} = \frac{\cos\frac{1}{2}r\varphi\sin\frac{1}{2}r\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi} = \frac{\sin r\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

und es wird daher

$$F = R(H+R)\sin r\varphi - R^2\left[\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi + \cos^2\tfrac{3}{2}\varphi + \cos^2\tfrac{5}{2}\varphi \cdots + \cos^2\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi\right]\sin\varphi$$

Nun ist $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, und daher ist auch

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi + \cos^2\tfrac{3}{2}\varphi + \cos^2\tfrac{5}{2}\varphi \cdots + \cos^2\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi =$$
$$\frac{1+\cos\varphi}{2} + \frac{1+\cos 3\varphi}{2} + \frac{1+\cos 5\varphi}{2} \cdots + \frac{1+\cos(2r-1)\varphi}{2}$$
$$= \tfrac{r}{2} + \tfrac{1}{2}\left[\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi \cdots + \cos(2r-1)\varphi\right]$$

und dieses giebt, wenn in der Gleichung I. gesetzt wird, $a = \varphi$, $b = 2\varphi$ und $n = r-1$, den Werth der obigen Reihe =

$$\frac{r}{2}+\frac{\cos(\varphi+\frac{r-1}{2}\cdot 2\varphi)\sin\frac{r}{2}\cdot 2\varphi}{2\sin\varphi}=\frac{r}{2}+\frac{\cos r\varphi\sin r\varphi}{2\sin\varphi}$$
$$=\frac{r}{2}+\frac{\sin 2r\varphi}{4\sin\varphi}$$

folglich wird endlich

$$F=R(H+R)\sin r\varphi-\tfrac{1}{2}R^2r\sin\varphi-\tfrac{1}{4}R^2\sin 2r\varphi.$$

Zuſatz 1. Iſt φ ſehr klein, ſo kann man $\sin\varphi=\varphi$ ſetzen, und es wird alsdann für $r\varphi=\alpha$,

$$F=R(H+R)\sin\alpha-\frac{R^2\alpha}{2}-\frac{R^2\sin 2\alpha}{4}$$

Von der Richtigkeit dieſes Ausdrucks kann man ſich auf folgende Art überzeugen: Für einen ſehr kleinen Werth von φ iſt

$$F=AacdD=AmdD-amd=$$
$$\frac{(Am+Dd)(dd')}{2}-\frac{(am)(ad)}{2}$$

und es iſt $(Am)=H+R$; $(Dd)=H+R-(d'm)=H+R-R\cos\alpha$; $(dd')=R\sin\alpha$; $(am)=R$ und $ad=R\alpha$, alſo

$$F=\frac{(H+R+H+R-R\cos\alpha)R\sin\alpha}{2}-\frac{R^2\alpha}{2}$$
$$=(H+R)R\sin\alpha-\frac{R^2\sin\alpha\cos\alpha}{2}-\frac{R^2\alpha}{2}$$
$$=R(H+R)\sin\alpha-\frac{R^2\sin 2\alpha}{4}-\frac{R^2\alpha}{2}$$

das mit dem obigen Ausdrucke übereinſtimmt.

Zuſatz 2. Die Summen der oben vorkommenden Reihen $\cos\varphi+\cos 3\varphi+\cos 5\varphi\cdots$ und $\cos\frac{1}{2}\varphi+\cos\frac{3}{2}\varphi+\frac{5}{2}\varphi\cdots$ können, auch ohne daß man hierbei auf eine in einem andern Werke abgeleitete Formel ſich zu beziehen braucht, auf folgende Art gefunden werden: Es iſt

$$\cos\varphi=\cos(2\varphi-\varphi)=\cos\varphi\cos 2\varphi+\sin\varphi\sin 2\varphi$$
$$\cos 3\varphi=\cos(4\varphi-\varphi)=\cos\varphi\cos 4\varphi+\sin\varphi\sin 4\varphi$$
$$\cos 5\varphi=\cos(6\varphi-\varphi)=\cos\varphi\cos 6\varphi+\sin\varphi\sin 6\varphi$$
$$\vdots$$
$$\cos(2r-1)\varphi=\cos(2r\varphi-\varphi)=\cos\varphi\cos 2r\varphi+\sin\varphi\sin 2r\varphi$$

daher iſt $\cos\varphi+\cos3\varphi+\cos5\varphi\cdots+\cos(2r-1)\varphi=\cos\varphi[\cos2\varphi+\cos4\varphi\cdots+\cos2r\varphi]+\sin\varphi[\sin2\varphi+\sin4\varphi\cdots+\sin2r\varphi]=\cos\varphi\cdot\frac{\sin r\varphi\cos(r+1)\varphi}{\sin\varphi}+\sin\varphi\cdot\frac{\sin r\varphi\sin(r+1)\varphi}{\sin\varphi}$

nach §. 80. No. 5. Zuſatz 1. und 2. Daher iſt auch

$$\cos\varphi+\cos3\varphi+\cos5\varphi\cdots+\cos(2r-1)\varphi=\frac{\sin r\varphi}{\sin\varphi}(\cos(r+1)\varphi\cos\varphi+\sin(r+1)\varphi\sin\varphi)=\frac{\sin r\varphi}{\sin\varphi}\cdot\cos r\varphi$$

$$=\frac{\sin2r\varphi}{2\sin\varphi}$$

und wenn $\frac{1}{2}\varphi$ ſtatt φ geſetzt wird, ſo erhält man

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi+\cos\tfrac{3}{2}\varphi+\cos\tfrac{5}{2}\varphi\cdots+\cos\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi=\frac{\sin r\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

Aufgabe 7. Die Lage des Schwerpunktes der Belaſtung eines kreisförmigen Gewölbebogens ſoll angegeben werden.

Auflöſung. Man ſetze, Fig. 146a., die Fläche des Rechtecks AmgD = A, des Dreiecks mgd = B, des Kreisausſchnitts amd = C und die Fläche aADd = X, und in Beziehung auf die Axen mg und mA ſollen $m\alpha'=\alpha'$ und $m\alpha''=\alpha''$ die Coordinaten für die Lage des Schwerpunktes von A ſein; die Lage des Schwerpunktes von B ſei beſtimmt durch $m\beta'=\beta'$ und $m\beta''=\beta''$; die von C durch $m\gamma'=\gamma'$ und $m\gamma''=\gamma''$, und die Lage des Schwerpunktes von X durch die Coordinaten x′ und x″, ſo müſſen die Gleichungen ſtattfinden

$\alpha'A=\beta'B+\gamma'C+x'X$ und $\alpha''A=\beta''B+\gamma''C+x''X$

und es ſind daher die Werthe von x′ und x″ durch die Formeln beſtimmt

$$x'=\frac{\alpha'A-\beta'B-\gamma'C}{X}\text{ und }x''=\frac{\alpha''A-\beta''B-\gamma''C}{X}$$

und dabei iſt

$$X=A-B-C.$$

Nun iſt aber für ∠amd = α, ma = R und aA = H,

$$m\alpha'=\alpha'=\frac{mg}{2}=\frac{R\sin\alpha}{2}$$

$$m\alpha''=\alpha''=\frac{mA}{2}=\frac{H+R}{2}$$

und $A=(Am)(mg)=(H+R)R\sin\alpha$

glich ist
$\alpha'A = \frac{1}{2}(H+R)R^2\sin^2\alpha$ und $\alpha''A = \frac{1}{2}(H+R)^2R\sin\alpha$
ner ist

$$m\beta' = \beta' = \tfrac{2}{3}(mg) = \frac{2R\sin\alpha}{3}$$

$$m\beta'' = \beta'' = \tfrac{1}{3}(dg) = \frac{R\cos\alpha}{3}$$

und $B = \frac{1}{2}(mg)(gd) = \frac{2R^2\sin\alpha\cos\alpha}{4} = \frac{R^2\sin 2\alpha}{4}$

er ist 2) $\beta'B = \frac{R^3\sin\alpha\sin 2\alpha}{6}$ und $\beta''B = \frac{R^3\cos\alpha\sin 2\alpha}{12}$

γ der Schwerpunkt des Kreisausschnitts amd, so findet
Proportion statt

Bogen ad : Sehne ad $= \frac{2}{3}R : (m\gamma)$

es ist daher auch

$$R\alpha : 2R\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{2}{3}R : (m\gamma)$$

folglich ist $(m\gamma) = \frac{4R\sin\frac{1}{2}\alpha}{3\alpha}$

nun $m\gamma : \gamma\gamma'' = 1 : \sin\frac{1}{2}\alpha$ und $m\gamma : \gamma\gamma' = 1 : \cos\frac{1}{2}\alpha$,
ist

$\gamma\gamma') = (m\gamma') = \gamma' = \frac{4R\sin\frac{1}{2}\alpha}{3\alpha}\cdot\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{4R\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{3\alpha}$

$'') = (m\gamma'') = \gamma'' = \frac{4R\sin\frac{1}{2}\alpha}{3\alpha}\cdot\cos\frac{1}{2}\alpha = \frac{4R\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}{3\alpha}$

weil der Ausschnitt amd $= C = \frac{R^2\alpha}{2}$, so ist

3) $\gamma'C = \frac{2R^3\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{3}$ und $\gamma''C = \frac{2R^3\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}{3}$

rden nun die Werthe aus 1, 2, und 3 benutzt, so erhält
a für die Lage des Schwerpunktes

$$= \left[\frac{(H+R)R^2\sin^2\alpha}{2} - \frac{R^3\sin\alpha\sin 2\alpha}{6} - \frac{2R^3\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{3}\right] : (A-B-C)$$

und $x'' = \left[\frac{(H+R)^2R\sin\alpha}{2} - \frac{R^3\cos\alpha\sin 2\alpha}{12}\right.$

$$\left. - \frac{2R^3\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}{3}\right] : (A-B-C)$$

Zusatz. Die hier für x' und x'' gefundenen Ausdrücke
n sich noch auf folgende Art abkürzen: Es ist

$$\frac{(H+R)R^2\sin^2\alpha}{2} - \frac{R^3\sin\alpha\sin 2\alpha}{6} - \frac{2R^3\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{3}$$

$$= \frac{(H+R)R^2\sin^2\alpha}{2} - \frac{R^3\sin^2\alpha\cos\alpha}{3} - \frac{R^3(1-\cos\alpha)}{3}$$

$$= \frac{(H+R)R^2\sin^2\alpha}{2} - \frac{R^3}{3}[(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha + 1 - \cos\alpha]$$

$$= \frac{(H+R)R^2\sin^2\alpha}{2} - \frac{R^3}{3}(1-\cos^3\alpha)$$

und daher $x' = \frac{3(H+R)R^2\sin^2\alpha - 2R^3(1-\cos^3\alpha)}{6(A-B-C)}$

Ferner ist $\frac{(H+R)^2R\sin\alpha}{2} - \frac{R^3\cos\alpha\sin 2\alpha}{12} - \frac{2R^3\sin^2\frac{1}{2}\alpha\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{3}$

$$= \frac{(H+R)^2R\sin\alpha}{2} - \frac{R^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{6} - \frac{R^3\sin\alpha}{3}$$

$$= \frac{R\sin\alpha}{6}[3(H+R)^2 - R^3\cos^2\alpha - 2R^2]$$

$$= \frac{R\sin\alpha}{6}[3H(H+2R) + 3R^2 - R^2(1-\sin^2\alpha) - 2R^2]$$

$$= \frac{R\sin\alpha}{6}[3H(H+2R) + R^2\sin^2\alpha]$$

und es ist folglich

$$x'' = \frac{R\sin\alpha[3H(H+2R)+R^2\sin^2\alpha]}{6(A-B-C)}$$

Aufgabe 8. Es soll der Einfluß bestimmt werden, welchen die Belastung eines Gewölbes auf die Pressungsdifferenzen hat.

Auflösung. Das Gewicht des Keils $bc\gamma\beta$, Fig. 145, $= A_r$, welches in einer mit ak parallelen Richtung wirkt, erzeugt eine normale Pressung gegen $b\beta = M_r = \frac{A_r\cos\varphi_r}{\sin(\varphi_r - \varphi_{(r-1)})}$

und gegen $c\gamma$ ist die Pressung $N_r = \frac{A_r\cos\varphi_{(r-1)}}{\sin(\varphi_r - \varphi_{(r-1)})}$.

Die Pressungsdifferenz D_r in der rten Fuge ist, wenn die Keilwinkel alle gleich groß angenommen werden,

$$D_r = N_r - M_{r+1)} = \frac{A_r\cos(r-1)\varphi - A_{(r+1)}\cos(r+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

Die auf dem Keil $bc\gamma\beta$ ruhende Belastung $= B_r$, von welcher BbcC der Durchschnitt ist, wirkt ebenfalls parallel mit

– und erzeugt daher ähnliche normale Pressungen gegen bβ
D cγ, und es ist, wenn man diese Pressungen mit μ_r und
bezeichnet,

$$\mu_r = \frac{B_r \cos\varphi_r}{\sin(\varphi_r - \varphi_{(r-1)})} \text{ und } \nu_r = \frac{B_r \cos\varphi_{(r-1)}}{\sin(\varphi_r - \varphi_{(r-1)})}$$

-d also die hieraus entstehende Pressungsdifferenz in der rten
ge mit D_r bezeichnet, so ist bei gleich großen Keilwinkeln

$$D_r = \nu_r - \mu_{(r+1)} = \frac{B_r \cos(r-1)\varphi - B_{(r+1)} \cos(r+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

e ganze Pressungsdifferenz in der rten Fuge ist folglich

$$= D_r + D_r = D_r + \frac{B_r \cos(r-1)\varphi - B_{(r+1)} \cos(r+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

erden nun die Keile sämmtlich von gleicher Größe ange-
nmen, so ist zwar immer

$$D_r = \frac{A_1(\cos(r-1)\varphi - \cos(r+1)\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{2A_1 \sin r\varphi \sin\varphi}{\sin\varphi}$$

$$= 2A_1 \sin r\varphi$$

itiv, dieses ist aber bei dem Theil D_r nicht der Fall, weil
s der Voraussetzung $A_r = A_{(r+1)}$ keineswegs folgt, daß
ß auch $B_r = B_{(r+1)}$ sein muß; denn es werden die Flächen
cb zwar immer schmaler, je mehr r wächst, aber sie neh-
n an Länge zu, und es kann daher $B_{(r+1)} > B_r$ werden,
d hierdurch D_r einen negativen Werth bekommen, und so
es möglich, daß die ganze Pressungsdifferenz durch die Be-
tung kleiner oder selbst negativ wird.

Der Werth von D_r läßt sich auf folgende Art genauer
timmen: Es ist

$$D_r = \frac{B_r \cos(r-1)\varphi - B_{(r+1)} \cos(r+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

d man kann hier, indem man die Länge des Gewölbes = 1
nimmt, die Durchschnittsflächen der Belastungen für B_r und
$_{r+1)}$ annehmen; man kann daher, nach Aufgabe 6., setzen

$$= F_r = 2R(H+R)\cos\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi \sin\tfrac{1}{2}\varphi - R^2\cos^2\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi \sin\varphi$$

$$B_{(r+1)} = F_{(r+1)} = 2R(H+R)\cos\left(\frac{2r+1}{2}\right)\varphi \sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$- R^2\cos^2\left(\frac{2r+1}{2}\right)\varphi \sin\varphi$$

folglich wird $D_r \sin\varphi =$

$$[2R(H+R)\cos\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi\sin\tfrac{1}{2}\varphi - R^2\cos^2\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi\sin\varphi]\cos(r-1)\varphi$$

$$-[2R(H+R)\cos\left(\frac{2r+1}{2}\right)\varphi\sin\tfrac{1}{2}\varphi - R^2\cos^2\left(\frac{2r+1}{2}\right)\varphi\sin\varphi]\cos(r+1)\varphi$$

und daher iſt $D_r \sin\varphi =$

$$2R(H+R)\sin\tfrac{1}{2}\varphi[\cos\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi\cos(r-1)\varphi - \cos\left(\frac{2r+1}{2}\right)\varphi\cos(r+1)\varphi]$$

$$-R^2\sin\varphi[\cos^2\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi\cos(r-1)\varphi - \cos^2\left(\frac{2r+1}{2}\right)\varphi\cos(r+1)\varphi]$$

wofür man einſtweilen ſetzen kann

$$D_r \sin\varphi = 2R(H+R)\sin\tfrac{1}{2}\varphi \,.\, P - R^2\sin\varphi \cdot Q$$

und es iſt

$$P = \cos\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi\cos(r-1)\varphi - \cos\left(\frac{2r+1}{2}\right)\varphi\cos(r+1)\varphi$$

und weil $\cos\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi\cos(r-1)\varphi = \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4r-3}{2}\right)\varphi$

und $\cos\left(\frac{2r+1}{2}\right)\varphi\cos(r+1)\varphi = \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4r+3}{2}\right)\varphi$

ſo wird $P = \frac{1}{2}[\cos\left(\frac{4r-3}{2}\right)\varphi - \cos\left(\frac{4r+3}{2}\right)\varphi] = \sin 2r\varphi\sin\frac{3}{2}\varphi$

folglich iſt $D_r \sin\varphi = 2R(H+R)\sin 2r\varphi\sin\frac{3}{2}\varphi\sin\frac{1}{2}\varphi - R^2\sin\varphi\cdot Q$

Hier iſt $Q = \cos^2\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi\cos(r-1)\varphi - \cos^2\left(\frac{2r+1}{2}\right)\varphi\cos(r+1)\varphi$

$$\text{und da } \cos^2\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi = \frac{1+\cos(2r-1)}{2}$$

$$\text{und } \cos^2\left(\frac{2r+1}{2}\right)\varphi = \frac{1+\cos(2r+1)}{2}$$

ſo wird

$$Q = \frac{1+\cos(2r-1)\varphi}{2}\cos(r-1)\varphi - \frac{1+\cos(2r+1)\varphi}{2}\cos(r+1)\varphi$$

$$= \tfrac{1}{2}[\cos(r-1)\varphi - \cos(r+1)\varphi + \cos(2r-1)\varphi\cos(r-1)\varphi - \cos(2r+1)\varphi\cos(r+1)\varphi]$$

Es iſt aber

$$\cos(r-1)\varphi - \cos(r+1)\varphi = 2\sin r\varphi\sin\varphi$$

$$+\cos(2r-1)\varphi\cos(r-1)\varphi = \tfrac{1}{2}\cos(3r-2)\varphi + \tfrac{1}{2}\cos r\varphi$$

$$-\cos(2r+1)\varphi\cos(r+1)\varphi = -\tfrac{1}{2}\cos(3r+2)\varphi - \tfrac{1}{2}\cos r\varphi$$

folglich wird, wenn man dieſe Werthe ſetzt,

$$Q = \tfrac{1}{2}[2\sin r\varphi\sin\varphi + \tfrac{1}{2}(\cos(3r-2)\varphi - \cos(3r+2)\varphi)]$$
$$= \tfrac{1}{4}[2\sin r\varphi\sin\varphi + \sin 3r\varphi\sin 2\varphi]$$
$$= \sin r\varphi\sin\varphi + \sin 3r\varphi\cos\varphi\sin\varphi$$

Hiernach ist also $D_r\sin\varphi =$
$2R(H+R)\sin 2r\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin\tfrac{1}{2}\varphi - R^2\sin^2\varphi(\sin r\varphi + \sin 3r\varphi\cos\varphi)$.
Für einen kleinen Werth von φ kann man setzen $\sin\varphi = \varphi$ und $\cos\varphi = 1$, daher wird bei dieser Voraussetzung

$$D_r\varphi = 2R(H+R)\frac{3\varphi^3}{4}\cdot\sin 2r\varphi - R^2\varphi^2(\sin r\varphi + \sin 3r\varphi)$$
$$= \frac{3R(H+R)}{2}\cdot\varphi^2\sin 2r\varphi - R^2\varphi^2\cdot 2\sin 2r\varphi\sin r\varphi$$
$$= R\varphi^2\sin 2r\varphi\left(\frac{3(H+R)}{2} - 2R\sin r\varphi\right)$$

und $D_r = R\varphi\sin 2r\varphi(\tfrac{3}{2}(H+R) - 2R\sin r\varphi)$

woraus folgt, daß D_r einen negativen Werth erhält, wenn $\tfrac{3}{2}(H+R) < 2R\sin r\varphi$ ist, und es wird $D_r = 0$ für $\tfrac{3}{2}(H+R) = 2R\sin r\varphi$.

Zusatz 1. Der möglichst größte Werth, welchen $2R\sin r\varphi$ erhalten kann, ist $= 2R$; soll also D_r negativ werden können, so muß

$$\tfrac{3}{2}(H+R) < 2R$$

und daher $3H < R$ und $H < \tfrac{1}{3}R$ sein.

Sobald der Werth von $H \geqq \tfrac{1}{3}R$ ist, bleibt die durch die Belastung entstehende Pressungsdifferenz immer positiv.

Zusatz 2. Es ist $B_r = 2R(H+R)\cos\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi\sin\tfrac{1}{2}\varphi$
$-R^2\cos^2\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi\sin\varphi = 2R(H+R)[\tfrac{1}{2}\sin r\varphi - \tfrac{1}{2}\sin(r-1)\varphi]$
$-R^2\cos^2\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi\sin\varphi$

und $B_{(r+1)} = 2R(H+R)[\tfrac{1}{2}\sin(r+1)\varphi - \tfrac{1}{2}\sin r\varphi]$
$-R^2\cos^2\left(\frac{2r+1}{2}\right)\varphi\sin\varphi$

Folglich ist

$$B_{(r+1)} - B_r =$$
$$R(H+R)[\sin(r+1)\varphi + \sin(r-1)\varphi - 2\sin r\varphi] -$$
$$R^2[\cos^2\left(\frac{2r+1}{2}\right)\varphi - \cos^2\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi]\sin\varphi =$$

$$2R(H+R)[\sin r\varphi\cos\varphi-\sin r\varphi]+R^2\sin\varphi\left[\cos^2\left(\frac{2r-1}{2}\right)\varphi-\cos^2\left(\frac{2r+1}{2}\right)\varphi\right]$$

und daher iſt auch

$$B_{(r+1)}-B_r=$$
$$R^2\sin\varphi\cdot\sin 2r\varphi\sin\varphi-2R(H+R)\sin r\varphi(1-\cos\varphi)=$$
$$R^2\sin^2\varphi\sin 2r\varphi-4R(H+R)\sin r\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi$$

wodurch nun beſtimmt iſt, unter welcher Bedingung $B_{(r+1)}$ gleich größer oder kleiner iſt als B_r. Da übrigens $\sin 2r\varphi=2\sin r\varphi\cos r\varphi$ und $\sin^2\varphi=4\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi$ ſo wird auch

$$B_{(r+1)}-B_r=$$
$$8R^2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin r\varphi\cos r\varphi-4R(H+R)\sin r\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi$$
$$=4R\sin r\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi[2R\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\cos r\varphi-(H+R)]$$

und es iſt daher $B_{(r+1)}\gtrless B_r$, wenn $2R\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\cos r\varphi\gtrless H+R$.

Soll $B_{(r+1)}=B_r$ ſein, ſo muß

$$2R\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\cos r\varphi-(H+R)=0 \text{ werden,}$$

alſo $H=2R\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\cos r\varphi-R=R(2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\cos r\varphi-1)$.

§. 82.

Einige mit Hülfe der höhern Analyſis gelöſte Aufgaben.

Aufgabe 1. Die Curve ae, Fig. 147, iſt die mittlere Wölbung eines Gewölbebogens, und die Fugenlinien ſchneiden dieſe Curve unter einem rechten Winkel, $\beta\gamma\gamma'\beta'$ und $\gamma\delta\delta'\gamma'$ ſind zwei ſehr ſchmale neben einander liegende Gewölbſteine; es ſoll angegeben werden, wie die in der Fuge $\gamma\gamma'$ vorkommende Preſſungsdifferenz $=\delta$ von dem Theile $\alpha\alpha'\beta'\beta$ des Gewölbes $=X$ und von dem Winkel φ, unter welchem die Vertikale ak von der Fugenlinie $\beta\beta'$ geſchnitten wird, abhängt.

Auflöſung. Nach §. 79. Aufgabe 1. iſt die normale Preſſung des $(r+1)$ten Gewölbſteins nach oben zu

$$M_{(r+1)}=\frac{A_{(r+1)}\cos\varphi_{(r+1)}}{\sin(\varphi_{(r+1)}-\varphi_r)}$$

und die des rten Gewölbſteins nach unten zu iſt

$$N_r=\frac{A_r\cos\varphi_{(r-1)}}{\sin(\varphi_r-\varphi_{(r-1)})}$$

und es iſt die hieraus entſtehende Preſſungsdifferenz in der rten Fuge

$$D_r = N_r - M_{(r+1)} = \frac{A_r \cos\varphi_{(r-1)}}{(\sin\varphi_r - \varphi_{(r-1)})} - \frac{A_{(r+1)} \cos\varphi_{(r+1)}}{\sin(\varphi_{(r+1)} - \varphi_r)}.$$

Iſt nun das Gewicht von dem Bogen $\alpha\alpha'\beta'\beta = X$, von $\alpha\alpha'\gamma'\gamma = X'$ und von $\alpha\alpha'\delta'\delta = X''$, ſo wird, wenn $\gamma\gamma'$ die rte Fuge ſein ſoll, $\beta\beta'\gamma'\gamma = A_r = X' - X = dX$ und $\gamma\gamma'\delta'\delta = A_{(r+1)} = X'' - X' = dX'$, und es kann nun auch $\varphi' - \varphi = d\varphi$ und $\varphi'' - \varphi' = d\varphi'$ geſetzt werden. Daher wird, wenn man dieſe Werthe benutzt,

$$M_{(r+1)} = \frac{dX' \cos\varphi''}{\sin d\varphi'} \text{ und } N_r = \frac{dX \cos\varphi}{\sin d\varphi}$$

$$\text{folglich iſt } D_r = \delta = \frac{dX \cos\varphi}{\sin d\varphi} - \frac{dX' \cos\varphi''}{\sin d\varphi'}$$

Nun iſt $X' = X + dX$, alſo $dX' = dX + d^2X$

$$d\varphi' = d(\varphi + d\varphi) = d\varphi + d^2\varphi$$

und $\varphi'' = \varphi' + d\varphi' = (\varphi + d\varphi) + (d\varphi + d^2\varphi) = \varphi + 2d\varphi + d^2\varphi$

es iſt alſo auch

$$D_r = \delta = \frac{dX \cos\varphi}{\sin d\varphi} - \frac{(dX - d^2X)\cos(\varphi + 2d\varphi + d^2\varphi)}{\sin(d\varphi + d^2\varphi)}$$

Da aber $\sin d\varphi = d\varphi$; $\sin(d\varphi + d^2\varphi) = d\varphi + d^2\varphi$

und $\cos(\varphi + 2d\varphi + d^2\varphi) = \cos\varphi\cos(2d\varphi + d^2\varphi)$

$- \sin\varphi\sin(2d\varphi + d^2\varphi) = \cos\varphi - (2d\varphi + d^2\varphi)\sin\varphi$

$$\text{ſo folgt } D_r = \delta = \frac{dX\cos\varphi}{d\varphi} - \frac{(dX + d^2X)[\cos\varphi - (2d\varphi - d^2\varphi)\sin\varphi]}{d\varphi + d^2\varphi}$$

$$= \frac{dX\cos\varphi(d\varphi + d^2\varphi) - dX[\cos\varphi - (2d\varphi + d^2\varphi)\sin\varphi]d\varphi}{d\varphi(d\varphi + d^2\varphi)}$$

$$- \frac{d^2X[\cos\varphi - (2d\varphi + d^2\varphi)\sin\varphi]d\varphi}{d\varphi(d\varphi + d^2\varphi)}$$

nämlich es wird $\delta =$

$$\frac{dX[d^2\varphi\cos\varphi + 2(d\varphi)^2\sin\varphi + d\varphi d^2\varphi\sin\varphi]}{d\varphi(d\varphi + d^2\varphi)}$$

$$- \frac{d^2X[\cos\varphi - (2d\varphi + d^2\varphi)\sin\varphi]}{d\varphi + d^2\varphi}$$

und wenn man die höhern Differentialien $= 0$ ſetzt, ſo wird

$$\delta = \frac{dX(d^2\varphi\cos\varphi + 2(d\varphi)^2\sin\varphi)}{(d\varphi)^2} - \frac{d^2X\cos\varphi}{d\varphi}$$

und daher endlich

$$\delta = \frac{d\varphi^2}{(d\varphi)^2} \cdot dX\cos\varphi + 2dX \cdot \sin\varphi - \frac{d^2X\cos\varphi}{d\varphi}$$

Aufgabe 2. Es soll die Abhängigkeit des Gewichts des schmalen Gewölbsteins $\beta\beta'\gamma'\gamma = dX$ von dem Krümmungshalbmesser ϱ des Bogens bc bestimmt werden.

Auflösung. Schneiden sich die Fugenlinien $\beta\beta'$ und $\gamma\gamma'$ in g, so ist, weil der Bogen bc sehr klein sein soll, $bg = cg = \varrho$ der Krümmungshalbmesser dieses Bogens, und es ist $\angle g = \varphi' - \varphi = d\varphi$, daher ist die Länge des Bogens $bc = \varrho d\varphi$, und wenn die Länge der Fuge $\beta\beta' = z$ gesetzt wird, so ist die Fläche $\beta\beta'\gamma'\gamma = z \times (bc) = z\varrho d\varphi$. Nimmt man nun die Kubikeinheit der Masse zugleich als Gewichtseinheit an, und setzt die Länge des Gewölbes $= 1$, so wird

$$X = \alpha\alpha'\beta'\beta \text{ und } dX = \beta\beta'\gamma'\gamma$$

und daher ist $dX = z\varrho d\varphi$.

Aufgabe 3. Die Abhängigkeit der Pressungsdifferenz von dem Krümmungshalbmesser soll bestimmt werden.

Auflösung. Da $dX = z\varrho d\varphi$, so ist

$$d^2X = \varrho d\varphi \cdot dz + z\,d(\varrho d\varphi)$$

und wenn man $\varrho d\varphi$ als Differential des Bogens ab constant annimmt, wo alsdann $d(\varrho d\varphi) = 0$ wird, so ist

$$d^2X = \varrho d\varphi \cdot dz$$

Da nun, nach Aufgabe 1.,

$$\delta = \frac{d^2\varphi}{(d\varphi)^2} dX \cos\varphi + 2dX \sin\varphi - \frac{d^2X \cos\varphi}{d\varphi}$$

so ist auch $\delta =$

$$\frac{d^2\varphi}{(d\varphi)^2} \cdot z\varrho d\varphi \cos\varphi + 2\sin\varphi \cdot z\varrho d\varphi - \frac{\cos\varphi}{d\varphi} \cdot \varrho d\varphi \cdot dz$$

$$= \frac{d^2\varphi}{d\varphi} \cdot z\varrho \cos\varphi - 2z\varrho d\cos\varphi - \varrho dz \cos\varphi$$

Aus der Gleichung $d(\varrho d\varphi) = 0$ aber folgt

$$\varrho d^2\varphi + d\varrho d\varphi = 0, \text{ also ist } \frac{d^2\varphi}{d\varphi} = -\frac{d\varrho}{\varrho}$$

folglich ist auch

$$\delta = -\frac{d\varrho}{\varrho} \cdot z\varrho \cos\varphi - 2z\varrho d\cos\varphi - \varrho dz \cos\varphi$$

$$= -zd\varrho \cos\varphi - \varrho dz \cos\varphi - 2z\varrho d\cos\varphi$$

$$= -\cos\varphi\,[zd\varrho + \varrho dz] - 2z\varrho d\cos\varphi$$

und daher endlich

$$\delta = -\cos\varphi d(z\varrho) - 2z\varrho d\cos\varphi.$$

Zusatz. Aus der Gleichung

$$\delta = -z\,d\varrho\cos\varphi - \varrho\,dz\cos\varphi - 2z\varrho\,d\cos\varphi$$

t auch $\delta = -z(d\varrho\cos\varphi + \varrho\,d\cos\varphi) - \varrho(dz\cos\varphi + z\,d\cos\varphi)$

es ist daher auch

$$\delta = -z\,d(\varrho\cos\varphi) - \varrho\,d(z\cos\varphi).$$

Aufgabe 4. Die Eigenschaften der mittlern Wölbungs- ae, Fig. 47, sollen für den Fall genauer angegeben wer- wenn das Gewölbe überall gleich stark und die Pressungs- renzen = 0 sein sollen.

Auflösung. Die in der vorigen Aufgabe gefundene chung

$$\delta = -\cos\varphi\,d(z\varrho) - 2z\varrho\,d\cos\varphi$$

, wenn die Pressungsdifferenzen = 0 sein sollen,

$$0 = -\cos\varphi\,d(z\varrho) - 2z\varrho\,d\cos\varphi$$

wenn das Gewölbe durchgehends von gleicher Stärke sein so wird $\beta\beta' = z$ constant, und kann $= b$ gesetzt wer- daher ist

$$0 = -\cos\varphi\,d(b\varrho) - 2b\varrho\,d\cos\varphi$$

daher auch

$$0 = \cos\varphi\,d\varrho + 2\varrho\,d\cos\varphi$$

t man aber bm parallel mit ak und cm mit bx, setzt ab = S, = x, xb = y und bc = dS, so ist cm = dy, und wenn der Krümmungshalbmesser ist, also in b normal auf der e steht, so muß $\angle cbm = 90^0 - \varphi$ sein, und es ist daher

$$cb : cm = 1 : \cos\varphi \text{ oder } dS : dy = 1 : \cos\varphi$$

folglich ist $\cos\varphi = \frac{dy}{dS}$ und $d\cos\varphi = \frac{d^2y}{dS}$

n dS als constant angenommen wird. Man erhält also die in der Aufgabe angegebenen Bedingungen die Gleichung

$$0 = \frac{dy\,d\varrho}{dS} + \frac{2\varrho\,d^2y}{dS}$$

und daher auch $dy\,d\varrho + 2\varrho\,d^2y = 0$

n nun $dy = f(S)\,dS$ gesetzt, so ist $d^2y = df(S)\,dS$, und ist folglich

$$f(S)\,d\varrho + 2\varrho\,df(S) = 0$$

folglich ist auch $2\left(\frac{df(S)}{dS}\right) = -\frac{d\varrho}{\varrho}$

wenn man integrirt,

$$2\log f(S) = -\log\varrho + \log c = \log\frac{c}{\varrho}$$

und es folgt hieraus $[f(S)]^2 = \frac{c}{\varrho}$

oder da $f(S) = \frac{dy}{dS}$, ſo iſt auch

$$\left(\frac{dy}{dS}\right)^2 = \frac{c}{\varrho}, \text{ und daher } \varrho = c\left(\frac{dS}{dy}\right)^2$$

Es iſt aber auch ga ein die Formel für den Kr
mungshalbmeſſer, w dS conſtant annimmt,

$$= -\frac{dxdS}{d^2y}$$

folglich iſt auch, wenn ide Werthe von ϱ einander g
ſetzt,

$$= -\frac{dxdS}{d^2y}$$

und daher $\frac{c(dS)d^2y}{(dy)^2} = -dx$

nämlich es iſt $c \cdot d\left(\frac{dS}{dy}\right) = dx$

und daher $\frac{cdS}{dy} = x + C$

alſo iſt $\frac{dS}{dy} = \frac{x+C}{c}$ und $\left(\frac{dS}{dy}\right)^2 = \frac{(x+C)^2}{c^2}$

und weil $c\left(\frac{dS}{dy}\right)^2 = \varrho$, ſo iſt auch

$$\varrho = \frac{(x+C)^2}{c}$$

welches, wenn man $C = c$ ſetzt, die Formel für den Kr
mungshalbmeſſer der Kettenlinie iſt, wie aus §. 56. Aufgab
ſich ergiebt. Uebrigens läßt ſich aus dieſer Formel auch
Gleichung für die Curve ſelbſt auf folgende Art ableiten:
für $C = c$

$$\frac{(x+c)^2}{c^2} = \left(\frac{dS}{dy}\right)^2$$

ſo iſt auch $(x+c)^2(dy)^2 = c^2(dS)^2 = c^2[(dx)^2+(dy)^2]$

alſo $[(x+c)^2 - c^2](dy)^2 = c^2(dx)^2$

und $(x^2+2cx)(dy)^2 = c^2(dx)^2$

$$\text{folglich ist } dy = \frac{cdx}{V(x^2+2cx)}$$

$$\text{und hieraus folgt } y = c\int \frac{dx}{V(x^2+2cx)}$$

Nämlich es ist endlich $y = c\log\left[\frac{V(x^2+2cx)+x+c}{c}\right]$

welches nach §. 56. Aufgabe 4. die Gleichung für die Kettenlinie ist.

Aufgabe 5. Für einen Gewölbebogen, der nach irgend einer Curve gekrümmt ist, soll das erforderliche Moment der Stabilität der Widerlage bestimmt werden.

Auflösung. Wird die Pressungsdifferenz in der Fuge y'y, Fig. 148, die durch zwei neben einander liegende schmale Keile erzeugt wird, mit δ bezeichnet, und wird diese normal gegen y'y wirkende Kraft in zwei Seitenkräfte zerlegt, von welchen die eine vertikal in der Richtung nv und die andere horizontal in der Richtung nz wirkt, so ist, wenn die Vertikale ak von der Fuge y'y unter einem Winkel $= \varphi$ geschnitten wird, die vertikale Seitenkraft $= \delta\sin\varphi$, und die horizontale $= \delta\cos\varphi$. Für die Drehungskante g sind also die aus den Seitenkräften entstehenden Momente $= (gv) \times \delta\sin\varphi$ und $(gz) \times \delta\cos\varphi$, nämlich es sind, wenn man $gv = v$ und $gz = z$ setzt, diese Momente $v\delta\sin\varphi$ und $z\delta\cos\varphi$, und die Summen aller Momente der Pressungsdifferenzen von aα bis y'y sind folglich $\int\delta\sin\varphi$ und $\int z\delta\cos\varphi$. Außer den Pressungsdifferenzen wirkt auf bβ, wo der Bogen auf der Widerlage aufliegt, noch eine Kraft N nach unten zu normal gegen bβ, und wenn bβ die Vertikale ak unter dem Winkel γ schneidet, so sind die aus ihr entstehenden Seitenkräfte parallel mit ak und mit kg, $N\sin\gamma$ und $N\cos\gamma$, und die Momente für die Drehungskante g, welche aus diesen Seitenkräften entstehen, sind, wenn $gd = p$ und $db' = q$ gesetzt wird, $pN\sin\gamma$ und $qN\cos\gamma$.

Die Momente der horizontal wirkenden Theilkräfte $\int z\delta\cos\varphi$ und $qN\cos\gamma$ würden die Widerlage umwerfen, wenn sie nicht durch die Momente der horizontalen Theilkräfte $\int v\delta\sin\varphi$ und $pN\sin\gamma$, so wie durch die Stabilität der Widerlage im Gleichgewicht erhalten werden; setzt man also das Moment der Sta-

bilität der Widerlage = W, so ist die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht

$$W + fv\delta \sin\varphi + pN\sin\gamma = fz\delta\cos\varphi + qN\cos\gamma.$$

Aufgabe 6. Die Gleichung für die innere Wölbungslinie $\alpha\beta$, Fig. 148, welche von den Fugenlinien normal geschnitten wird, ist dadurch gegeben, daß man die Abhängigkeit der Abscisse $\alpha x = x$ und der Ordinate $xy = y$ von einander kennt, und es ist der Krümmungshalbmesser des Punktes $y = \varrho$, und die halbe Breite des Gewölbes bei diesem Punkte, also $yn = ny' = \frac{1}{2}u$ und $yy' = u$. Ferner ist die Höhe des Gewölbes $= \alpha h = h$, und die halbe Weite desselben $h\beta = a$, der Krümmungshalbmesser des Punktes $\beta = r$ und $\beta b' = b'b = \frac{1}{2}b$, also $b\beta = b$; es soll das Moment der Stabilität der Widerlage für diesen Fall näher bestimmt werden.

Auflösung. Die in der vorigen Aufgabe gefundene Gleichung drücke man aus durch $W + V + P = Z_1 + Q$, und suche nun die einzelnen Glieder dieser Gleichung näher zu bestimmen. Es ist aber

1) $P = pN\sin\gamma$ und $Q = qN\cos\gamma$

und, nach Aufgabe 1., $N_1 = \frac{dX\cos\varphi}{d\varphi}$ und, nach Aufgabe 2., $dX = z\varrho d\varphi$

folglich ist $N_1 = z\varrho\cos\varphi$

daher ist hier, wo $z = (b\beta) = b$, $\varrho = r + (\beta b') = r + \frac{1}{2}b$ und $\varphi = \gamma$ sein soll,

$$N = b(r + \tfrac{1}{2}b)\cos\gamma$$

hiernach wird

$$P = b(r + \tfrac{1}{2}b)p\sin\gamma\cos\gamma \text{ und } Q = b(r + \tfrac{1}{2}b)q\cos^2\gamma$$

2) Setzt man die erforderliche Breite der Widerlage $ge = w$ und $e\beta = kh = h$, so ist

$$p = (gd) = w - (\beta q) \text{ und } q = (db') = k + (qb')$$

da nun $\beta b' : \beta q = 1 : \sin\gamma$ und $\beta b' : qb' = 1 : \cos\gamma$ und $\beta b' = \frac{1}{2}b$, so ist $(\beta q) = \frac{1}{2}b\sin\gamma$ und $(qb') = \frac{1}{2}b\cos\gamma$. Es wird also, wenn man diese Werthe benutzt,

$$p = w - \tfrac{1}{2}b\sin\gamma \text{ und } q = k + \tfrac{1}{2}b\cos\gamma$$

und daher ist nun

$$P = b(r + \tfrac{1}{2}b)(w - \tfrac{1}{2}b\sin\gamma)\sin\gamma\cos\gamma$$

und $Q = b(r + \tfrac{1}{2}b)(k + \tfrac{1}{2}b\cos\gamma)\cos^2\gamma$

Q ist

Q iſt alſo vollſtändig beſtimmt, während P die unbekannte Größe w enthält.

3) Da $V = \int v\delta \sin\varphi$ und $Z = \int z\delta \cos\varphi$

ſo müſſen hier, bevor man integriren kann, die Werthe von v, z und δ näher beſtimmt werden. Es iſt aber

$$v = (gv) = ge + ek - xp = ge + ek - (xy + yp)$$
$$= w + a - y - (yp)$$

und $z = (gz) = k\alpha - \alpha x + np = kh + h\alpha - \alpha x + np$
$$= k + h - x + (up)$$

und $yn : np = 1 : \cos\varphi$ und $yn : yp = 1 : \sin\varphi$.

Da nun $yn = \frac{1}{2}u$, ſo iſt $(np) = \frac{1}{2}u\cos\varphi$ und $(yp) = \frac{1}{2}u\sin\varphi$ und daher $v = w + a - y - \frac{1}{2}u\sin\varphi$ und $z = k + h - x + \frac{1}{2}u\cos\varphi$

Nach dem Zuſatz zu Aufgabe 3. iſt, wenn ϱ den Krümmungshalbmeſſer der mittlern Wölbungslinie a'b' bedeutet,

$$\delta = -zd(\varrho\cos\varphi) - \varrho d(z\cos\varphi)$$

und es muß in dieſem Ausdrucke, weil hier ϱ der Krümmungshalbmeſſer der innern Wölbungslinie ſein ſoll, $\varrho + \frac{1}{2}u$ für ϱ, und u für $z = yy'$ geſetzt werden, daher wird

$$\delta = -ud(\varrho + \tfrac{1}{2}u)\cos\varphi - (\varrho + \tfrac{1}{2}u)\, d(u\cos\varphi)$$
$$= -ud(\varrho\cos\varphi) - (\varrho + u)\, d(u\cos\varphi).$$

Hiernach iſt nun

$$V = -\int (w + a - y - \tfrac{1}{2}u\sin\varphi)\,[ud(\varrho\cos\varphi) + (\varrho + u)\, d(u\cos\varphi)]\sin\varphi$$
$$Z = -\int (k + h - x + \tfrac{1}{2}u\cos\varphi)\,[ud(\varrho\cos\varphi) + (\varrho + u)\, d(u\cos\varphi)]\cos\varphi$$

wo Z unabhängig von w iſt und V die erſte Potenz dieſer Größe enthält. In der Gleichung

$$W + V + P = Z + Q$$

kommt alſo bloß in dem erſten Theile w vor, und da W die Größe w höchſtens zur zweiten Potenz enthält, wie aus §. 79. Aufgabe 10. und 11. ſich ergiebt, ſo folgt, daß die erforderliche Stärke der Widerlage ſich durch eine Gleichung des 2ten Grades berechnen läßt, ſobald die von einander abhängenden veränderlichen Größen x, y, ϱ, u und φ näher beſtimmt ſind.

Aufgabe 7. Die innere Wölbungslinie $\alpha\beta$ iſt ein Kreisbogen, und das Gewölbe durchgehends von gleicher Stärke;

es ſoll die Gleichung, durch welche die Stärke der Widerlag ſich berechnen läßt, für dieſen Fall näher beſtimmt werden.

Auflöſung. Bei der hier ſtattfindenden Vorausſetzung iſt $\varrho = r$ und $u = b$ conſtant, daher wird

1) der Werth von P und Q nicht geändert, nämlich es iſt noch immer

$$P = b(r+\tfrac{1}{2}b)(w-\tfrac{1}{2}b\sin\gamma)\sin\gamma\cos\gamma$$

und $$Q = b(r+\tfrac{1}{2}b)(k+\tfrac{1}{2}b\cos\gamma)\cos^2\gamma$$

wofür man zur Abkür[illegible]en kann

$$P = [illegible]' \text{ und } Q = Q$$

wo m, P′ und Q bek[illegible]rößen ſind.

2) iſt jetzt

$$V = -\int(w+[illegible]-\tfrac{1}{2}b\sin\varphi)(brd\cos\varphi+$$

$$(r[illegible]\cos\varphi)\sin\varphi$$

und weil $d\cos\varphi = -[illegible]p$, ſo wird

$$V = \int(w+a-y-\tfrac{1}{2}b\sin\varphi)\,b\,(b+2r)\sin^2\varphi d\varphi$$

Es iſt aber, weil $\alpha\beta$ ein Kreisbogen ſein ſoll, $(yx) = y = r\sin\varphi$, folglich wird

$$V = \int(w+a-(r+\tfrac{1}{2}b)\sin\varphi)\,b\,(b+2r)\sin^2\varphi d\varphi$$

$$= b(b+2r)\,[(w+a)\int\sin^2\varphi d\varphi - (r+\tfrac{1}{2}b)\int\sin^3\varphi d\varphi]$$

Nun iſt nach Meier Hirſch's Integraltafeln, Seite 262,

$$\int\sin^2\varphi d\varphi = -\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi + C'$$

und $$\int\sin^3\varphi d\varphi = (-\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi - \tfrac{2}{3})\cos\varphi + C''$$

und es muß für $\varphi = 0$ auch $V = 0$ werden, alſo iſt

$C' = 0$ und $-\frac{2}{3} + C'' = 0$, folglich $C'' = \frac{2}{3}$

und daher $$\int\sin^2\varphi d\varphi = -\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi$$

und $$\int\sin^3\varphi d\varphi = \frac{2-\sin^2\varphi-2\cos\varphi}{3}$$

Für $\varphi = \gamma$ erhält man hieraus die Werthe der ganzen Integralien, folglich iſt

$$V = b(b+2r)\left[\frac{(w+a)(\gamma-\sin\gamma\cos\gamma)}{2} + \frac{(2r+b)(\sin^2\gamma+2\cos\gamma-2)}{6}\right]$$

wofür man zur Abkürzung ſetzen kann

$$V = nw + R$$

wo n und R bekannte Größen ſind.

3) $Z = -\int(k+h-x+\tfrac{1}{2}b\cos\varphi)(brd\cos\varphi+(r+b)bd\cos\varphi)\cos\varphi$

und es iſt $(\alpha x) = x = r\sin\text{vers}\,\varphi = r(1-\cos\varphi)$

also $Z = -\int(k+h-r+(r+\frac{1}{2}b)\cos\varphi)\,b(2r+b)\cos\varphi\,d\cos\varphi$

$= -(k+h-r)(2br+b^2)\int\cos\varphi\,d\cos\varphi - \frac{b(2r+b)^2}{2}\int\cos^2\varphi\,d\cos\varphi$

und weil $\int\cos\varphi\,d\cos\varphi = \frac{1}{2}\cos^2\varphi + C'$

und $\int\cos^2\varphi\,d\cos\varphi = \frac{1}{3}\cos^3\varphi + C''$

und die Integralien = 0 werden müssen, wenn man $\varphi = 0$ setzt, so ist

$$C' = -\tfrac{1}{2} \text{ und } C'' = -\tfrac{1}{3}$$

$$\text{also } \int\cos\varphi\,d\cos\varphi = -\frac{1-\cos^2\varphi}{2} = -\frac{\sin^2\varphi}{2}$$

$$\text{und } \int\cos^2\varphi\,d\cos\varphi = -\frac{1-\cos^3\varphi}{3}$$

folglich ist für $\varphi = \gamma$

$$Z = \tfrac{1}{2}(k+h-r)(2br+b^2)\sin^2\gamma + \frac{b(2r+b)^2(1-\cos^3\gamma)}{6}$$

ein Ausdruck, der ganz unabhängig von w ist.

4) Die Gleichung, durch welche die erforderliche Stärke der Widerlage sich berechnen läßt,

$$W+V+P = Z+Q$$

wird hiernach

$$W+(nw+R)+(mw+P') = Z+Q$$

und es ist daher

$$W+(n+m)w = (Z-R)+(Q-P').$$

Setzt man hier für W den Ausdruck, durch welchen bestimmt ist, wie W von w abhängt, so läßt sich durch eine quadratische Gleichung der Werth von w, also die erforderliche Stärke der Widerlage berechnen.

Vierte Abtheilung.

Aufgaben und Ue[illegible] aus der Mechanik der [illegible]örper.

[illegible]schnitt.

Von der gleichförmigen Bewegung.

§. 83.

Das Weſen der gleichförmigen Bewegung.

1. Die Bewegung eines Körpers iſt gleichförmig, wenn jeder Punkt deſſelben in gleichen Zeiten gleiche Räume durchläuft. Der gleichförmig bewegte Körper befindet ſich alſo in einem beharrlichen Zuſtande, in welchem er an und für ſich verweilt, ſobald er einmal in Bewegung iſt, und es wird dieſer Zuſtand durch jede Einwirkung irgend einer Kraft geändert. (nach §. 3. No. 2.) Die gleichförmige Bewegung eines vorher ruhenden Körpers wird daher durch die augenblickliche Einwirkung einer Kraft auf denſelben erzeugt, ohne daß eine Fortwirkung dieſer Kraft auch noch alsdann ſtattfindet, wenn der Körper bereits in Bewegung iſt.

2. Iſt die Geſchwindigkeit eines gleichförmig bewegten Körpers, alſo der in der Zeiteinheit von demſelben durchlaufene Raum, = c, ſo iſt, wenn man den in der Zeit t zurückgelegten Raum mit S bezeichnet, nach §. 3. No. 3.,

$$S = ct$$

und dieſes iſt die einfache Gleichung für die gleichförmige Bewegung.

3. Die Bewegung eines Körpers kann nur dadurch wahrnommen werden, daß er seine Lage gegen andere in Ruhe befindende Körper ändert. Es sei die Lage von A, g. 149, gegen B und C, welche den unveränderlichen Abnd BC von einander haben, gegeben, man kenne also BA CA ihrer Größe und Lage nach. Später befinde sich in A′, und habe also jetzt eine veränderte Lage, welche ch die, der Größe und Lage nach gegebenen BA′ und CA′ timmt ist, so wird man hierdurch zu der Folgerung berech-, daß eine Bewegung stattgefunden habe, und es muß diese wegung nothwendig dem Punkte A beigelegt werden, so- man überzeugt ist, daß B und C in Ruhe verblieben ; ist dieses aber nicht der Fall, so kann auch die Linie BC entgegengesetzter Richtung sich bewegt haben, so daß sie durch die Lage B′C′ erhalten hat, während A in Ruhe lieben ist: die Wirkung bleibt in beiden Fällen dieselbe, in- jetzt AB′ = A′B und AC′ = A′C ist. Hat wirklich die Lage geändert, ist also die Veränderung in der Art gegangen, daß BC die Lage B′C′ angenommen hat, wäh- A in Ruhe verbleibt, und wird dennoch A die Bewegung gelegt, so ist diese Bewegung bloß scheinbar. Es geht aus hervor, daß jede wirkliche Bewegung als eine schein-, und umgekehrt, angesehen werden kann. Es ist also ei- ei, ob man einen Körper A als bewegt denkt, während Körper B und C, durch welche seine Lage bestimmt ist, ruhend angenommen werden, oder ob man diese Körper, Beibehaltung ihrer gegenseitigen Lage, als in entgegenge- er Richtung mit derselben Geschwindigkeit bewegt, sich vor-, und A als ruhend angenommen wird.

4. Wirken zwei Kräfte zugleich auf einen Körper, von chen jede für sich demselben eine gleichförmige Bewegung eilen würde, so erhält er durch beide vereint ebenfalls eine chförmige Bewegung, deren Größe und Richtung durch die ße und Richtung der beiden auf ihn wirkenden Kräfte bemt ist. Denn wirken auf A, Fig. 150, zwei Kräfte, von chen die eine ihn in einer gewissen Zeit bis B, und die ere in derselben Zeit ihn bis C bringen würde, so kann ihm die Bewegung von A bis B wirklich beilegen, und

indem man das Parallelogramm BACD vollendet, kann nun, statt der Bewegung von A bis C, der Linie CD die Bewegung in entgegengesetzter Richtung beigelegt werden (nach No. 3.) und es wird daher in demselben Augenblick, wo A in B ankommt, zugleich DC die Lage BA erhalten, also B mit D zusammenfallen, und folglich auch A, welcher in B eben anlangt. Die vereinte Wirkung beider Kräfte ist also, daß in derselben Zeit, in welcher A von A nach B, und zugleich auch von A nach C kommen sollte, er von A nach D mit einer verhältnißmäßigen Geschwindigkeit = AD gelangen wird. Der Körper beschreibt also in diesem Falle die Diagonale des durch AB, AC und ihrer gegenseitigen Richtung bestimmten Parallelogramms. Das Parallelogramm der Kräfte, §. 10., wird hier zu einem Parallelogramm der Bewegung, und die Formeln für die äquipollente Kraft, §. 11., geben hier die Formeln für die Richtung und Geschwindigkeit eines Körpers, der durch zwei Kräfte zugleich bewegt wird.

5. So wie die beiden Kräfte AB und AC die mittlere Kraft AD erzeugen, eben so erzeugen auch die beiden Geschwindigkeiten AB und AC die mittlere Geschwindigkeit AD, und man kann die letztere, ihrer Größe und Richtung nach, für die beiden ersteren, ihrer Größe und Richtung nach, substituiren. Man ist nun aber aus diesem Grunde auch berechtigt, umgekehrt statt der ihrer Größe und Richtung nach gegebenen Geschwindigkeit AD, die beiden Geschwindigkeiten AB und AC zu setzen, von welchen die eine AB ihrer Größe und Lage nach beliebig angenommen werden kann, und die andere AC hierdurch sich von selbst bestimmt.

§. 84.

Berechnung der durch gleichförmige geradlinige Bewegungen erzeugten Ortsveränderung eines Körpers.

Aufgabe 1. Die Lage des Körpers A, Fig. 151, ist gegen eine feste Abscissenlinie mn durch die Coordinaten ma = a und aA = b gegeben, und es bewegt sich dieser Körper mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit = c in einer Richtung, welche die Abscissenlinie unter dem Winkel α schneidet, und mit derselben in einer Ebene liegt; es soll die Lage des Kör-

pers, welche derselbe gegen die Abscissenlinie nach der Zeit t haben wird, bestimmt werden.

Auflösung. Befindet sich der Körper nach der Zeit t in A', so ist $AA' = ct$. Setzt man nun, mit Beibehaltung des Anfangspunktes m der Abscissen, $ma' = a'$ und $a'A' = b'$, so lassen sich die Werthe dieser Linien auf folgende Art bestimmen:

$$\text{Es ist } dA : Aa = 1 : \sin\alpha$$
$$\text{also } dA : b = 1 : \sin\alpha$$
$$\text{folglich ist } (dA) = \frac{b}{\sin\alpha}$$
$$\text{da nun } AA' = ct$$
$$\text{so ist } dA' = \frac{b}{\sin\alpha} + ct$$
$$\text{Nun ist aber auch } dA' : A'a' = 1 : \sin\alpha$$
$$\text{also } \frac{b}{\sin\alpha} + ct : b' = 1 : \sin\alpha$$
$$\text{folglich ist } b' = b + ct\sin\alpha$$

was auch unmittelbar gefunden wird, wenn man durch A die Ae der ae parallel zieht, denn jetzt ist

$$AA' : A'e = 1 : \sin\alpha$$
$$\text{oder } ct : A'e = 1 : \sin\alpha$$
$$\text{folglich } A'e = ct \cdot \sin\alpha$$
$$\text{hierzu } a'e = b$$
$$\text{giebt } A'a' = b' = b + ct \cdot \sin\alpha$$
$$\text{ferner ist } AA' : Ae = 1 : \cos\alpha$$
$$\text{also } ct : Ae = 1 : \cos\alpha$$
$$\text{folglich } aa' = Ae = ct \cdot \cos\alpha$$
$$\text{hierzu } ma = a$$
$$\text{giebt } ma' = a' = a + ct \cdot \cos\alpha.$$

Die gesuchte Lage des Körpers nach der Zeit t ist also bestimmt durch die beiden Gleichungen

$$a' = a + ct \cdot \cos\alpha$$
$$b' = b + ct \cdot \sin\alpha$$

Zusatz. Es ist aa' der Raum, welchen der Körper in der Richtung parallel der Abscissenlinie fortgerückt ist, und A'e der Raum, den er parallel den Ordinaten zurückgelegt hat.

Der erstere ist für die Zeit $t = ct\cos\alpha$ und der andere = $ct \cdot \sin\alpha$.

Aufgabe 2. Ein Körper hat anfänglich die Lage A, und nach der Zeit t ist er in A′; die Bewegung ist gleichförmig erfolgt, und man kennt für beide Lagen die Coordinaten in Beziehung auf die Abscissenlinie mn; man soll hieraus die Geschwindigkeit der Bewegung und die Richtung derselben gegen mn finden.

Auflösung. [illegible] a, $aA = b$, $ma' = a'$ und $a'A' = b'$ ist, nach [illegible]

$$a' - a = ct \cdot [illegible] \text{ d } b' - b = ct \cdot \sin\alpha$$

daher ist $\frac{a' - a}{\cos\alpha} =$ [illegible], folglich $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b' - b}{a' - b}$

wodurch die Richtung [illegible] egung bestimmt ist.

Die Geschwindigk[illegible] sich auf folgende Art bestimmen: Die obigen Gleichungen geben

$$\cos^2\alpha = \left(\frac{a' - a}{ct}\right)^2$$

$$\text{und } \sin^2\alpha = \left(\frac{b' - b}{ct}\right)^2$$

$$\text{also } 1 = \frac{(a' - a)^2}{(ct)^2} + \frac{(b' - b)^2}{(ct)^2}$$

$$\text{folglich ist } (ct)^2 = (a' - a)^2 + (b' - b)^2$$

$$\text{und daher } c = \frac{\sqrt{[(a' - a)^2 + (b' - b)^2]}}{t}$$

Zusatz. Eben so findet man t und α, wenn die Geschwindigkeit c gegeben ist.

Aufgabe 3. Die Lage des Körpers A, Fig. 152, ist gegen B durch $AB = d$ bestimmt, und es bewegt sich der Körper A mit einer Geschwindigkeit $= c$ in der Richtung AA′, welche mit AB den Winkel φ bildet. Es soll die Lage, welche A′ nach der Zeit t gegen B haben wird, angegeben werden.

Auflösung. Die gesuchte Lage ist bestimmt durch die Länge der Linien BA′ und den Winkel ABA′. Nun sind aber von dem Dreieck ABA′ zwei Seiten $BA = d$, $AA' = ct$ und der von denselben eingeschlossene Winkel $BAA' = \varphi$ gegeben, folglich können die gesuchten Stücke mittelst der einfachen Formeln der Trigonometrie gefunden werden. Es ist daher

$$BA' = \sqrt{[d^2 + (ct)^2 - 2dct\cos\varphi]}$$

$$\text{und } tg\psi = \frac{ct\sin\varphi}{d - ct\cos\varphi}$$

Aufgabe 4. Die Lage von A gegen B ist gegeben durch ihren Abstand AB = d, und man kennt den Winkel ABm = α, welchen AB mit der ihrer Lage nach gegebenen Linie mn bildet. A bewegt sich mit einer Geschwindigkeit = c in einer Richtung, welche die mn unter dem Winkel β schneidet; man soll hieraus die Lage des Punktes A nach der Zeit t gegen B und gegen mn finden.

Auflösung. Ist A' die Lage, welche A nach der Zeit t haben wird, so ist dieselbe bestimmt, wenn man die Entfernung BA' = δ und den Winkel A'Bn = $\alpha - \psi$ kennt.

Es ist aber $\angle BAm = \alpha - \beta$,

daher $\angle BAA' = 180^0 - (\alpha - \beta)$

und BA = d; AA' = ct

man kennt also, wie bei der vorigen Aufgabe, von dem Dreieck BAA' zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, folglich läßt sich der Werth von BA' = δ nach der obigen Formel finden, wenn man dort setzt $\varphi = 180^0 - (\alpha - \beta)$, also $\cos\varphi = -\cos(\alpha - \beta)$. Eben so ist hierdurch ψ bestimmt, und also auch $\alpha - \psi$, und zwar findet man

$$tg\psi = \frac{ct\sin(\alpha - \beta)}{d + ct\cos(\alpha - \beta)}$$

Zusatz. Es ist $tg\alpha - tg\psi = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\psi}{\cos\psi}$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\psi - \cos\alpha\sin\psi}{\cos\alpha\cos\psi} = \frac{\sin(\alpha - \psi)}{\cos\alpha\cos\psi}$$

folglich ist $\sin(\alpha - \psi) = \cos\alpha\cos\psi\,(tg\alpha - tg\psi)$

$$\text{und weil } \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{(1 + tg^2\psi)}}$$

so ist auch $\sin(\alpha - \psi) = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{(1 + tg^2\psi)}}\,(tg\alpha - tg\psi)$

In diesem Ausdrucke aber kann der bekannte Werth von $tg\psi = \frac{ct\sin(\alpha - \beta)}{d + ct\cos(\alpha - \beta)}$ gesetzt werden, und es läßt sich also hierdurch unmittelbar der Werth des Winkels $\alpha - \psi$, welchen A' mit mn bildet, bestimmen.

Aufgabe 5. Die Lage von A, Fig. 151, ist gegen mn durch die Coordinaten ma = a, aA = b gegeben, und die von B durch mb = a'' und bB = b''. A bewegt sich mit der Geschwindigkeit c in einer Richtung, welche mn unter dem Winkel α schneidet; es soll angegeben werden, welche Lage A gegen B nach der Zeit t haben wird.

Auflösung. Befindet sich A nach der Zeit t in A', so ist, nach Aufgabe 1.,

$ma' = a' = a + ct\cos\alpha$; $a'A' = b' = b + ct\sin\alpha$

Nun ist $mb = a''$; $bB = b''$

folglich ist $(ba') = a - a'' + ct\cos\alpha = (gA')$

$bB - a'A' = b'' - b - ct\sin\alpha = (gB)$

und es ist nun $(BA')^2 = (gA')^2 + (gB)^2$

also BA' der Größe nach bestimmt.

Da sonach (AA') = ct, $(AB) = \sqrt{[(a''-a)^2+(b''-b)^2]}$ und (BA') ebenfalls bekannt ist, so kennt man alle drei Seiten des Dreiecks ABA', wodurch die Winkel desselben bestimmt sind, und also auch die Winkel, unter welchen A'g sowohl von BA als von BA' geschnitten wird.

§. 85.

Von der Ortsveränderung eines gleichförmig im Kreise sich bewegenden Körpers.

Aufgabe 1. Ein Körper bewegt sich mit der Geschwindigkeit = c in einem Kreise, dessen Radius = R ist; es soll die Zeit angegeben werden, in welcher er den ganzen Kreis durchlaufen wird.

Auflösung. Der Umfang des Kreises ist $= 2R\pi$, und der in der Zeit t durchlaufene Raum = ct. Es muß also sein

$$ct = 2R\pi$$

$$\text{und daher } t = \frac{2R\pi}{c}$$

Zusatz. Der in der Zeit t zurückgelegte Raum ist = ct, und setzt man den Winkel am Mittelpunkt, welcher zu dem in dieser Zeit durchlaufenen Kreisbogen gehört, $= \varphi^0$, so ist dieser Kreisbogen $= \frac{\varphi}{360} \cdot 2R\pi$, und es ist also auch

$$\frac{\varphi \cdot R\pi}{180} = ct$$

folglich $\varphi = \frac{ct}{R\pi} \times 180°$

Aufgabe 2. Die Lage des Mittelpunkts c eines Kreis Fig. 153, iſt durch die rechtwinkligen Coordinaten mb = a, = b gegeben, und es iſt der Radius des Kreiſes = R, ba = b − R. Von dem Punkte a der Peripherie aus gt ſich ein Punkt in dem Kreiſe in der Richtung aa′ mit Geſchwindigkeit = c, und es erhält derſelbe hierdurch in Zeit t die Lage a′. Man ſoll die Lage dieſes Punktes Beziehung auf die Abſciſſenlinie mn beſtimmen.

Auflöſung. Setzt man den Winkel aca′ = φ, ſo iſt Bogen aa′ = $\frac{\varphi}{360} \cdot 2R\pi$, und es iſt auch aa′ = ct, und r, wie in dem obigen Zuſatze,

$$\varphi = \frac{ct}{R\pi} \times 180°$$

iſt, wenn man a′d normal auf cb zieht,

$$ca' : a'd = 1 : \sin\varphi$$

$$\text{oder } R : (a'd) = 1 : \sin\varphi$$

$$\text{alſo } (a'd) = R\sin\varphi = R\sin\left(\frac{ct}{R\pi} \cdot 180°\right)$$

eben ſo findet man

$$cd = R\cos\varphi = R\cos\left(\frac{ct}{R\pi} \cdot 180°\right)$$

iſt aber

$$(bb') = a' = (da')$$

$$\text{und } (b'a') = b' = (bc - cd)$$

ich iſt auch

$$a' = R\sin\left(\frac{ct}{R\pi} \cdot 180°\right)$$

$$\text{und } b' = b - R\cos\left(\frac{ct}{R\pi} \cdot 180°\right)$$

urch die geſuchte Lage des Punkts a nach der Zeit t in ehung auf mn beſtimmt iſt.

Zuſatz. Iſt hier 1) ct = $\frac{1}{2}R\pi$, ſo wird

$$a' = R \text{ und } b' = b$$

und es erhalten die Coordinaten denselben Werth auch für jede ganze Zahl = n, wenn $ct = (2n + \frac{1}{2})R\pi$ ist.

2) Für $ct = R\pi$ wird

$$a' = 0 \text{ und } b' = b + R$$

und diese Werthe werden auch erhalten für $ct = (2n+1)R\pi$.

3) Ist $ct = \frac{3}{2}R\pi$, so wird

$$a' = -R \text{ und } b' = R$$

und man erhält dieselben Werthe für $ct = (2n + \frac{3}{2})R\pi$.

4) Wenn endlich $ct = 2R\pi$ ist, so wird

$$a' = 0 \text{ und } b' = b - R$$

und es ist dieses auch der Fall für $ct = 2n \times R\pi$.

Aufgabe 3. Ein Körper bewegt sich von a aus in dem Kreise mit der Geschwindigkeit = c; es soll die Lage a', welche derselbe nach der Zeit t gegen den festen, in der Abscissenlinie nn liegenden Punkt B hat, bestimmt werden.

Auflösung. Da sowohl B als auch der Mittelpunkt c des Kreises der Lage nach gegeben ist, so ist Bc = d der Größe und Lage nach gegeben, aber auch bc = b ist gegeben, folglich der Winkel $Bcb = \psi$, und zwar ist $\cos\psi = \frac{b}{d}$.

Nun ist aber $\varphi = \frac{ct}{R\pi} \cdot 180^0$ durch c und t bestimmt, also kennt man auch den Winkel Bca', und da Bc = d und ca' = R, so sind von dem Dreieck Bca' zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, und daher auch die gesuchte dritte Seite ba' = x. Nämlich es ist

$$x = \sqrt{[d^2 + R^2 - 2dR\cos(\psi + \varphi)]}$$

Zusatz. Die Entfernung des Körpers a' von B wird ein Maximum für $\cos(\psi + \varphi) = -1$, und ein Minimum für $\cos(\psi + \varphi) = +1$. Es hat also a' den größten Abstand von B für $\psi + \varphi = 180^0$, also für $\varphi = 180^0 - \psi$, und den kleinsten Abstand hat a' von B für $\psi + \varphi = 0^0$, also für $\varphi = -\psi$.

In dem ersten Falle ist $x = \sqrt{(d^2 + R^2 + 2dR)} = d + R$, und der Körper befindet sich in d', und in dem zweiten Falle ist $x = \sqrt{(d^2 + C^2 - 2dR)} = d - R$, und der Körper ist in δ.

Aufgabe 4. Es soll die Zeit = t gefunden werden,

welcher der von a aus in dem Kreise mit der Geschwin= = c bewegte Körper einen Abstand = h von dem fe= r der Abscissenlinie mn liegenden Punkt B haben wird.

uflösung. Für Ba′ = h sind von dem Dreieck Bca′ rei Seiten gegeben. Es ist Ba′ = h, Bc = d und R, folglich ist, wenn wieder der bekannte Winkel Bcb gesetzt wird,

$$\cos(\psi+\varphi) = \frac{d^2+R^2-h^2}{2dR}$$

und es ist nun, nach Aufgabe 1., $t = \frac{\varphi \cdot Rt}{180 \cdot c}$

uſatz. Soll diese Aufgabe keinen Widerspruch enthal= darf nicht sein

$$\frac{d^2+R^2-h^2}{2dR} > +1 \text{ oder } < -1$$

oder $d^2+R^2-h^2 > 2dR$ oder $< -2dR$

rf also nicht sein

$d^2+R^2-2dR > h^2$, also $d-R > h$

der $d^2+R^2+2dR < h^2$, = $d+R < h$

h auch unmittelbar aus der Figur ergiebt.

ufgabe 5. Der Punkt B′ hat eine feste Lage außer= er Abscissenlinie mn; es soll die Lage des, mit der Ge= digkeit c von a aus im Kreise bewegten Körpers gegen en, nach der Zeit t gefunden werden.

uflösung. Zieht man von c durch B′ die Linie cB, sich jetzt a′B′ eben so finden, wie in Aufgabe 3. der von a′B gefunden wird.

uſatz. Auch hier kann wieder, wie bei Aufgabe 4., die gefunden werden, nach welcher der Körper einen be= n Abstand von B′ haben wird.

§. 86.

Von der geradlinigen scheinbaren Bewegung.

ufgabe 1. Es befinden sich gleichzeitig der Körper A B in B, Fig. 154; der erstere bewegt sich in der Rich= mit der Geschwindigkeit = c, und der zweite in der mn′ mit der Geschwindigkeit = C. Es soll die gegen=

seitige Lage, welche diese Körper nach der Zeit t haben, bestimmt werden.

Auflösung. Es schneiden sich die Richtungen, in welchen beide Körper sich bewegen, in m unter dem Winkel β, und es sei $mA = a$, $mB = b$. Nach der Zeit t sollen die Körper die Lage A′ und B′ haben, so ist $AA' = ct$ und $BB' = Ct$, und daher $mA' = a + ct$ und $mB' = b + Ct$.

Es ist aber

$$Bb = b\sin\beta;\ mb = b\cos\beta;$$

$B'b' = (b + Ct)\sin\beta$ und $mb' = (b + Ct)\cos\beta$.

Hiernach ist für die anfängliche Lage des Körpers, ihr Abstand in der Richtung mn

$$= Ab = mb - mA = b\cos\beta - a$$

und in der auf derselben normalen Richtung ist der Abstand $= bB = b\sin\beta$.

Nach der Zeit t ist ihr Abstand in der Richtung mn $= A'b' = mb' - mA' = (b + Ct)\cos\beta - (a + ct)$, und in der Richtung normal auf mn ist ihr Abstand $= b'B' = (b + Ct)\sin\beta$.

Daher ist die relative Ortsveränderung in der Richtung mn =

$$A'b' - Ab = (b + Ct)\cos\beta - (a + ct) - (b\cos\beta - a)$$
$$= Ct\cos\beta - ct = (C\cos\beta - c)t$$

und in der auf mn normalen Richtung ist die Ortsveränderung =

$$b'B' - bB = (b + Ct)\sin\beta - b\sin\beta = Ct\sin\beta.$$

Zusatz 1. Die für A′b′ und b′B′ gefundenen Ausdrücke geben die scheinbare Bewegung, welche ein Beobachter in A dem Körper B beilegt, wenn er die eigne Bewegung von A bis A′ nicht merkt, und also in Ruhe zu sein wähnt.

Der Ausdruck

$$A'b' - Ab = (C\cos\beta - c)\,t = X$$

läßt die Bedingungen erkennen, nach welchen A, der sich ruhend wähnt, die Bewegung von B in der Richtung mn beurtheilt. Ist hier

1) $\beta = 0$, so wird $X = (C - c)\,t$

Es scheint dem A also, es bewege sich B mit der Differenz der Geschwindigkeiten beider Körper, und es wird daher für $C = c$ scheinen, als sei B in der Richtung mn in Ruhe, und

$c > C$ wird A den B in der entgegengesetzten Richtung
n n nach m mit einer Geschwindigkeit $= c - C$ bewegt
uben.

2) Ist $\beta = 90°$, so wird $X = -ct$.

A wähnt alsdann, daß B mit seiner eigenen Geschwin-
keit in der entgegengesetzten Richtung sich bewege.

3) Wenn $C < c$, so ist immer $C\cos\beta - c$ negativ; in
sem Falle wird also B, welches auch der Werth von β sein
ag, eine rückgängige Bewegung zu haben scheinen. Ist aber

4) C nicht kleiner als c, so ist X nur alsdann negativ,
enn $C\cos\beta < c$, also $\cos\beta < \frac{c}{C}$, und die Bewegung wird
einbar $= 0$, wenn $\cos\beta = \frac{c}{C}$.

5) Ist $\beta > 90°$, so ist $\cos\beta$ negativ, und daher nun

$$X = -(C\cos(180 - \beta) + c)$$

e Bewegung von B ist also bei dieser Voraussetzung immer
ckgängig, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die größer
s c. Diese Geschwindigkeit wird ein Maximum für $\beta = 180°$,
nd sie ist alsdann $= -(C + c)$, also der Summe beider
eschwindigkeiten gleich.

Zusatz 2. Die Beurtheilung der Bewegung in der Rich-
ng normal auf mn, bei der Voraussetzung, daß A sich ru-
nd wähnt, ergiebt sich wie folgt: Es ist

$$b'B' - bB = Ct\sin\beta = Y$$

ese Bewegung ist also unabhängig von der Geschwindigkeit c
s Körpers A, und

1) für $\beta = 0$, wenn also die Richtungen beider Körper
rallel sind, wird auch $Y = 0$;

2) aber für $\beta = 90°$ wird $Y = Ct$ ein Maximum, der
rper entfernt sich also mit seiner ganzen Geschwindigkeit
n mn.

Aufgabe 2. Es soll der Neigungswinkel β der Rich-
ng der beiden, mit den Geschwindigkeiten c und C bewegten
rper A und B, und die erforderliche Zeit angegeben werden,
nn unter der Voraussetzung, daß A sich ruhend wähnt, B
der Richtnng mn eine Strecke $= p$, und in der auf mn

normalen Richtung eine Strecke = q ſcheinbar bewegt gedacht wird.

Auflöſung. Setzt man in den beiden Gleichungen Zuſatz 1. und 2. der vorigen Aufgabe

$$X = (C\cos\beta - c)t \text{ und } Y = ct\sin\beta$$

$X = p$ und $Y = q$, ſo wird

$$\frac{p}{C\cos\beta - c} = \frac{q}{c\sin\beta}$$

$$\text{daher } pc\sin\beta = qC\cos\beta - qc$$

eine Gleichung, aus welcher der Werth von β auf verſchiedene Arten beſtimmt werden kann, und es iſt hierdurch alsdann auch $t = \frac{q}{c\sin\beta}$ beſtimmt. Um indeſſen directe Formeln zu erhalten, darf kein Hülfswinkel eingeführt werden, ſondern man muß ſogleich den Werth von $\sin\beta$ zu beſtimmen ſuchen. Es iſt aber

$$(p\sin\beta + q)c = qC\cos\beta$$

$$\text{folglich } (p^2\sin^2\beta + 2pq\sin\beta + q^2)c^2 = q^2C^2(1 - \sin^2\beta)$$

$$\text{und } (p^2c^2 + q^2C^2)\sin^2\beta + 2pqc^2\sin\beta = q^2C^2 - q^2c^2$$

$$\text{daher } \sin^2\beta + \frac{2pqc^2}{p^2c^2 + q^2C^2}\sin\beta = \frac{q^2(C^2 - c^2)}{p^2c^2 + q^2C^2}$$

eine quadratiſche Gleichung, aus welcher der Werth von β ſich beſtimmen läßt.

Aufgabe 3. Der Neigungswinkel β der Richtungen von den beiden bewegten Körpern A und B iſt gegeben, und auch die ſcheinbare Veränderung der Lage von B gegen A nach der Zeit t, man kennt alſo die Werthe von p und q, Aufgabe 2. Es ſollen hieraus die erforderlichen Geſchwindigkeiten c und C beſtimmt werden.

Auflöſung. Die Gleichungen ſind, wie bei Aufgabe 2.,

$$p = (C\cos\beta - c)t \text{ und } q = Ct\sin\beta$$

$$\text{hieraus folgt unmittelbar } C = \frac{q}{t\sin\beta}$$

und es wird hierdurch die erſte Gleichung

$$p = \left(\frac{q\cos\beta}{t\sin\beta} - c\right)t$$

$$\text{alſo } p = q\,\mathrm{tg}\beta - ct$$

$$\text{folglich iſt } c = \frac{q\,\mathrm{tg}\beta - p}{t}$$

Zuſatz

Zuſatz. Es iſt leicht, hieraus die Bedingungen zu finden, unter welchen A wirklich ruhen muß, und die Bedingungen, unter welchen die Bewegung von A nach der Richtung mn, oder nach der entgegengeſetzten nm ſtattfinden wird.

Aufgabe 4. Der Körper A, Fig. 155, bewegt ſich von A aus in der Richtung mn mit der Geſchwindigkeit c, und B von B aus in der Richtung mn′ mit einer Geſchwindigkeit = C. Der Punkt D iſt der Lage nach gegeben, und man kennt die DA = a, DB = b und die Winkel DAn = α, DBn′ = β und ADB = γ. Es ſoll die Zeit t gefunden werden, nach welcher A und B mit D in gerader Linie ſtehen werden.

Auflöſung. Sind die Körper in der Lage A′ und B′ mit D in grader Linie, und ſetzt man den Winkel BDB′ = φ, ſo iſt

in $\Delta ADA'$ gegeben DA = a, AA_1 = ct und $\angle\alpha$

und es iſt daher $\operatorname{tg}(\gamma+\varphi) = \dfrac{ct\sin\alpha}{a-ct\cos\alpha}$

oder, wenn man den Ausdruck $\dfrac{c\sin\alpha}{a-ct\cos\alpha}$, einſtweilen zur Abkürzung = p ſetzt, ſo iſt

$$\operatorname{tg}(\gamma+\varphi) = pt.$$

In $\Delta BDB'$ iſt DB = b, BB′ = Ct und $\angle\beta$ gegeben, und es iſt daher

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Ct\sin\beta}{b-Ct\cos\beta}$$

oder wenn der Ausdruck $\dfrac{C\sin\beta}{b-Ct\cos\beta} = q$ geſetzt wird, ſo iſt

$$\operatorname{tg}\varphi = qt.$$

Man hat hiernach die beiden Gleichungen

$$\operatorname{tg}\varphi = qt \text{ und } \operatorname{tg}(\gamma+\varphi) = pt$$

Nun iſt aber $\operatorname{tg}(\gamma+\varphi) = \dfrac{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\varphi}$

folglich wird die zweite Gleichung

$$\frac{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\varphi} = pt$$

und daher iſt $\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\varphi = pt - pt\cdot\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\varphi$

Wird hier für $\operatorname{tg}\varphi$ der Werth aus der erſten Gleichung geſetzt, ſo erhält man

$$\operatorname{tg}\gamma + qt = pt - pqt^2 \cdot \operatorname{tg}\gamma$$

und wenn hier wieder für p und q die Werthe geſetzt werden, ſo erhält man

$$\operatorname{tg}\gamma + \frac{Ct\sin\beta}{b - Ct\cos\beta} = \frac{ct\sin\alpha}{a - ct\cos\alpha} - \frac{cCt^2\sin\alpha\sin\beta\operatorname{tg}\gamma}{(b - Ct\cos\beta)(a - ct\cos\alpha)}$$

und hieraus folgt

$$(a - ct\cos\alpha)(b - Ct\cos\beta)\operatorname{tg}\gamma + Ct\sin\beta(a - ct\cos\alpha) = ct\sin\alpha(b - Ct\cos\beta) - cCt^2\sin\alpha\sin\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Dieſes giebt nach gehöriger Reduction

$$cC[\sin(\varrho - \alpha) - \cos(\beta - \alpha)\operatorname{tg}\gamma]\cdot t^2 + [aC(\cos\beta\operatorname{tg}\gamma - \sin\beta) + bc(\cos\alpha\operatorname{tg}\gamma + \sin\alpha)]\cdot t - ab\operatorname{tg}\gamma = 0.$$

Eine Gleichung des 1ſten Grades, woraus der Werth von t, und alſo auch der von φ leicht gefunden werden kann.

Aufgabe 5. Die Körper A und B, welche von dieſen Punkten aus mit den Geſchwindigkeiten c und C in den Richtungen mn und mn′ ſich bewegen, ſind gleich anfangs mit dem feſten Punkte D in gerader Linie; es ſoll die Zeit gefunden werden, nach welcher ſie wieder mit D in grader Linie ſein werden.

Auflöſung. Behält man hier die Bezeichnung wie bei Aufgabe 4., ſo hat man nur, da A und B gleich Anfangs mit D in grader Linie ſein ſollen, in dem dort für $\operatorname{tg}(\gamma+\varphi)$ gefundenen Ausdruck, $\gamma = 0$ zu ſetzen; hierdurch wird derſelbe

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{ct\sin\alpha}{a - ct\cos\alpha}$$

zugleich iſt aber auch $\operatorname{tg}\varphi = \frac{Ct\sin\beta}{b - Ct\cos\beta}$

Folglich wird, wenn man beide Werthe von $\operatorname{tg}\varphi$ einander gleich ſetzt,

$$\frac{c\sin\alpha}{a - ct\cos\alpha} = \frac{C\sin\beta}{b - Ct\cos\beta}$$

und es ist hiernach

$$bc\sin\alpha - Cct\sin\alpha\cos\beta = aC\sin\beta - Cct\cos\alpha\sin\beta$$

und hiernach

$$Cct(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta) = aC\sin\beta - bc\sin\alpha$$

und daher auch

$$Cct\sin(\beta-\alpha) = aC\sin\beta - bc\sin\alpha$$

folglich ist $t = \frac{aC\sin\beta - bc\sin\alpha}{Cc\sin(\beta-\alpha)}$

Zusatz Ist in diesem Ausdrucke $aC\sin\beta = bc\sin\alpha$, so wird $t = 0$, und für $\beta = \alpha$, wird $t = \infty$; in beiden Fällen kommen die Körper A und B also nicht wieder mit D in gerade Linie.

Ist $aC\sin\beta > bc\sin\alpha$, so kommen die Körper nochmals mit D in gerade Linie, und für $aC\sin\beta < bc\sin\alpha$ wird t negativ, es sind also A und B bereits früher mit D in grader Linie gewesen.

§. 87.

Von der Bewegung im Kreise.

Aufgabe 1. Zwei Körper A und B bewegen sich von demselben Punkte aus in einem Kreise in derselben Richtung mit den Geschwindigkeiten C und c; es soll die Zeit angegeben werden, nach welcher sie wieder zusammentreffen.

Auflösung. Für den Radius = R ist der in der Zeiteinheit durchlaufene Bogen, nach §. 85. Zusatz zu Aufgabe 1.,

für $A = \varphi^\circ = \frac{C}{R\pi} \times 180^\circ$

„ $B = \psi^\circ = \frac{c}{R\pi} \times 180^\circ$

Da nun R, C und c gegeben sind, so kennt man den Winkel φ und ψ, welcher von jedem der beiden Körper in der Zeiteinheit durchlaufen wird, und welches man die Winkelgeschwindigkeit nennt.

Ist nun $C > c$, so ist auch $\varphi > \psi$, und es ist der Abstand beider Körper nach der Zeiteinheit $= \varphi - \psi$; zusammentreffen aber können beide Körper erst alsdann, wenn ihr Abstand dem Kreisumfange gleich ist, also, in Winkel ausge-

drückt, 360° beträgt. Sollen sie also nach der Zeit t zusammentreffen, so muß

$$t(\varphi - \psi) = 360°, \text{ also } t = \frac{360°}{\varphi - \psi} \text{ sein,}$$

und es wiederholt sich dieses Zusammentreffen jedesmal nach dieser Zeit.

Zusatz 1. Ist der anfängliche Abstand beider Körper von einander im Winkel $= \gamma°$, so daß A bereits um $\gamma°$ voraus ist, so findet das nä[illegible]ammentreffen beider nach der Zeit

$$t = \frac{360° - \gamma}{\varphi - \psi}$$

statt. Von diesem Zusa[illegible]fen bis zu dem folgenden aber ist die Zeit $t = \frac{360°}{\varphi - \psi}$.

Zusatz 2. Laufen beide Körper von einem Punkte aus, so hat bei dem ersten Zusammentreffen A einen Bogen durchlaufen von $= t\varphi$ und $B = t\psi$, und der Unterschied beider ist $t\varphi - t\psi = 360°$. Es muß also A jedenfalls mehr als einen Kreisumfang durchlaufen haben, während B bis zu dem Zusammentreffen nur einen Theil des Kreisumfanges zu durchlaufen haben kann. So ist z. B. für den Minuten- und Stundenzeiger einer Uhr, wenn man die Zeiteinheit $= 1$ Stunde annimmt, für den Minutenzeiger A der Werth von $\varphi = 360°$, und für den Stundenzeiger B ist $\psi = \frac{1}{12} \times 360° = 30°$, also $\varphi - \psi = 360 - 30 = 330°$ und $t = \frac{360}{330} = 1\frac{1}{11}$ Stunde.

Bei dem ersten Zusammentreffen hat also der Minutenzeiger bereits $1\frac{1}{11} \times 360° = 392\frac{8}{11}°$, der Stundenzeiger aber erst $32\frac{8}{11}°$ zurückgelegt.

Aufgabe 2. Die Körper A und B bewegen sich in demselben Kreise von demselben Punkte aus mit den Winkelgeschwindigkeiten $\varphi°$ und $\psi°$; es soll die Zeit angegeben werden, nach welcher beide in demselben Punkte, von welchem aus ihre Bewegung begonnen hat, wieder zusammentreffen.

Auflösung. Bis zu dem ersten Zusammentreffen ist von A ein Bogen $= t\varphi$ zurückgelegt worden. Daher ist der

zu dem mten Zusammentreffen durchlaufene Bogen = $mt\varphi$, es muß nun, wenn dieses Zusammentreffen wieder in nselben Punkte stattfinden soll, $mt\varphi$ ein Vielfaches des eisumfanges sein, folglich muß für ganze Zahlen m und n

$$mt\varphi = n \cdot 360$$

, wo m und n prim unter sich sind für das nächste Zu- mmentreffen in demselben Punkte. Sind nun auch $t\varphi$ und prim unter sich, während $t\varphi$ eine ganze Zahl ist, so wird

$$m = 360 \text{ und } n = t\varphi$$

aber $t\varphi$ mit 360 verwandt, oder hat $t\varphi$ einen gebroche- Werth, so bringt man das Verhältniß $360 : t\varphi$ auf die nsten ganzen Zahlen, und es ist für

$$360 : t\varphi = p : q,$$

p und q kleinste ganze Zahlen sind,

$$m = p \text{ und } n = q;$$

erste Zusammentreffen in demselben Punkte findet also ch der Zeit pt statt.

Zusatz. Soll bestimmt werden, nach welcher Zeit beide rper in einem gewissen Punkte, der verschieden ist von dem nkte, von welchem sie ihre Bewegung beginnen, zusammen- ffen, und ist der Abstand dieses Punktes von dem Anfangs- nkte = $\gamma°$, so müssen zwei ganze Zahlen von der Art ge- den werden, daß

$$mt\varphi = n \cdot 360 + \gamma$$

d, und es ist dieses, wie aus der unbestimmten Analysis annt ist, nur alsdann möglich, wenn $t\varphi$ und 360 keinen meinschaftlichen Factor enthalten, der nicht zugleich auch in enthalten ist.

Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, nehme man , es sei die Winkelgeschwindigkeit von A, also $\varphi = 67°$, n B, also $\psi = 35°$, so ist die Zeit, nach welcher das erste sammentreffen erfolgt,

$$t = \frac{360}{\varphi - \psi} = \frac{360}{67 - 35} = \frac{360}{32} = 11\tfrac{1}{4}$$

oll nun die Zeit gefunden werden, nach welcher beide Kör- r in einem Abstand $\gamma = 40°$ von dem Anfangspunkte zu- mmen kommen, so müßte sein

$$mt\varphi = n \cdot 360 + \gamma$$

also $m \cdot 11\frac{1}{4} \cdot 67 = n \cdot 360 + 40$

oder $m \cdot 45 \cdot 67 = n \cdot 4 \cdot 360 + 40 \cdot 4$

und $m \cdot 9 \cdot 67 = n \cdot 4 \cdot 72 + 8 \cdot 4$

hieraus aber folgt

$$9(67m - 32n) = 32$$

Da nun m und n ganze Zahlen sein sollen, so ist auch $67m - 32n$ eine ganze Zahl, und es enthält also $9(67m - 32n)$ den Factor 9, also müßte auch 32 diesen Factor enthalten, und da dieses nicht der Fall ist, so kann ein solches Zusammentreffen in einem Abstande von dem Anfangspunkte $= 40°$ gar nicht erfolgen.

Soll ermittelt werden, nach welcher Zeit ein Zusammentreffen beider Körper in einem Abstande $\gamma = 180°$ von dem Anfangspunkte erfolgen wird, so ist

$$m \cdot 11\tfrac{1}{4} \cdot 67 = n \cdot 360 + 180$$

und $m \cdot 45 \cdot 67 = n \cdot 4 \cdot 360 + 4 \cdot 180$

also, wenn man mit 45 theilt,

$$67m = 32n + 16$$

folglich muß jetzt werden

$$67m - 32n = 16$$

und dieser Gleichung wird Genüge geleistet für

$$m = 16 \text{ und } n = 33$$

folglich ist die gesuchte Zeit $= mt = 16 \cdot 11\frac{1}{4} = 180$ Zeiteinheiten.

Aufgabe 3. Zwei Körper A und B bewegen sich in einem Kreise von demselben Punkte aus in entgegengesetzten Richtungen mit den Winkelgeschwindigkeiten φ und ψ; es soll die Zeit angegeben werden, nach welcher sie das erste Mal zusammentreffen.

Auflösung. Der Körper A durchläuft in der Zeit t einen Bogen $= t\varphi°$ und $B = t\psi°$. Beide Körper haben bis zu ihrem Zusammentreffen, da sie nach entgegengesetzten Richtungen sich bewegen, den ganzen Kreis, also 360° durchlaufen, folglich ist

$$t\varphi + t\psi = 360^0$$

und daher $t = \frac{360}{\varphi + \psi}$

die gesuchte Zeit.

Zusatz. Haben beide Körper gleich anfangs einen Abstand $= \gamma^0$ von einander, und bewegen sie sich so, daß der zwischen ihnen liegende Bogen bei dem Beginnen der Bewegung nicht durchlaufen wird, so wird die Zeit x für das erste Zusammentreffen durch die Gleichung gefunden

$$x\varphi + x\psi = 360 - \gamma$$

also ist $x = \frac{360 - \gamma}{\varphi + \psi}$

Erfolgt aber ihre Bewegung in der Art, daß sie gleich anfangs den zwischen ihnen liegenden Bogen durchlaufen, so ist

$$x\varphi + x\psi = \gamma$$

also $x = \frac{\gamma}{\varphi + \psi}$

Aufgabe 4. Zwei Körper bewegen sich von demselben Punkte aus nach entgegengesetzten Richtungen in einem Kreise; es soll die Zeit angegeben werden, nach welcher beide in eben diesem Punkte wieder zusammentreffen werden.

Auflösung. Diese ist nicht verschieden von der Auflösung der Aufgabe 2. Auch gelten hier ähnliche Bedingungen wie dort, wenn beide Körper in einem andern Punkte, der verschieden von dem Anfangspunkte ist, zusammentreffen sollen, und es ist auch hier die Auflösung nicht in allen Fällen möglich.

Aufgabe 5. Es bewegen sich zwei Körper A und B in concentrischen Kreisen, Fig. 156, so daß sie ihre Bewegung zugleich von den Punkten a und b aus beginnen, die mit ihrem gemeinschaftlichen Mittelpunkte c in grader Linie liegen; man soll für die gegebene Winkelgeschwindigkeit beider Körper die Zeit t finden, nach welcher sie wieder mit dem Mittelpunkte in grader Linie sein werden.

Auflösung. Ist für A die Winkelgeschwindigkeit $= \varphi$, so daß der Körper A in der Zeiteinheit den Weg von a bis a′ durchläuft, so wird ein anderer Körper A′, der in einem größern Kreise von b aus mit derselben Winkelgeschwindigkeit sich bewegt, den Bogen bα durchlaufen, während A den Bogen aa′

durchläuft, und es werden hiernach die Körper A und A′, wenn sie ihre Bewegung zugleich von a und b aus beginnen, stets mit dem Mittelpunkte g in grader Linie sich befinden. Sucht man also die Zeit, nach welcher A′ mit B wieder zusammentreffen wird, so giebt dieses zugleich die Zeit, nach welcher B mit A, von g aus gesehen, in grader Linie ist.

Zusatz. Hieraus geht hervor, daß, wenn zwei Körper in concentrischen Kreisen sich bewegen, die hierauf Bezug habenden Aufgaben sich eben so lösen lassen, als wenn zwei Kreise in einem und demselben Kreise bewegt gedacht werden, sobald es darauf ankommt, ihre Stellung von g aus zu beurtheilen, und es können hierbei die Auflösungen der Aufgaben 1. bis 4. unmittelbar benutzt werden.

Aufgabe 6. Die Körper A und B beginnen ihre Bewegung zu gleicher Zeit, und zwar A von a aus in der graden Linie an, Fig. 157, mit der Geschwindigkeit c, und B von b aus mit der Winkelgeschwindigkeit φ, und es sind a und b mit dem Mittelpunkte g des Kreises in grader Linie; es soll die gegenseitige Lage dieser Körper, welche dieselben nach der Zeit t haben werden, bestimmt werden.

Auflösung. Befindet sich A nach der Zeit t in a′, so ist $aa' = ct$, setzt man also $\angle aga' = \psi$, die bekannte Entfernung $ag = d$, und den ebenfalls bekannten Winkel $gaa' = \alpha$, so ist

$$tg\psi = \frac{ct\sin\alpha}{d - ct\cos\alpha}$$

Ist nun nach der Zeit t der Körper B in b′, so ist

$$\angle agb' = t\cdot\varphi.$$

Wird nun $t\cdot\varphi > \psi$ gefunden, während doch $t\cdot\varphi < 180° + \psi$, so wird, von A aus gesehen, während A ruhend zu sein scheint, B eine Bewegung vorwärts zugeschrieben werden, und man wird glauben, daß B sich rückwärts bewegt habe, wenn

$t\cdot\varphi < \psi$ oder $t\cdot\varphi > \psi + 180$ sich ergiebt.

Zusatz 1. Sollen nach der Zeit t die Körper A und B mit g in grader Linie sich befinden, so muß $\psi = t\cdot\varphi$ sein, und daher

$$tg(t\varphi) = \frac{ct\sin\alpha}{d - ct\cos\alpha}$$

s dieser Gleichung läßt sich, wenn die übrigen Größen ge-
en sind, d oder α, oder auch eine der beiden Geschwindig-
en c oder φ finden. Dagegen kann t nur in einem ge-
enen besondern Falle durch Näherung gefunden werden,
l t einmal algebraisch und einmal transcendent vorkommt.

Zusatz 2. Der Abstand a'b' beider Körper von einan-
nach der Zeit t läßt sich einfach trigonometrisch berechnen,
n es ist ga' bekannt, weil man von Δ gaa' zwei Seiten,
= d, aa' = ct, und den eingeschlossenen Winkel α kennt,
hiernach sind nun von b'ga' ebenfalls zwei Seiten ga' und
= R, und der von denselben eingeschlossene Winkel b'ga'
$\cdot\varphi - \psi$ gegeben.

Zweiter Abschnitt.

Die gleichförmig veränderliche Bewegung.

§. 88.

Das Wesen dieser Bewegung.

1. Eine Bewegung ist gleichförmig veränderlich, wenn
Geschwindigkeit derselben in gleichen Zeiten um gleich viel
ändert, also um gleich viel zu- oder abnimmt. Wird also
ch eine solche Bewegung in der ersten Zeiteinheit ein Raum
a durchlaufen, und in der zweiten der Raum = a + b, so
der in der dritten Zeiteinheit durchlaufene Raum =
+ b) + b = a + 2b, in der vierten = a + 3b sein ꝛc.

2. Die gleichförmig veränderliche Bewegung wird erzeugt
ch die fortwährende Einwirkung einer unveränderlichen Kraft
den bewegten Gegenstand. Es durchlaufe der Gegenstand
rend der ersten Zeiteinheit durch die Einwirkung der Kraft
n Raum = a, und es habe der Gegenstand hierdurch eine
chwindigkeit = b erlangt, so wird er ohne alle fernere
wirkung der Kraft, vermöge der Beharrlichkeit, diese Ge-
indigkeit beibehalten, und daher in der zweiten Einheit ei-
Raum = b durchlaufen. Wirkt nun aber auch während

der zweiten Zeiteinheit die Kraft auf denſelben, ſo m
eben ſo wie in der erſten Zeiteinheit den Körper durch
Raum = a treiben. Folglich iſt, bei fortwährender Einw
der Kraft, der durch dieſe und die bereits am Ende der
Zeiteinheit erlangte Geſchwindigkeit durchlaufene Raum =
Die in der zweiten Zeiteinheit fortwährend einwirkende
hat eben ſo wie in der erſten eine Geſchwindigkeit =
zeugt, welche zu der Geſchwindigkeit = b, welche der
bereits am Ende de eiteinheit hatte, hinzukomm
es iſt daher die Geſc eit am Ende der zweiten
= b + b = 2b, und ürde daher ein Raum =
der dritten Zeiteinheit ernere Einwirkung der Kraf
möge des Geſetzes de lichkeit durchlaufen werden.
aber die Kraft fort ſo treibt dieſe den Körper
in der dritten Zeit ch einen Raum = a, und
folglich bei fortwährender Wirkung der Kraft der in der
ten Zeiteinheit durchlaufene Raum = a + 2b. Eben
der Raum, welcher in der vierten Zeiteinheit durchlaufen
= a + 3b ꝛc., und es iſt ſomit nachgewieſen, daß die
förmig veränderliche Bewegung durch ſtete Einwirkung
unveränderlichen Kraft erzeugt wird.

3. Eine ſolche fortwährend einwirkende Kraft iſt
Schwere; ſie wirkt auf den unterſtützten und in Folge
ruhenden Körper ſowohl, als auf den bewegten, und
ſich in dem erſtern Zuſtande durch einen Druck, un
dem letztern durch Veränderung der Geſchwindigkeit.
aber die Schwere nahe an der Oberfläche der Erde auch
unveränderliche Kraft; die durch dieſelbe erzeugte Bew
iſt daher eine gleichförmig veränderliche, und der Fall der
per erfolgt daher mit gleichförmig zunehmender Geſchwindi

4. Die Schwere eines Körpers wird durch ſein Ge
erkannt, dieſes iſt aber bei verſchiedenen Körpern verſch
Deſſen ungeachtet durchlaufen verſchiedene Körper von
Augenblicke ihrer, in Folge der Schwere, beginnenden B
gung an, in gleichen Zeiten gleiche Räume, ſo daß ein
ter Körper mit derſelben Geſchwindigkeit wie ein ſchw
fällt. Die Urſache hiervon liegt darin, daß das Gewich
nes Körpers ſeiner Maſſe proportionirt iſt (§. 3. No.

an daher bei einem schwereren Körper eine größere Kraft
t, so ist durch dieselbe auch eine größere Masse zu bewe-
, und es kommt daher in allen Fällen auf eine gleiche
antität der Masse auch eine gleiche Kraft der Schwere.
st man hiernach die Masse zweier verschiedener Körper = M
m, und die auf dieselben wirkende Kraft der Schwere
P und p, so ist immer

$$P : p = M : m$$

und daher $\frac{P}{M} = \frac{p}{m}$

hat also $\frac{P}{M}$ in diesem Falle einen unveränderlichen Werth,
zwar ist, da die Masse selbst durch das Gewicht gemessen
d, $M = P$, also $\frac{P}{M} = 1$.

5. Ist in einem besonderen Falle die gleichförmig und
ig auf einen Körper wirkende Kraft P unabhängig von der
asse M desselben, so wird auch der Werth von $\frac{P}{M}$ verschie-
n von 1, und es hängt die Wirkung jedenfalls von dem
erthe dieses Ausdrucks ab. Nun äußert sich die Wirkung
er durch die Bewegung; es kann also die größere oder ge-
gere Wirkung nur durch die größere oder geringere Ge-
windigkeit, mit welcher die Bewegung erfolgt, beurtheilt
rden. Daher nennt man den besondern Werth von $\frac{P}{M}$ die

schleunigende Kraft.

6. Wird ein Körper durch eine Kraft = Q so bewegt,
ß er in einer gewissen Zeit einen Raum = S durchläuft,
d es wirken zwei Kräfte, von welchen jede = Q, zu glei-
er Zeit in derselben Richtung auf denselben, so wird er durch
e vereinte Wirkung beider in der Zeiteinheit einen Raum
2S durchlaufen. Die in gleichen Zeiten durchlaufenen Räu-
e sind also den Kräften, durch welche sie erzeugt werden,
oportionirt. Dieses nun muß nothwendig auch bei beschleu-
genden Kräften der Fall sein. Ist hiernach $\frac{P}{M} = 1$, und
durch diese Kraft in einer gewissen Zeit von der Masse M

durchlaufene Raum = G, und ist nun $\frac{P'}{M'} = \alpha$, so wird der von der Masse M' in derselben Zeit durchlaufene Raum = αG sein müssen.

§. 89.
Aufgabe.

Bei einer gleichförmig veränderlichen Bewegung eines Körpers ist der in der ersten Secunde durchlaufene Raum = a, die hierdurch erzeugte Geschwindigkeit = b, und es durchläuft daher der Körper bei fortwährender Einwirkung der Kraft, nach §. 88. No. 2., in der zweiten Secunde einen Raum = a+b, in der dritten = a + 2b ꝛc. Man soll angeben, wie die Größen a und b von einander abhängen.

Auflösung. Es sei der in dem ersten Augenblicke durchlaufene Raum = α, und die dem Körper hierdurch ertheilte Geschwindigkeit = β, so sind die in den aufeinander folgenden n Augenblicken nach und nach durchlaufenen Räume

$$\alpha,\ \alpha+\beta,\ \alpha+2\beta,\ \alpha+3\beta\cdots\alpha+(n-1)\beta$$

die Summe dieser Reihe ist $= n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\beta$.

Besteht also die Secunde aus n Augenblicken, so ist dieses der in der ersten Secunde durchlaufene Raum, und es ist daher

$$a = n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\beta$$

In der zweiten Secunde werden nun in den aufeinander folgenden Augenblicken die Räume durchlaufen

$$\alpha+n\beta,\ \alpha+(n+1)\beta,\ \alpha+(n+2)\beta\cdots\alpha+(2n-1)\beta$$

deren Summe ist $= n\alpha + \frac{n(3n-1)}{n}\beta$.

Da nun der in der zweiten Secunde durchlaufene Raum = a + b ist, so folgt

$$a+b = n\alpha + \frac{n(3n-1)}{2}\beta$$

$$\text{aber } a = n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\beta$$

$$\text{es ist also } b = \frac{n(2n)}{2}\beta = n^2\beta$$

Nun ist aber nothwendig

$$\alpha > 0 \text{ und } \alpha < \beta$$

$$\text{und daher } a > \frac{n(n-1)}{2}\beta \text{ und } a < n\beta + \frac{n(n-1)}{2}\beta$$

$$\text{oder weil } n\beta + \frac{n(n-1)}{2}\beta = \frac{n(n+1)}{2}\beta$$

so ist für jeden noch so großen Werth von n doch immer

$$a > \frac{n(n-1)}{2}\beta$$

$$\text{und } a < \frac{n(n+1)}{2}\beta$$

$$\text{und hieraus folgt } a = \frac{n \cdot n}{2}\beta = \frac{n^2\beta}{2}$$

$$\text{Es ist also } b = n^2\beta \text{ und } a = \frac{n^2\beta}{2}$$

$$\text{und daher } b = 2a.$$

Die Geschwindigkeit des Körpers ist also am Ende der ersten Secunde so groß, daß er ohne fernere Einwirkung der Kraft in der zweiten Secunde, mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit einen zweimal so großen Raum als in der ersten Secunde durchlaufen würde.

Zusatz 1. Die, durch eine gleichförmig veränderliche Bewegung (in den von der ersten an, auf einander folgenden Secunden) durchlaufenen Räume sind in der

1sten 2ten 3ten 4ten···· tten Sec.

$$a,\quad a+b,\quad a+2b,\quad a+3b\cdots\cdot\ a+(t-1)b$$

oder da $b = 2a$, so sind diese Räume

$$a,\ 3a,\ 5a,\ 7a\cdots\cdot(2t-1)a$$

folglich ist der in t Secunden durchlaufene Raum

$$S = a+3a+5a+7a\cdots\cdot+(2t-1)a$$

$$= \frac{t[(2t-1)a+a]}{2} = \frac{t\cdot 2ta}{2} = t^2a.$$

Eben so ist der in einer andern Zeit t' durchlaufene Raum $S' = (t')^2a$, und es ist daher

$$S : S' = t^2 : (t')^2$$

die in verschiedenen Zeiten durchlaufenen Räume verhalten sich also wie die Quadrate der Zeiten.

Zusatz 2. Die erlangte Geschwindigkeit ist am Ende der

[illegible] = a, [illegible] = b, [illegible] = c

[illegible] = 2a, [illegible] = 2b, [illegible] = 2c

[illegible] alſo die am Ende der [illegible] Secunde [illegible]

[illegible] = c geſetzt, ſo iſt

$$c = 2a.$$

Anmerkung. [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible]

[illegible]

ß zugleich auch m = 0 sein, weil unter keiner andern
gung X = Y wird. Es ist folglich

$$0 = a - \tfrac{1}{2}b$$

und daher $\frac{1}{2}b = a$ und $b = 2a$.

§. 90.

Aufgaben von dem freien Falle der Körper.

Der Raum, welchen ein nahe an der Oberfläche der Erde
llender Körper in der ersten Secunde zurücklegt, ist durch
e Beobachtungen = 15,095 pariser oder 15,625 rhein-
che Fuß gefunden worden, und es wird dieser Raum all-
n mit g bezeichnet.

Aufgabe 1. Ein frei fallender Körper durchläuft in t
den einen Raum = S, nnd es ist die Geschwindigkeit
Ende dieser Zeit = v; man soll die Abhängigkeit dieser
n von einander bestimmen.

Auflösung. Diese Abhängigkeit ist bestimmt durch die
, §. 89. Zusatz 1. und 2., gefundenen Gleichungen

$$S = t^2a \text{ und } c = 2ta$$

man braucht hier nur g für a und v für c zu setzen:
rsuchten Gleichungen sind daher

$$1)\ S = t^2g \text{ und } 2)\ v = 2tg$$

Zusatz. Da g hier einen bestimmten Werth hat, so kom-
nur die drei veränderlichen Größen S, v und t vor, und
ssen sich je zwei derselben durch Rechnung finden, wenn
itte gegeben ist. Die beiden bereits aufgestellten Formeln
den Fall, wenn t bestimmt ist. Sollen für einen ge-
en Werth von S die entsprechenden Werthe von t und v
den werden, so erhält man durch Reduction

$$3)\ t = \sqrt{\frac{S}{g}} \text{ und } 4)\ v = 2g\sqrt{\frac{S}{g}} = 2\sqrt{Sg}$$

ber v gegeben, und soll man hieraus t und S bestim-
so ist

$$5)\ t = \frac{v}{2g} \text{ und } 6)\ S = \frac{v^2}{4g}$$

Aufgabe 2. Ein Körper wird mit einer anfänglichen
windigkeit = c vertikal gegen die Erde geworfen, es soll
eben werden, welchen Raum er hiernach in der Zeit t zu-

zurücklegen wird, und wie groß am Ende dieſer Zeit ſeine Geſchwindigkeit iſt.

Auflöſung. Der von einem frei fallenden Körper in der Zeit t zurückgelegte Raum iſt $= t^2g$, und der mit der anfänglichen Geſchwindigkeit $= c$, welche unverändert dieſelbe bleibt, in eben dieſer Zeit zurückgelegte Weg iſt $= ct$. Da nun beide Bewegungen nach einer und derſelben Richtung erfolgen, ſo iſt der ganze durchlaufene Raum

$$S = ct + gt^2$$

Die Geſchwindigkeit v aber beſteht aus c und der durch den Fall erlangten Geſchwindigkeit 2gt, folglich iſt

$$v = c + 2gt$$

Zuſatz. Die beiden Gleichungen

$$1)\ S = ct + gt^2 \text{ und } 2)\ v = c + 2gt$$

enthalten außer dem conſtanten g noch 4 Größen, von welchen je zwei durch die beiden übrigen gefunden werden, und es enthalten die Gleichungen 1. und 2. die Formeln für den Fall, wenn c und t gegeben ſind. Kennt man S und t, ſo iſt

$$3)\ c = \frac{S - gt^2}{t} \text{ und } 4)\ v = \frac{S - gt^2}{t} + 2gt = \frac{S + gt^2}{t}$$

Iſt v und t gegeben, ſo wird

$$5)\ c = v - 2gt \text{ und } 6)\ S = t(v - 2gt) + gt^2$$
$$= vt - gt^2 = t(v - gt)$$

Sind v und c die gegebenen Größen, ſo wird

$$7)\ t = \frac{v - c}{2g} \text{ und } 8)\ S = c\left(\frac{v - c}{2g}\right) + g\left(\frac{v - c}{2g}\right)^2.$$

Wenn S und c die gegebenen Größen ſind, ſo findet man

$$9)\ t = \frac{-c + \sqrt{(4Sg + c^2)}}{2g} \text{ und } 10)\ v = \sqrt{(4Sg + c^2)}$$

Sind endlich S und v gegeben, ſo wird erhalten

$$11)\ t = \frac{-v + \sqrt{(v^2 - 4gS)}}{2g}$$

$$\text{und } 12)\ c = \sqrt{(v^2 - 4gS)}$$

Aufgabe 3. Ein Körper wird mit einer Geſchwindigkeit $= c$ in einer der Schwere entgegengeſetzten Richtung bewegt; es ſoll der in dieſer Richtung von dem Körper in der

Zeit

Zeit t zurückgelegte Raum und seine Geschwindigkeit am Ende dieser Zeit angegeben werden.

Auflösung. Es wirkt hier die Schwere der Bewegung entgegen, und es ist daher der Werth von g negativ, sobald man, wie dieses hier der Fall ist, ermitteln will, welchen Raum der Körper in der Richtung durchläuft, in welcher er mit der anfänglichen Geschwindigkeit = c bewegt wird. Es ist aber, nach Aufgabe 2.,

$$S = ct + gt^2 \text{ und } v = c + 2gt$$

Wird in diesen beiden Formeln $-g$ statt g gesetzt, so erhält man die Formeln für den gegenwärtigen Fall, also

$$S = ct - gt^2 \text{ und } v = c - 2gt.$$

Zusatz 1. Da die Schwere der Bewegung des Körpers entgegen wirkt, und zwar mit zunehmender Geschwindigkeit, während c unverändert bleibt, so kann die Bewegung in der Richtung von c nur eine Zeit lang erfolgen, und sie folgt, später der Richtung der Schwere. Da

$$v = c - 2gt,$$

so ist die Geschwindigkeit in der der Schwere entgegengesetzten Richtung nur so lange positiv, so lange $c > 2gt$ ist. Für $c = 2gt$ wird $v = 0$, und der Körper hat seine höchste Höhe erreicht. Es ist dieses also der Fall für $\frac{c}{2g} = t$. Der durchlaufene Raum ist für diesen Werth von t

$$S = c \cdot \frac{c}{2g} - g\left(\frac{c}{2g}\right)^2 = \frac{c^2}{2g} - \frac{c^2}{4g} = \frac{c^2}{4g}$$

Für $c < 2gt$ wird die Geschwindigkeit negativ, und der Körper folgt alsdann der Richtung der Schwere.

Zusatz 2. Da

$$S = ct - gt^2 = t(c - gt)$$

so ist $S = 0$ einmal für $t = 0$, also gleich anfangs, und alsdann auch für

$$c - gt = 0, \text{ also für } t = \frac{c}{g}$$

Nach der Zeit $t = \frac{c}{g}$ ist der Körper daher wieder an demselben Ort, von wo aus seine Bewegung begann. Sucht man

den Werth von v, welcher der Zeit $t = \frac{c}{g}$ entspricht, so wird gefunden

$$v = c - 2gt = c - 2g\left(\frac{c}{g}\right) = c - 2c$$

$$\text{also } v = -c.$$

Hieraus folgt: Wird ein Körper mit einer gewissen Geschwindigkeit in einer der Schwere entgegengesetzten Richtung geworfen, so langt er mit derselben Geschwindigkeit wieder an den Ort, von welchem aus er geworfen worden ist. Er erreicht also durch c eine Höhe, die der gleich ist, von welcher er herabfallen muß, um durch dieses Fallen eben diese Geschwindigkeit zu erlangen.

Anmerkung. Aus den beiden Gleichungen

$$S = ct - gt^2 \text{ und } v = c - 2gt$$

lassen sich, eben so wie aus den Gleichungen Aufgabe 2., noch 10 andere Gleichungen ableiten, und es werden hier wie dort durch die 12 auf diese Weise gefundenen Formeln alle Fragen in Beziehung auf diesen Gegenstand beantwortet.

Aufgabe 4. Ein Körper K fällt von einem bestimmten Punkte aus, vermöge der Schwere, und ein Punkt A bewegt sich von eben diesem Punkte aus mit der gleichförmigen Geschwindigkeit = c, die Bewegungen beider beginnen zu gleicher Zeit; es soll die gegenseitige Lage derselben nach der Zeit t angegeben werden.

Auflösung. Der von K in der Zeit t durchlaufene Raum ist $= gt^2$, und der Raum, welchen A in eben dieser Zeit zurücklegt, ist $= ct$, folglich ist der Abstand beider von einander

$$D = ct - gt^2$$

und es eilt also A dem K voraus, so lange $ct > gt^2$, also $c > gt$ ist. Für $c = gt$ treffen beide zusammen, und später entfernen sie sich mehr und mehr von einander, so daß K dem A voraneilt.

Aufgabe 5. Der Körper K fällt vermöge der Schwere und der Punkt A bewegt sich mit der gleichförmigen Geschwindigkeit = c in einer der Schwere entgegengesetzten Richtung, aber mit K in derselben Linie. Der anfängliche Ab-

stand beider von einander ist = D, und sie beginnen ihre Bewegung zu gleicher Zeit; es soll die Zeit und der Ort angegeben werden, wann und wo beide zusammentreffen.

Auflösung. Während der Zeit t wird von K ein Raum zurückgelegt = gt^2, und der von A zurückgelegte Weg ist = ct. Sollen nun beide nach dieser Zeit zusammentreffen, so muß sein

$$gt^2 + ct = D$$

$$\text{und daher } t = \frac{-c + \sqrt{(4gD + c^2)}}{2g}$$

$$\text{folglich ist } ct = \frac{-c^2 + c\sqrt{(4gD + c^2)}}{2g}$$

der von A zurückgelegte Raum, wodurch also auch der Raum bestimmt ist, welchen K zurücklegt.

Aufgabe 6. Der Körper K fällt vermöge der Schwere, und der Punkt A bewegt sich in derselben Linie in entgegengesetzter Richtung mit der gleichförmigen Geschwindigkeit = c, beide beginnen ihre Bewegung zu gleicher Zeit; es soll ihr Abstand D von einander so bestimmt werden, daß beide auf dem halben Wege zusammentreffen.

Auflösung. Es muß sein

$$gt^2 = ct, \text{ also } t = \frac{c}{g}$$

$$\text{und daher } \frac{D}{2} = gt^2 = ct = \frac{c^2}{g}$$

$$\text{folglich } D = \frac{2c^2}{g}$$

Aufgabe 7. Der Körper A fällt vermöge der Schwere, und der Körper B wird mit der anfänglichen Geschwindigkeit = c in entgegengesetzter Richtung geworfen, beide beginnen ihre Bewegung zu gleicher Zeit, und ihr anfänglicher Abstand von einander ist = D; es soll Zeit und Ort angegeben werden, wann und wo beide zusammentreffen.

Auflösung. Der von A in der Zeit t zurückgelegte Weg ist = gt^2, und der Weg, welchen B in eben dieser Zeit durchläuft, ist, nach Aufgabe 3., = $ct - gt^2$. Sollen nun beide nach dieser Zeit zusammentreffen, so muß sein

$$gt^2 + (ct - gt^2) = D$$

$$\text{daher } t = \frac{D}{c}$$

und es ist der von A durchlaufene Raum $= gt^2 = \frac{gD^2}{c^2}$, und der Raum, welchen B durchlaufen hat, $= D - \frac{gD^2}{c^2}$.

Zusatz. Auch die Aufgabe: wie groß D sein muß, wenn A und B in der Mitte ihres Weges zusammentreffen sollen, läßt sich leicht lösen.

Aufgabe 8. Der Körper A fällt vermöge der Schwere von einer Höhe $= S$ herab, und der Körper B wird in eben dieser Richtung mit einer anfänglichen Geschwindigkeit $= c$ bewegt. Es soll der erforderliche Abstand beider von einander gefunden werden, damit sie in gleicher Zeit den Endpunkt von S erreichen.

Auflösung. A durchläuft den Raum S in der Zeit $t = \sqrt{\frac{S}{g}}$. Ist nun der Abstand des B von $A = x$, so muß B in derselben Zeit $= t$ den Raum $S + x$ durchlaufen, und es muß daher nach Aufgabe 2. sein

$$S + x = ct + gt^2$$

$$= c\sqrt{\frac{S}{g}} + S$$

$$\text{folglich } x = c\sqrt{\frac{S}{g}}$$

Aufgabe 9. Von dem Punkte m aus, Fig. 158, fällt der Körper K vermöge der Schwere, und ein Punkt A bewegt sich in der Richtung mn mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $= c$, beide beginnen ihre Bewegung zu gleicher Zeit; es soll der Abstand gefunden werden, welchen beide von einander nach der Zeit t haben werden.

Auflösung. Befindet sich zu gleicher Zeit K in k und A in a, so ist, da die zur Erreichung dieser Punkte erforderliche Zeit $= t$ ist,

$$(mk) = gt^2 \text{ und } (ma) = ct$$

wird also $\angle amk = m$ gesetzt, so ist

$$(ak)^2 = (ma)^2 + (mk)^2 - 2(ma)(mk)\cos m$$
$$= c^2t^2 + g^2t^4 - 2cgt^3\cos m$$
$$\text{und daher } (ak) = t\sqrt{(c^2 + g^2t^2 - 2cgt\cos m)}$$

Zusatz. Soll die Zeit gefunden werden, nach welcher e gleichweit von der Oberfläche der Erde abstehen, so muß n ein rechter Winkel sein, und es ist daher

$$(ma) : (mk) = 1 : \cos m$$
$$\text{also } ct : gt^2 = 1 : \cos m$$
$$\text{daher } c \cdot \cos m = gt$$
$$\text{und folglich } \frac{c \cdot \cos m}{g} = t$$

gesuchte Zeit.

Der in dieser Zeit von A zurückgelegte Weg ist $ct = \frac{c\cos m}{g}$, und der Weg, welchen K zurückgelegt hat, $= gt^2 = \frac{c\cos^2 m}{g}$.

§. 91.

gaben von der gleichförmig veränderlichen Bewegung überhaupt.

Aufgabe 1. Die unveränderliche Kraft P wirkt fortrend auf eine Masse = M; es soll der von M durch Kraft in der Zeit t zurückgelegte Weg, und die Geschwineit, welche M am Ende dieser Zeit haben wird, bestimmt den.

Auflösung. Es ist, nach §. 88. No. 5. und 6., die beunigende Kraft in dem gegenwärtigen Falle $= \frac{P}{M}$, während die beschleunigende Kraft der Schwere = 1 ist, und man lt daher die Proportion

$$1 : \frac{P}{M} = g : G$$

n der in der ersten Secunde zurückgelegte Weg = G gewird. Da sonach $G = \frac{Mg}{P}$, so braucht man nur diesen rth für a in den Formeln §. 89. Zusatz 1. und 2. zu setzen,

und es ist daher für den gegenwärtigen Fall

$$S = \left(\frac{aQ - bq}{aQ + bq}\right) gt^2 \text{ und } v = \left(\frac{aQ - bq}{aQ + bq}\right) \cdot 2gt$$

für die Bewegung von Q.

Für q ist nun der in derselben Zeit durchlaufene Raum $S' = \frac{b}{a} S$, und die dadurch erlangte Geschwindigkeit $v' = \frac{b}{a} v$.

Aufgabe 4. Auf einer horizontalen Fläche liegt ein Körper, dessen Masse = A ist, in dem Schwerpunkte desselben ist ein Faden angebracht, der mit der Fläche parallel über eine Rolle geht, und durch ein an dem andern Endpunkte dieses Fadens angebrachtes frei hängendes Gewicht = P gespannt wird; es sollen die Gesetze für die hieraus entstehende Bewegung angegeben werden, wenn man hierbei alle übrigen Hindernisse außer Acht läßt.

Auflösung. Da der Körper horizontal unterstützt ist, und auch während der Bewegung unterstützt bleibt, so leistet er derselben keinen Widerstand, und es ist daher P die bewegende Kraft. Es kann aber P nicht bewegt werden, ohne daß zugleich auch A mit derselben Geschwindigkeit bewegt wird, folglich ist die bewegte Masse = P + A, und es ist daher

$$S = \left(\frac{P}{P + A}\right) gt^2 \text{ und } V = \left(\frac{P}{P + A}\right) \cdot 2gt$$

Aufgabe 5. Die Gesetze der Bewegung sollen unter den Bedingungen der Aufgabe 4. angegeben werden, wenn bei derselben zugleich die Friction des Körpers A berücksichtigt wird.

Auflösung. Ist der Frictionscoefficient = μ, so widersteht A der Bewegung mit einer Kraft = μA, und es wird ein Theil = μA von P zur Ueberwindung dieses Widerstandes verwendet; die bewegende Kraft ist daher in diesem Falle = $P - \mu A$, während hier, wie bei Aufgabe 4., die bewegte Masse = P + A ist. Folglich wird

$$S = \left(\frac{P - \mu A}{P + A}\right) gt^2 \text{ und } V = \left(\frac{P - \mu A}{P + A}\right) \cdot 2gt.$$

Zusatz. Kennt man durch Versuche den in einer gewissen Zeit t durchlaufenen Raum S für ein gegebenes A und

P, so läßt sich hieraus der Frictionscoefficient berechnen, und zwar findet man

$$\mu A = P - \frac{(P+A)S}{gt^2}$$

$$\text{also } \mu = \frac{P}{A} - \frac{(P+A)S}{Agt^2}$$

§. 92.

Von dem Fall der Körper auf der geneigten Ebene.

Aufgabe 1. Es sollen die Gesetze für das Hinabgleiten eines Körpers von einer geneigten Ebene angegeben werden.

Auflösung. Ist, Fig. 66, der Schwerpunkt des Körpers in g und gP die Richtung der Schwere, so ist, wenn man das Gewicht des Körpers = P durch die Linie gp construirt, gx = x die bewegende Kraft desselben, und es ist, wenn man den Neigungswinkel der Ebene ba gegen den Horizont = β setzt,

$$gp : gx = ab : ac = 1 : \sin\beta$$

$$\text{also } P : X = 1 : \sin\beta, \text{ und daher } X = P\sin\beta$$

Folglich ist bei dem Falle auf der geneigten Ebene, wenn die Masse M des Körpers = P ist, die beschleunigende Kraft desselben $X = P\sin\beta$, und es ist daher, nach §. 91. Aufgabe 1.,

$$S = \frac{X}{P}gt^2 = \frac{P\sin\beta}{P}\cdot gt^2 = gt^2\sin\beta$$

$$\text{und } v = \frac{X}{P}\cdot 2gt = 2gt\sin\beta.$$

wodurch die Gesetze für den Fall auf der geneigten Ebene bestimmt sind.

Aufgabe 2. Die Länge einer geneigten Ebene ist ab = S Fig. 66, und die Höhe derselben ac = h; es soll angegeben werden, wie die Geschwindigkeit eines von a bis b in der geneigten Ebene herabgefallenen Körpers zu der Geschwindigkeit des Körpers sich verhält, der von a frei herunter bis c gefallen ist.

Auflösung. Setzt man die Geschwindigkeit des von a bis b gefallenen Körpers = v′, und des von a bis c gefallenen = v″, so ist, nach Aufgabe 1.,

$$v' = 2gt\sin\beta \text{ und } t = \sqrt{\frac{S}{g\sin\beta}}$$

$$\text{alſo } v' = 2g\sin\beta\sqrt{\frac{S}{g\sin\beta}} = 2\sqrt{Sg\sin\beta}$$

und weil $S : h = 1 : \sin\beta$, alſo $S\sin\beta = h$

$$\text{ſo iſt } v' = 2\sqrt{hg}.$$

Nach §. 90. Aufgabe 1. Zuſatz Formel No. 4. iſt aber für die Höhe $ac = h$ auch $v'' = 2\sqrt{hg}$.

folglich iſt $v' = v''$.

Zuſatz. Bei dem Falle eines Körpers auf einer geneigten Ebene hat derſelbe alſo in jedem Punkte ſeiner Bahn dieſelbe Geſchwindigkeit, die er durch den freien Fall von einer Höhe herab erlangt, welche zu dem durchlaufenen Theil der Bahn gehört. Wenn daher zwei Körper von einem und demſelben Punkte aus auf verſchiedene Ebenen herabfallen, ſo haben alle, indem ſie gleich viel dem Horizonte ſich genähert haben, gleiche Geſchwindigkeiten.

Aufgabe 3. Es ſoll die Höhe $xb = X$, Fig. 161, angegeben werden, von welcher ein Körper in derſelben Zeit herabfällt, in welcher er auf der geneigten Ebene von a bis b gelangt.

Auflöſung. Für $ab = S$ iſt, nach Aufgabe 1.,

$$S = gt^2\sin\beta, \text{ alſo } t = \sqrt{\frac{S}{g\sin\beta}}$$

und für den freien Fall durch einen Raum $= X$ iſt $X = gt^2$, und daher, wenn man für t den ſo eben gefundenen Werth ſetzt,

$$X = g\left(\sqrt{\frac{S}{g\sin\beta}}\right)^2 = \frac{S}{\sin\beta}$$

und es iſt ſonach $X\sin\beta = S$ oder $S = X\cos\alpha$

folglich findet die Proportion ſtatt

$$X : S = 1 : \cos\alpha$$

$$\text{alſo } (bx) : (ba) = 1 : \cos\alpha$$

und es iſt daher, wenn man ax zieht, bax ein rechtwinkliges Dreieck.

Der Punkt x, von welchem der Körper durch freien Fall in derſelben Zeit bis b gelangt, in welcher er in der geneigten Ebene von a bis b herabfällt, wird alſo gefunden, wenn

o läßt ſich hieraus der Frictionscoefficient berechnen, und
findet man

$$\mu A = P - \frac{(P+A)S}{gt^2}$$

$$\text{alſo } \mu = \frac{P}{A} - \frac{(P+A)S}{Agt^2}$$

§. 92.

Von dem Fall der Körper auf der geneigten Ebene.

Aufgabe 1. Es ſollen die Geſetze für das Hinabgleiten
s Körpers von einer geneigten Ebene angegeben werden.

Auflöſung. Iſt, Fig. 66, der Schwerpunkt des Kör-
s in g und gP die Richtung der Schwere, ſo iſt, wenn
n das Gewicht des Körpers = P durch die Linie gp con-
irt, gx = x die bewegende Kraft deſſelben, und es iſt,
nn man den Neigungswinkel der Ebene ba gegen den Ho-
nt = β ſetzt,

$$gp : gx = ab : ac = 1 : \sin\beta$$

alſo $P : X = 1 : \sin\beta$, und daher $X = P\sin\beta$

glich iſt bei dem Falle auf der geneigten Ebene, wenn die
aſſe M des Körpers = P iſt, die beſchleunigende Kraft deſ-
en $X = P\sin\beta$, und es iſt daher, nach §. 91. Aufgabe 1.,

$$S = \frac{X}{P}gt^2 = \frac{P\sin\beta}{P}\cdot gt^2 = gt^2\sin\beta$$

$$\text{und } v = \frac{X}{P}\cdot 2gt = 2gt\sin\beta.$$

urch die Geſetze für den Fall auf der geneigten Ebene be-
mt ſind.

Aufgabe 2. Die Länge einer geneigten Ebene iſt ab = S
. 66, und die Höhe derſelben ac = h; es ſoll angegeben
den, wie die Geſchwindigkeit eines von a bis b in der ge-
ten Ebene herabgefallenen Körpers zu der Geſchwindigkeit
Körpers ſich verhält, der von a frei herunter bis c ge-
en iſt.

Auflöſung. Setzt man die Geſchwindigkeit des von a
b gefallenen Körpers = v′, und des von a bis c gefal-
n = v″, ſo iſt, nach Aufgabe 1.,

der Richtung ba mit der Kraft $X = Q - P\sin\beta$. Die bewegte Maſſe M aber iſt $M = Q + P$, und daher der in der Zeit t durchlaufene Raum

$$S = \left(\frac{Q - P\sin\beta}{Q + P}\right)gt^2.$$

Die Geſchwindigkeit am Ende der Zeit t iſt

$$v = \left(\frac{Q - P\sin\beta}{Q + P}\right)\cdot 2gt$$

Zuſatz. Soll hierbei auch die Friction $= \mu P\cos\beta$ berückſichtigt werden, ſo wird die beſchleunigende Kraft $= Q - P\sin\beta - \mu P\cos\beta$, während die Maſſe $= Q + P$ bleibt.

Aufgabe 6. Es ſoll für eine gegebene Höhe der geneigten Ebene $ac = h$ die Zeit t beſtimmt werden, in welcher der Körper P durch das Gewicht Q von b bis a ſteigt.

Auflöſung. Es iſt $ab : ac = 1 : \sin\beta$

$$\text{alſo } S : h = 1 : \sin\beta \text{ und } S = \frac{h}{\sin\beta}.$$

Wird dieſer Werth für S in der Gleichung, Aufgabe 5., geſetzt, ſo erhält man

$$\frac{h}{\sin\beta} = \left(\frac{Q - P\sin\beta}{Q + P}\right)gt^2$$

und es iſt hiernach

$$t = \sqrt{\left[\frac{h(Q + P)}{g(Q\sin\beta - P\sin^2\beta}\right]}$$

Aufgabe 7. Man ſoll die Bedingungen auffinden, unter welchen der Körper P durch das Gewicht in der möglichſt kürzeſten Zeit auf einer geneigten Ebene zu der Höhe $ca = h$ gehoben wird.

Auflöſung. Da, nach Aufgabe 6.,

$$t = \sqrt{\left[\frac{h(Q + P)}{g(Q\sin\beta - P\sin^2\beta)}\right]}$$

ſo erhält t den möglichſt kleinſten Werth für den Fall, wenn der Nenner $Q\sin\beta - P\sin^2\beta$ möglichſt groß wird. Setzt man dieſen möglichſt größten Werth $= M$, ſo iſt

$$Q\sin\beta - P\sin^2\beta = M$$

und hieraus folgt

$$\sin^2\beta - \frac{Q}{P}\sin\beta + \left(\frac{Q}{2P}\right)^2 = \frac{Q^2}{4P^2} - \frac{M}{P}$$

in a auf ab eine Normale errichtet und so weit verlän-
bis sie die Senkrechte auf dem Horizonte mn trifft.

Zusatz. Da das Dreieck bax rechtwinklig ist, so liegt
dem Umfange des Kreises, von welchem bx der Durch-
r ist, und es ist nun auch, wenn von irgend einem an-
Punkte α' des Umfanges α'b und α'x gezogen wer-
Δ bα'x rechtwinklig; daher wird die geneigte Ebene α'b
erselben Zeit durchlaufen, in welcher ein Körper frei von
s b herabfällt. Hieraus folgt: Alle Sehnen eines Krei-
die von demselben Punkte b des Horizontes ausgehen,
en in einer und derselben Zeit durchlaufen.

Aufgabe 4. Es sollen die Gesetze für das Hinabglei-
eines Körpers auf einer geneigten Ebene unter der Be-
ung angegeben werden, daß hierbei auch die Friction des
ers berücksichtigt wird.

Auflösung. Es ist die beschleunigende Kraft X, nach
abe 1., $= P\sin\beta$, und der normale Druck ist, nach
2., $= P\cos\beta$, also ist für den Frictionscoefficient $= \mu$,
Friction $= \mu P\cos\beta$. Ein dieser Friction gleicher Theil
von der Kraft $P\sin\beta$ verwendet, um fortwährend die
ion zu überwinden, es bleibt also bloß für die Bewegung
Kraft $= P\sin\beta - \mu P\cos\beta$. Die bewegte Masse aber
$= P$, folglich wird

$$S = \left(\frac{P\sin\beta - \mu P\cos\beta}{P}\right)gt^2 = (\sin\beta - \mu\cos\beta)gt^2$$

$$\text{und } v = (\sin\beta - \mu\cos\beta)2gt.$$

ch diese Gleichungen sind die Gesetze für den Fall eines Kör-
auf der geneigten Ebene, mit Rücksicht auf die Friction,
mmt.

Aufgabe 5. An einem auf der geneigten Ebene ab,
162, befindlichen Körper ist ein Faden angebracht, wel-
parallel mit ab über eine Rolle r geht, und an dessen
rm Ende ein frei hängendes Gewicht Q sich befindet,
urch P in der Richtung ba bewegt wird. Es sollen die
etze für diese Bewegung angegeben werden.

Auflösung. Der Körper P hat eine bewegende Kraft
$P\sin\beta$ in der Richtung ab, welche durch Q aufgehoben
den muß, und es erfolgt daher die wirkliche Bewegung in

geneigten Ebene = S', und bei derselben Höhe h die Länge der geneigten Ebene für den Neigungswinkel β = S'', so ist

$$S' : h = 1 : \sin\gamma, \text{ also } S' = \frac{h}{\sin\gamma}$$

$$S'' : h = 1 : \sin\beta, \text{ also } S'' = \frac{h}{\sin\beta}$$

Da nun $\sin\beta = \frac{1}{2}\sin\gamma$, so ist $S'' = \frac{2h}{\sin\gamma}$

und es ist daher $S'' = 2S'$

Wenn also Q mit P auf einer geneigten Ebene im Gleichgewicht ist, und man macht, mit Beibehaltung der Höhe, die Länge der geneigten Ebene zweimal so groß, so wird P durch Q in der möglichst kürzesten Zeit zu der Höhe h gehoben.

§. 93.

Von der Bewegung geworfener Körper.

Aufgabe 1. Ein Körper wird mit der anfänglichen Geschwindigkeit = c in der Richtung mn, Fig. 163, welche mit der Horizontalen mk einen Winkel nmk = γ bildet, geworfen, und wird durch die Schwere fortwährend von seiner Richtung abgelenkt und hierdurch genöthigt, die Bahn m$\alpha\beta$k zu durchlaufen; es soll die Gleichung für diese Bahn gefunden werden, wenn man hierbei kein Hinderniß der Bewegung berücksichtigt.

Auflösung. Durch die bloße Wirkung der anfänglichen Geschwindigkeit c durchlaufe der Körper in der Zeit t den Raum mA, und in der Zeit T den Raum mB; durch die Einwirkung der Schwere aber durchlaufe er in der Zeit t den Raum ma, und in der Zeit T den Raum mb, so ist er, wenn man die Parallelogramme mAαa und mBβb vollendet, am Ende der Zeit t in α und am Ende der Zeit T in β, und es sind daher α und β Punkte der Bahn, welche der Körper durch die gleichzeitige Einwirkung beider Kräfte durchlaufen muß. Es ist aber

$$mA = a\alpha = ct; \quad mB = b\beta = cT$$

$$\text{daher } a\alpha : b\beta = ct : cT = t : T$$

$$\text{und folglich } (a\alpha)^2 : (b\beta)^2 = t^2 : T^2$$

$$\text{also } \sin\beta = \frac{Q}{2P} \pm \sqrt{\left[\frac{Q^2}{4P^2} - \frac{M}{P}\right]}$$

n M den möglichſt größten Werth haben ſoll, und M
rößer als $\frac{Q^2}{4P}$ werden kann, wenn $\sin\beta$ reel bleiben
iſt dieſer größte Werth von $M = \frac{Q^2}{4P}$ und hieraus

$$\sin\beta = \frac{Q}{2P}$$

chen Werth von $\sin\beta$ der Werth von t am möglichſt
werden muß, und man findet für dieſen Werth von

$$t = \sqrt{\left(\frac{4hP(Q+P)}{gQ^2}\right)}$$

ufatz. Der Werth von $\sin\beta$, für welchen $Q\sin\beta -$
ein Größtes wird, läßt ſich durch Differentialrechnung
gende Art finden: Es muß ſein

$$d(Q\sin\beta - P\sin^2\beta) = 0$$

$$Q\cos\beta d\beta - 2P\sin\beta\cos\beta = 0$$

$$\text{und daher } Q = 2P\sin\beta$$

$$\text{folglich } \frac{Q}{2P} = \sin\beta$$

ufgabe 8. Man kennt den Neigungswinkel γ der
n Ebene, für welchen, Fig. 162, Q mit P im Gleich-
iſt; es ſoll für dieſelbe Höhe ac = h der Neigungs-
β gefunden werden, bei welchem P durch Q in der
ſt kürzeſten Zeit zu der Höhe = h gehoben wird.
uflöſung. Für das Gleichgewicht iſt, nach §. 43.
2.,

$$Q = P\sin\gamma$$

nan dieſen Werth in dem Ausdrucke Aufgabe 7.

$$\sin\beta = \frac{Q}{2P}$$

erhalten

$$\sin\beta = \tfrac{1}{2}\sin\gamma.$$

ufatz. Iſt für die Neigungswinkel γ die Länge der

Wenn mB durchlaufen wird, = t, ſo iſt mB = ct und Bβ = gt^2. Es iſt aber

$$mB : mx = 1 : \cos\gamma$$

$$\text{alſo } ct : x = 1 : \cos\gamma, \text{ alſo } t = \frac{x}{c\cos\gamma}$$

ferner iſt $mB : Bx = 1 : \sin\gamma$

alſo $ct : Bx = 1 : \sin\gamma$ und $(Bx) = ct\sin\gamma$

Da nun $x\beta = Bx - B\beta$

ſo iſt auch $y = ct\sin\gamma - gt^2$

und daher, wenn man für t den Werth $= \frac{x}{c\cos\gamma}$ ſetzt,

$$y = \frac{x\sin\gamma}{\cos\gamma} - g\cdot\frac{x^2}{c^2\cos^2\gamma}$$

$$= \frac{c^2x\sin\gamma\cos\gamma - gx^2}{c^2\cos^2\gamma} = \frac{\frac{1}{2}c^2x\sin 2\gamma - gx^2}{c^2\cos^2\gamma}$$

und weil $\cos^2\gamma = \frac{1+\cos 2\gamma}{2}$, ſo iſt endlich

$$y = \frac{c^2x\sin 2\gamma - 2gx^2}{c^2(1+\cos 2\gamma)}$$

die geſuchte Gleichung.

Aufgabe 3. Es ſoll angegeben werden, wie von der Abſciſſe $mx = x$ die Zeit abhängt, in welcher der geworfene Körper den zu dieſer Abſciſſe gehörigen Punkt β der Bahn erreicht, und wie groß die Geſchwindigkeit des Körpers in dem Punkt β iſt.

Auflöſung. Es iſt, wie in der vorigen Aufgabe,

$$mB : mx = 1 : \cos\gamma$$

$$\text{alſo } ct : x = 1 : \cos\gamma, \text{ und daher } t = \frac{x}{c\cdot\cos\gamma}$$

die Zeit, in welcher der Körper den Punkt β ſeiner Bahn erreicht.

Nun iſt die Geſchwindigkeit in β nach der Richtung βx

$$= 2gt = 2g\cdot\frac{x}{c\cos\gamma} = \frac{2gx}{c\cos\gamma} = w$$

und die Geſchwindigkeit in der Richtung $b\beta = c$

Die geſuchte Geſchwindigkeit v iſt alſo die Diagonale des hierdurch beſtimmten Parallelogramms, Fig. 163a., und es iſt

$\angle\varphi = \angle b\beta x = 90^0 - \gamma$, also $\cos\varphi = \sin\gamma$. Hiernach erhält man

$$v^2 = w^2 + c^2 - 2wc\cos\varphi$$

$$= \left(\frac{2gx}{c\cos\gamma}\right)^2 + c^2 - 2\cdot\frac{2gx}{c\cos\gamma}\cdot c\sin\gamma$$

$$\text{also } v^2 = \frac{4g^2x^2}{c^2\cos^2\gamma} + c^2 - \frac{4gx\sin\gamma}{\cos\gamma}$$

$$= \frac{4g^2x^2 + c^4\cos^2\gamma - 4c^2gx\sin\gamma\cos\gamma}{c^2\cos^2\gamma}$$

$$= \frac{4g^2x^2 + c^4\cos^2\gamma - 2c^2gx\sin 2\gamma}{c^2\cos^2\gamma}$$

und es ist daher die gesuchte Geschwindigkeit

$$v = \frac{\sqrt{(4g^2x^2 + c^4\cos^2\gamma - 2c^2gx\sin 2\gamma)}}{c\cos\gamma}$$

Aufgabe 4. Aus der gegebenen anfänglichen Geschwindigkeit = c und dem Richtungswinkel kmn = γ, Fig. 163, soll die Wurfweite mk gefunden werden; es soll also der Punkt k bestimmt werden, in welchem der geworfene Körper die Horizontale des Punktes m trifft.

Auflösung. Für die Abscisse mk = x, ist die Ordinate y = 0; setzt man also in der Gleichung der Bahn, Aufgabe 2., die Ordinate y = 0, und sucht hieraus den Werth von x, so giebt dieser die gesuchte Wurfweite. Es ist also

$$0 = \frac{c^2x\sin 2\gamma - 2gx^2}{c^2(1+\cos 2\gamma)}$$

$$\text{also } 2gx = c^2\sin 2\gamma$$

$$\text{und daher } x = \frac{c^2\sin 2\gamma}{2g}$$

die gesuchte Wurfweite.

Zusatz. Ist für dieselbe anfängliche Geschwindigkeit der Richtungswinkel = φ und die entsprechende Wurfweite = w'', so wird

$$w'' = \frac{c^2\sin 2\varphi}{2g}$$

Da nun, wenn für den Richtungswinkel γ die Wurfweite mit w' bezeichnet wird,

$$w' = \frac{c^2\sin 2\gamma}{2g}$$

ſo folgt

$$w' : w'' = \sin 2\gamma : \sin 2\varphi$$

Die Wurfweiten verhalten ſich alſo wie die Sinus der doppelten Richtungswinkel.

Für $\varphi = 90 - \gamma$ iſt $\sin 2\varphi = \sin(180 - 2\gamma) = \sin 2\gamma$, und daher für dieſen Werth von φ

$$w' = w''$$

Zwei verſchiedene Richtungswinkel, die ſich zu 90° ergänzen, geben alſo dieſelbe Wurfweite.

Aufgabe 5. Es ſoll der Richtungswinkel gefunden werden, welcher für eine beſtimmte anfängliche Geſchwindigkeit $= c$, die möglichſt größte Wurfweite giebt.

Auflöſung. Der Ausdruck $w = \frac{c^2 \sin 2\gamma}{2g}$ erhält den größten Werth, wenn $\sin 2\gamma$ am größten wird, wenn alſo $\sin 2\gamma = 1$ iſt, und ſonach $2\gamma = 90°$, folglich $\gamma = 45°$. Die möglichſt größte Wurfweite erhält man alſo für einen Richtungswinkel von 45°.

Zuſatz. Für $2\gamma = 30°$ iſt $\sin 2\gamma = \sin 30° = \frac{1}{2}$, folglich iſt die Wurfweite für einen Richtungswinkel von 15°, und alſo auch für einen ſolchen von 75° der Hälfte der größten Wurfweite gleich.

Aufgabe 6. Es iſt der Punkt β, Fig. 163, gegeben, man kennt alſo die Abſciſſe $mx = a$ und die dazu gehörige Ordinate $x\beta = b$; es ſoll der Richtungswinkel γ gefunden werden, unter welchem der Wurf erfolgen muß, wenn die Bahn durch den Punkt β gehen ſoll.

Auflöſung. Wird $x = a$ und $y = b$ in der Gleichung der Bahn, Aufgabe 2., geſetzt, alſo in der Gleichung

$$y = \frac{c^2 x \sin 2\gamma - 2gx^2}{c^2(1 + \cos 2\gamma)}$$

$$\text{ſo wird } b = \frac{c^2 a \sin 2\gamma - 2ga^2}{c^2(1 + \cos 2\gamma)}$$

$$\text{und daher } c^2 b + c^2 b \cos 2\gamma = c^2 a \sin 2\gamma - 2ga^2$$

$$\text{hiernach iſt } \cos 2\gamma - \frac{a}{b} \sin 2\gamma = \frac{-2ga^2 - c^2 b}{c^2 b}$$

und daher, wenn man $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \psi}{\cos \psi}$ ſetzt,

$\varphi = \angle b\beta x = 90^0 - \gamma$, alſo $\cos\varphi = \sin\gamma$. Hiernach er-
t man

$$v^2 = w^2 + c^2 - 2wc\cos\varphi$$

$$= \left(\frac{2gx}{c\cos\gamma}\right)^2 + c^2 - 2\cdot\frac{2gx}{c\cos\gamma}\cdot c\sin\gamma$$

$$\text{alſo } v^2 = \frac{4g^2x^2}{c^2\cos^2\gamma} + c^2 - \frac{4gx\sin\gamma}{\cos\gamma}$$

$$= \frac{4g^2x^2 + c^4\cos^2\gamma - 4c^2gx\sin\gamma\cos\gamma}{c^2\cos^2\gamma}$$

$$= \frac{4g^2x^2 + c^4\cos^2\gamma - 2c^2gx\sin 2\gamma}{c^2\cos^2\gamma}$$

b es iſt daher die geſuchte Geſchwindigkeit

$$v = \frac{\sqrt{(4g^2x^2 + c^4\cos^2\gamma - 2c^2gx\sin 2\gamma)}}{c\cos\gamma}$$

Aufgabe 4. Aus der gegebenen anfänglichen Geſchwin-
keit = c und dem Richtungswinkel kmn = γ, Fig. 163,
die Wurfweite mk gefunden werden; es ſoll alſo der Punkt
beſtimmt werden, in welchem der geworfene Körper die Ho-
ntale des Punktes m trifft.

Auflöſung. Für die Abſciſſe mk = x, iſt die Ordinate
=0; ſetzt man alſo in der Gleichung der Bahn, Aufgabe 2.,
Ordinate y = 0, und ſucht hieraus den Werth von x, ſo
bt dieſer die geſuchte Wurfweite. Es iſt alſo

$$0 = \frac{c^2x\sin 2\gamma - 2gx^2}{c^2(1+\cos 2\gamma)}$$

$$\text{alſo } 2gx = c^2\sin 2\gamma$$

$$\text{und daher } x = \frac{c^2\sin 2\gamma}{2g}$$

geſuchte Wurfweite.

Zuſatz. Iſt für dieſelbe anfängliche Geſchwindigkeit der
chtungswinkel = φ und die entſprechende Wurfweite = w'',
wird

$$w'' = \frac{c^2\sin 2\varphi}{2g}$$

n nun, wenn für den Richtungswinkel γ die Wurfweite mit
' bezeichnet wird,

$$w' = \frac{c^2\sin 2\gamma}{2g}$$

so daß man für jeden dieser Punkte die Coordinaten für die Abscissenlinie mk kennt, und zwar ist für α die Abscisse $= a$ und die Ordinate $= \beta$, und für den zweiten Punkt β sind a und b die Coordinaten; es soll die erforderliche anfängliche Geschwindigkeit c und der Richtungswinkel γ gefunden werden, so daß die Bahn des geworfenen Körpers durch beide Punkte geht.

Auflösung. Die Gleichung für die Bahn ist

$$y = \frac{c^2 x \sin 2\gamma - 2gx^2}{c^2(1+\cos 2\gamma)}$$

woraus folgt $c^2 = \frac{2gx^2}{x\sin 2\gamma - y(1+\cos 2\gamma)}$

Setzt man nun hier einmal $x = \alpha$, $y = \beta$ und alsdann auch $x = a$ und $y = b$, so erhält man zwei verschiedene Werthe für c^2, die einander gleich gesetzt, die Gleichung geben

$$\frac{2g\alpha^2}{\alpha\sin 2\gamma - \beta(1+\cos 2\gamma)} = \frac{2ga^2}{a\sin 2\gamma - b(1+\cos 2\gamma)}$$

und es ist sonach

$$a\alpha^2\sin 2\gamma - b\alpha^2(1+\cos 2\gamma) = \alpha a^2\sin 2\gamma - \beta a^2(1+\cos 2\gamma)$$

und $a\alpha(\alpha-a)\sin 2\gamma - (b\alpha^2 - \beta a^2)\cos 2\gamma = b\alpha^2 - \beta a^2$

und daher auch

$$\frac{a\alpha(\alpha-a)}{b\alpha^2-\beta a^2}\cdot\sin 2\gamma - \cos 2\gamma = 1$$

Setzt man nun $\frac{a\alpha(\alpha-a)}{b\alpha^2-\beta a^2} = \cot\psi = \frac{\cos\psi}{\sin\psi}$

so wird $\frac{\cos\psi}{\sin\psi}\sin 2\gamma - \cos 2\gamma = 1$

also $\sin 2\gamma\cos\psi - \cos 2\gamma\sin\psi = \sin\psi$

und $\sin(2\gamma-\psi) = \sin\psi$

daher $2\gamma - \psi = \psi$, also $\gamma = \psi$

folglich ist $\cot\gamma = \frac{a\alpha(\alpha-a)}{b\alpha^2-\beta a^2}$

Hierdurch ist der Winkel γ bestimmt, und es läßt sich nun der Werth von c durch die Gleichung finden

$$c^2 = \frac{2ga^2}{a\sin 2\gamma - b(1+\cos 2\gamma)}$$

Aufgabe 9. Ein Körper wird in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit c geworfen; es soll die Entfernung

angegeben werden, in welcher derselbe eine bestimmte Abweichung = b von dem Horizonte haben wird.

Auflösung. Setzt man in der Gleichung der Bahn

$$y = \frac{c^2 x \sin 2\gamma - 2gx^2}{c^2(1+\cos 2\gamma)}$$

$y = -b$, weil die Abweichung negativ ist, und $\gamma = 0$, so wird, da $\sin 0^0 = 0$ und $\cos 0^0 = 1$,

$$-b = \frac{-2gx^2}{c^2 \cdot 2} = -\frac{gx^2}{c^2}$$

und daher $x^2 = \frac{bc^2}{g}$, also $x = c\sqrt{\frac{b}{g}}$

Aufgabe 10. Es soll die Geschwindigkeit angegeben werden, mit welcher ein unter dem Richtungswinkel γ geworfener Körper den Horizont treffen wird.

Auflösung. Die Gleichung für die Geschwindigkeit v ist, nach Aufgabe 3.,

$$v^2 = \frac{4g^2x^2 + c^4\cos^2\gamma - 2c^2gx\sin 2\gamma}{c^2\cos^2\gamma}$$

und die Wurfweite $x = \frac{c^2 \sin 2\gamma}{2g}$ nach Aufgabe 4.

Setzt man diesen Werth für x, so wird

$$c^2v^2\cos^2\gamma = 4g^2\left(\frac{c^2\sin 2\gamma}{2g}\right)^2 + c^4\cos^2\gamma - 2c^2g\left(\frac{c^2\sin 2\gamma}{2g}\right)\sin 2\gamma$$
$$= c^4\sin^2 2\gamma + c^4\cos^2\gamma - c^4\sin^2 2\gamma.$$

Es ist also

$$c^2v^2\cos^2\gamma = c^4\cos^2\gamma$$

und daher $v = c$

Der geworfene Körper erreicht also den Horizont mit derselben Geschwindigkeit, mit welcher er anfänglich geworfen wird.

Aufgabe 11. Es soll die Geschwindigkeit angegeben werden, welche der geworfene Körper in dem höchsten Punkte seiner Bahn haben wird.

Auflösung. Da die Wurfweite $= \frac{c^2\sin 2\gamma}{2g}$, so erreicht der Körper den höchsten Punkt seiner Bahn für $x = \frac{c^2\sin 2\gamma}{4g}$ und setzt man diesen Werth in der Gleichung für die Geschwindigkeit, Aufgabe 3.,

$$c^2v^2\cos^2\gamma = 4g^2x^2 + c^4\cos^2\gamma - 2c^2gx\sin 2\gamma$$

ſo wird

$$c^2v^2\cos^2\gamma = 4g^2\cdot\frac{c^4\sin^2 2\gamma}{16g^2} + c^4\cos^2\gamma - 2c^2g\cdot\frac{c^2\sin 2\gamma}{4g}\cdot\sin 2\gamma$$

alſo $$c^2v^2\cos^2\gamma = \frac{c^4\sin^2 2\gamma}{4} + c^4\cos^2\gamma - \frac{c^4\sin^2 2\gamma}{2}$$

$$\text{und } v^2\cos^2\gamma = c^2\cos^2\gamma - \frac{c^2\sin^2 2\gamma}{4}$$

und weil $\sin 2\gamma = 2\sin\gamma\cos\gamma$, ſo iſt

$$v^2\cos^2\gamma = c^2\cos^2\gamma - c^2\sin^2\gamma\cos^2\gamma$$

folglich iſt $v^2 = c^2 - c^2\sin^2\gamma = c^2(1-\sin^2\gamma)$

und $v^2 = c^2\cos^2\gamma$, alſo $v = c\cos\gamma$

die geſuchte Geſchwindigkeit.

Aufgabe 12. Es ſoll die Richtung, welche der geworfene Körper in dem Punkte β ſeiner Bahn haben wird, beſtimmt werden.

Auflöſung. Setzt man den Winkel, welchen die Richtung des Körpers mit der Vertikalen bildet, alſo den Winkel, welchen v mit w macht, Fig. 163a., $= \psi$, ſo iſt

$$v : c = \sin\varphi : \sin\psi$$

und es iſt $\sin\varphi = \cos\gamma$

folglich iſt $$\sin\psi = \frac{c\cos\gamma}{v}$$

alſo, wenn für v der Werth aus Aufgabe 3. geſetzt wird,

$$\sin\psi = \frac{c^2\cos^2\gamma}{\sqrt{[4g^2x^2 + c^4\cos^2\gamma - 2c^2gx\sin 2\gamma]}}$$

Zuſatz. Für $x=0$ ſowohl, als auch für $x=\frac{c^2\sin 2\gamma}{2g}$, welches die ganze Wurfweite iſt, wird $v = c$, und es iſt daher für beide Fälle

$$\sin\psi = \cos\gamma$$

und daher $\psi = 90 - \gamma$

Für den höchſten Punkt der Bahn wird $v = c\cos\gamma$, folglich iſt für dieſen Punkt

$$\sin\psi = \frac{c\cos\gamma}{v} = \frac{c\cos\gamma}{c\cos\gamma} = 1$$

und daher $\psi = 90°$.

Aufgabe 13. Es ſoll der erforderliche anfängliche Rich-

tungswinkel $= \gamma$ beſtimmt werden, damit der geworfene Körper in einer gegebenen Entfernung eine beſtimmte Richtung $= \psi$ erhalte.

Auflöſung. Nach Aufgabe 12. iſt

$$\sin^2\psi = \frac{c^4\cos^2\gamma}{4g^2x^2 + c^4\cos^2\gamma - 2c^2gx\sin 2\gamma}$$

und es iſt ſonach

$$4g^2x^2\sin^2\psi = c^4\cos^2\gamma - c^4\sin^2\psi\cos^2\gamma + 2c^2gx\sin^2\psi\sin 2\gamma$$
$$= c^4\cos^2\psi\cos^2\gamma + 2c^2gx\sin^2\psi\sin 2\gamma$$

und da $\cos^2\gamma = \frac{1+\cos 2\gamma}{2}$, ſo wird

$$4g^2x^2\sin^2\psi = c^4\cos^2\psi\left(\frac{1+\cos 2\gamma}{2}\right) + 2c^2gx\sin^2\psi\sin 2\gamma$$

und $8g^2x^2\sin^2\psi - c^4\cos^2\psi = c^3\cos^2\psi\cos 2\gamma$
$$+ 4c^2gx\sin^2\psi\sin 2\gamma$$

und daher iſt nun

$$\frac{8g^2x^2\sin^2\psi - c^4\cos^2\psi}{c^2\cos^2\psi} = \cos 2\gamma + 4gx\,\mathrm{tg}^2\psi\cdot\sin 2\gamma$$

und, wenn $4gx\,\mathrm{tg}^2\psi = \mathrm{tg}\varphi$ geſetzt wird,

$$\frac{8g^2x^2}{c^2}\mathrm{tg}^2\psi - c^2 = \cos 2\gamma + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin 2\gamma$$

folglich

$$\left(\frac{8g^2x^2}{c^2}\cdot\mathrm{tg}^2\psi - c^2\right)\cos\varphi = \cos 2\gamma\cos\varphi + \sin 2\gamma\sin\varphi$$
$$= \cos(2\gamma - \varphi)$$

wodurch der geſuchte Richtungswinkel γ beſtimmt iſt.

$$c^2v^2\cos^2\gamma = 4g^2x^2 + c^4\cos^2\gamma - 2c^2gx\sin 2\gamma$$

ſo wird

$$c^2v^2\cos^2\gamma = 4g^2\cdot\frac{c^4\sin^2 2\gamma}{16g^2} + c^4\cos^2\gamma - 2c^2g\cdot\frac{c^2\sin 2\gamma}{4g}\cdot\sin$$

alſo $$c^2v^2\cos^2\gamma = \frac{c^4\sin^2 2\gamma}{4} + c^4\cos^2\gamma - \frac{c^4\sin^2 2\gamma}{2}$$

und $$v^2\cos^2\gamma = c^2\cos^2\gamma - \frac{c^2\sin^2 2\gamma}{4}$$

und weil $\sin 2\gamma = 2\sin$ γ, ſo iſt

$v^2\cos^2\gamma =$ $s^2\gamma - c^2\sin^2\gamma\cos^2\gamma$

folglich iſt $v^2 =$ $^2\sin^2\gamma = c^2(1-\sin^2\gamma)$

und $v^2 =$ γ, alſo $v = c\cos\gamma$

die geſuchte Geſchwi

Aufgabe 12. die Richtung, welche der gem

fene Körper in dem γ ſeiner Bahn haben wird, b

ſtimmt werden.

Auflöſung. Setzt man den Winkel, welchen die Rich tung des Körpers mit der Vertikalen bildet, alſo den Winkel welchen v mit w macht, Fig. 163a., $= \psi$, ſo iſt

$$v : c = \sin\varphi : \sin\psi$$

und es iſt $\sin\varphi = \cos\gamma$

folglich iſt $$\sin\psi = \frac{c\cos\gamma}{v}$$

alſo, wenn für v der Werth aus Aufgabe 3. geſetzt wird,

$$\sin\psi = \frac{c^2\cos^2\gamma}{\sqrt{[4g^2x^2 + c^4\cos^2\gamma - 2c^2gx\sin 2\gamma]}}$$

Zuſatz. Für $x=0$ ſowohl, als auch für $x=\frac{c^2\sin 2\gamma}{2g}$, wel ches die ganze Wurfweite iſt, wird $v = c$, und es iſt daher für beide Fälle

$$\sin\psi = \cos\gamma$$

und daher $\psi = 90 - \gamma$

Für den höchſten Punkt der Bahn wird $v = c\cos\gamma$, folglich iſt für dieſen Punkt

$$\sin\psi = \frac{c\cos\gamma}{v} = \frac{c\cos\gamma}{c\cos\gamma} = 1$$

und daher $\psi = 90°$.

Aufgabe 13. Es ſoll der erforderliche anfängliche Rich

inkel $= \gamma$ beſtimmt werden, damit der geworfene Kör-
einer gegebenen Entfernung eine beſtimmte Richtung
rhalte.

uflöſung. Nach Aufgabe 12. iſt

$$\sin^2\psi = \frac{c^4\cos^2\gamma}{4g^2x^2 + c^4\cos^2\gamma - 2c^2gx\sin 2\gamma}$$

iſt ſonach

$$\sin^2\psi = c^4\cos^2\gamma - c^4\sin^2\psi\cos^2\gamma + 2c^2gx\sin^2\psi\sin 2\gamma$$
$$= c^4\cos^2\psi\cos^2\gamma + 2c^2gx\sin^2\psi\sin 2\gamma$$

$\cos^2\gamma = \frac{1+\cos 2\gamma}{2}$, ſo wird

$$\sin^2\psi = c^4\cos^2\psi\left(\frac{1+\cos 2\gamma}{2}\right) + 2c^2gx\sin^2\psi\sin 2\gamma$$

ıd $8g^2x^2\sin^2\psi - c^4\cos^2\psi = c^2\cos^2\psi\cos 2\gamma$
$+ 4c^2gx\sin^2\psi\sin 2\gamma$

her iſt nun

$$\frac{x^2\sin^2\psi - c^4\cos^2\psi}{c^2\cos^2\psi} = \cos 2\gamma + 4gx\,\mathrm{tg}^2\psi\cdot\sin 2\gamma$$

enn $4gx\,\mathrm{tg}^2\psi = \mathrm{tg}\,\varphi$ geſetzt wird,

$$\frac{8g^2x^2}{c^2}\mathrm{tg}^2\psi - c^2 = \cos 2\gamma + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin 2\gamma$$

$$\left(\frac{x^2}{\cdot}\cdot\mathrm{tg}^2\psi - c^2\right)\cos\varphi = \cos 2\gamma\cos\varphi + \sin 2\gamma\sin\varphi$$
$$= \cos(2\gamma - \varphi)$$

ɔ der geſuchte Richtungswinkel γ beſtimmt iſt.

§. 95.

Gesetze des freien Falls der Körper in großen Abständen von der Oberfläche der Erde.

Bei der Ableitung der Gesetze für den freien Fall der Körper, §. 90., wurde die Schwere als unveränderlich angenommen; es ist dieses aber streng genommen nicht richtig, da die Anziehungskraft, deren Wirkung die Schwere ist, in verschiedenen Abständen von dem Mittelpunkte der Erde, verschieden ist, so daß die Anziehungskräfte in verschiedenen Abständen von dem Mittelpunkte der Erde sich verhalten, umgekehrt wie die Quadrate dieser Abstände. Diese Veränderlichkeit verschwindet aber für die geringen Abstände von der Oberfläche der Erde, so lange die Größe dieser Abstände in Verhältniß zu dem Erdhalbmesser unbedeutend ist, und es behalten daher die, §. 90., gefundenen Formeln für diesen Fall volle Gültigkeit. Ist der Abstand eines fallenden Körpers von der Oberfläche der Erde aber bedeutend, so muß diese Veränderlichkeit der Kraft berücksichtigt werden, wenn allgemein geltende Gesetze aufgefunden werden sollen. Dieses führt zu folgenden Aufgaben:

Aufgabe 1. Ein Körper fällt, vermöge der Anziehungskraft der Erde, von einer bedeutenden Höhe herab; es soll die Geschwindigkeit gefunden werden, welche derselbe haben wird, nachdem er bereits einen Theil des Weges zurückgelegt hat.

Auflösung. Es sei der Abstand des Punktes, von welchem aus der Körper fällt, von dem Mittelpunkt der Erde $= H$, der Erdhalbmesser $= R$, und der bereits zurückgelegte Raum $= S$, so ist jetzt der Abstand von dem Mittelpunkt der Erde $= H - S$. In einem Abstande von dem Mittelpunkt der Erde $= R$, also auf der Oberfläche der Erde, ist die Schwerkraft $= g$, folglich wird, nach dem oben angegebenen Gesetz, die Schwerkraft $= X$ in dem Abstande $= H - S$ durch die Proportion gefunden:

$$g : X = (H-S)^2 : R^2$$

$$\text{also } X = \frac{gR^2}{(H-S)^2}$$

Folglich ist in der Formel III. §. 94.

$$v^2 = 4\int \frac{gP}{M} \cdot dS + Const$$

$\frac{gP}{M} = \frac{gR^2}{(H-S)^2}$, und es ist sonach

$$v^2 = 4gR^2 \int \frac{dS}{(H-S)^2} + Const.$$

Wird nun hier $H - S = z$ gesetzt, also $dS = -dz$, so erhält man

$$v^2 = -4gR^2 \int \frac{dz}{z^2} + Const$$

und weil $\int \frac{dz}{z^2} = \int z^{-2} dz = \frac{z^{-1}}{-1} = -\frac{1}{z}$, so wird

$$v^2 = \frac{4gR^2}{z} + Const = \frac{4gR^2}{H-S} + Const.$$

Da nun für $S = 0$ auch $v = 0$ sein soll, so ist

$$0 = \frac{4gR^2}{H} + Const, \text{ also } Const = -\frac{4gR^2}{H}$$

und daher endlich

$$v^2 = \frac{4gR^2}{H-S} - \frac{4gR^2}{H} = 4gR^2\left(\frac{S}{H(H-S)}\right)$$

wodurch die Geschwindigkeit des Körpers in jedem Punkte seiner Bahn bestimmt ist.

Zusatz. Setzt man $S = H - R$, so giebt die Formel die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper die Oberfläche der Erde erreicht. Diese Geschwindigkeit ist bestimmt durch die Formel

$$v^2 = \frac{4gR(H-R)}{H}$$

Aufgabe 2. Es soll die Höhe R gefunden werden, von welcher ein Körper herabfallen muß, wenn er, bei Erreichung der Oberfläche der Erde, eine Geschwindigkeit = v haben soll.

Auflösung. Aus der Gleichung $v^2 = \frac{4gR(H-R)}{H}$ folgt

$$H = \frac{4gR^2}{4gR - v^2}$$

Setzt man nun die Höhe, von der er herabfallen muß, = x, ſo iſt

$$H = R + x$$

$$\text{alſo } x = \frac{4gR^2}{4gR - v^2} - R = \frac{Rv^2}{4gR - v^2}$$

Zuſatz. Hieraus geht hervor, daß $\sqrt{4gR}$ das Maximum der Geſchwindigkeit iſt, welche ein frei fallender Körper an der Oberfläche der Erde durch ſeinen Fall erlangen kann.

Aufgabe 3. Es ſoll die Zeit t angegeben werden, in welcher ein Körper, der in einem Abſtand = H von dem Mittelpunkte der Erde ſich befindet, einen Raum = S durchlaufen wird.

Auflöſung. Nach §. 94, Gleichung I. iſt

$$dS = vdt, \text{ alſo } dt = \frac{dS}{v}$$

und da in Aufgabe 1. gefunden iſt $v^2 = \frac{4gR^2S}{H(H-S)}$

$$\text{alſo } v = 2R\sqrt{\frac{g}{H}} \times \sqrt{\left(\frac{S}{H-S}\right)}$$

ſo wird

$$dt = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{H}{g}} \times dS\sqrt{\left(\frac{H-S}{S}\right)}$$

$$\text{und daher } t = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{H}{g}} \times \int dS\sqrt{\left(\frac{H-S}{S}\right)} + \text{Const}$$

Setzt man hier $\sqrt{\frac{H-S}{S}} = x$, ſo wird $S = \frac{H}{1+x^2}$

$$\text{und } dS = \frac{-2Hxdx}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{folglich iſt } t = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{H}{g}} \times -\int\frac{2Hx^2dx}{(1+x^2)^2}$$

$$= -\frac{H}{R}\sqrt{\frac{H}{g}} \times \int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$$

Es iſt aber, nach Meier Hirſch's Integraltafeln, Seite 49., für $X = 1+x^2$

$$\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{x}{2X} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{X}$$

$$= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}$$

und nach Seite 47. ist

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc tg}\, x$$

folglich wird

$$t = -\frac{H}{R}\sqrt{\frac{H}{g}} \times \left[-\frac{x}{2(1+x^2)} + \tfrac{1}{2}\text{Arc tg}\, x\right] + \text{Const}$$

$$= \frac{H}{2R}\sqrt{\frac{H}{g}} \times \left[\frac{x}{1+x^2} - \text{Arc tg}\, x\right] + \text{Const.}$$

Wird hier wieder für x der Werth $= \sqrt{\frac{H-S}{S}}$, und also $1+x^2 = \frac{H}{S}$ gesetzt, so erhält man $\frac{x}{1+x^2} = \frac{S}{H}\sqrt{\left(\frac{H-S}{S}\right)}$ und es wird sonach

$$t = \frac{H}{2R}\sqrt{\frac{H}{g}} \times \left[\frac{S}{H}\sqrt{\left(\frac{H-S}{S}\right)} - \text{Arc tg}\sqrt{\left(\frac{H-S}{S}\right)}\right] + \text{Const.}$$

Nun ist, wenn man $S = 0$ setzt, auch $t = 0$, also wird die Constante durch die Gleichung bestimmt

$$0 = \frac{H}{2R}\sqrt{\frac{H}{g}} \times -\text{Arc tg}\,\infty + \text{Const}$$

und weil $\text{Arc tg}\,\infty = \frac{1}{2}\pi$, so ist

$$\text{Const} = \frac{H}{2R}\sqrt{\frac{H}{g}} \times \tfrac{1}{2}\pi.$$

Die vollständige Gleichung für die Zeit wird hiernach

$$t = \frac{H}{2R} \cdot \sqrt{\frac{H}{g}} \times \left[\frac{\sqrt{S(H-S)}}{H} - \text{Arc tg}\sqrt{\left(\frac{H-S}{S}\right)} + \tfrac{1}{2}\pi\right]$$

Zusatz. Setzt man in dieser Gleichung $H - S = R$, so wird die Zeit gefunden, in welcher der von einer Höhe über der Oberfläche der Erde $= S$ fallende Körper die Erdoberfläche erreicht.

§. 96.

Die Bewegung eines Körpers in einem widerstehenden Mittel.

Soll ein Körper in einer Flüssigkeit sich bewegen, so muß er diese fortwährend aus ihrer Stelle verdrängen; die Flüssigkeit leistet hierbei einen Widerstand, und bildet so eine hemmende Kraft, wodurch die bewegende Kraft des Körpers, und somit die Geschwindigkeit desselben vermindert wird. Die Er-

fahrung lehrt, daß, unter übrigens gleichen Umſtänden, der Widerſtand, welchen eine Flüſſigkeit dem in ihr bewegten Körper entgegenſetzt, dem Quadrate der Geſchwindigkeit deſſelben proportionirt iſt. Wird alſo dieſer Widerſtand mit W bezeichnet, ſo kann man für die Geſchwindigkeit = v ſetzen

$$W = Av^2$$

wo der Coefficient A von den verſchiedenen Umſtänden abhängt, unter welchen die Bewegung erfolgt. Zu dieſen Umſtänden gehören 1) die Form des bewegten Körpers und beſonders derjenigen Fläche deſſelben, durch welche bei der Bewegung die widerſtehende Flüſſigkeit aus ihrem Orte verdrängt wird; und 2) das Verhältniß des eigenthümlichen Gewichts der bewegten Maſſe zu dem eigenthümlichen Gewicht der Flüſſigkeit, in welcher die Bewegung ſtattfindet.

Wird das eigenthümliche Gewicht des Körpers in Verhältniß zu dem eigenthümlichen Gewicht der widerſtehenden Flüſſigkeit = n geſetzt, ſo daß hiernach, bei gleichem Volumen, wenn das Gewicht der Flüſſigkeit = 1 iſt, das des bewegten Körpers = n wird, und iſt der bewegte Körper eine Kugel, ſo findet man nach den Geſetzen der Hydroſtatik, für den Durchmeſſer der Kugel = D, den Coefficient

$$A = \frac{D^2\pi}{32gn}$$

und ſonach iſt für dieſen Fall der Widerſtand

$$W = \left(\frac{D^2\pi}{32gn}\right)v^2.$$

Die bewegte Maſſe = M iſt hier der Kubikinhalt der Kugel, und es iſt ſonach $M = \frac{D^3\pi}{6}$, folglich wird die widerſtehende Kraft =

$$\frac{W}{M} = \left(\frac{D^2\pi}{32gn}\right)v^2 \times \frac{6}{D^3\pi} = \frac{3v^2}{16Dgn} = \frac{v^2}{\frac{16}{3}\cdot Dgn}$$

Setzt man ſonach den für die Bewegung einer Kugel conſtanten Nenner $\frac{16}{3}Dgn = m^2$, ſo wird

$$\frac{W}{M} = \frac{v^2}{m^2}$$

die widerſtehende Kraft.

Da nun aber bei der Bewegung eines jeden andern Kör-

ach Seite 47. iſt

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arctg}\, x$$

h wird

$$= -\frac{H}{R}\sqrt{\frac{H}{g}} \times \left[-\frac{x}{2(1+x^2)} + \tfrac{1}{2}\text{Arctg}\, x\right] + \text{Const}$$

$$= \frac{H}{2R}\sqrt{\frac{H}{g}} \times \left[\frac{x}{1+x^2} - \text{Arctg}\, x\right] + \text{Const.}$$

hier wieder für x der Werth $= \sqrt{\frac{H-S}{S}}$, und alſo

$^2 = \frac{H}{S}$ geſetzt, ſo erhält man $\frac{x}{1+x^2} = \frac{S}{H}\sqrt{\left(\frac{H-S}{S}\right)}$

s wird ſonach

$$\frac{H}{R}\sqrt{\frac{H}{g}} \times \left[\frac{S}{H}\sqrt{\left(\frac{H-S}{S}\right)} - \text{Arctg}\sqrt{\left(\frac{H-S}{S}\right)}\right] + \text{Const.}$$

iſt, wenn man $S = 0$ ſetzt, auch $t = 0$, alſo wird die ante durch die Gleichung beſtimmt

$$0 = \frac{H}{2R}\sqrt{\frac{H}{g}} \times -\text{Arctg}\,\infty + \text{Const}$$

weil $\text{Arctg}\,\infty = \frac{1}{2}\pi$, ſo iſt

$$\text{Const} = \frac{H}{2R}\sqrt{\frac{H}{g}} \times \tfrac{1}{2}\pi.$$

vollſtändige Gleichung für die Zeit wird hiernach

$$\frac{H}{2R} \cdot \sqrt{\frac{H}{g}} \times \left[\frac{\sqrt{S(H-S)}}{H} - \text{Arctg}\sqrt{\left(\frac{H-S}{S}\right)} + \tfrac{1}{2}\pi\right]$$

Zuſatz. Setzt man in dieſer Gleichung $H - S = R$, rd die Zeit gefunden, in welcher der von einer Höhe über Oberfläche der Erde $= S$ fallende Körper die Erdober- erreicht.

§. 96.

Bewegung eines Körpers in einem widerſtehenden Mittel.

Soll ein Körper in einer Flüſſigkeit ſich bewegen, ſo muß ſe fortwährend aus ihrer Stelle verdrängen; die Flüſſig- eiſtet hierbei einen Widerſtand, und bildet ſo eine hem- e Kraft, wodurch die bewegende Kraft des Körpers, und die Geſchwindigkeit deſſelben vermindert wird. Die Er-

$$\frac{1}{v} = \frac{2gt}{k^2} + \frac{1}{c} = \frac{2gct + k^2}{ck^2}$$

Demnach iſt die geſuchte Geſchwindigkeit nach der Zeit t

$$v = \frac{ck^2}{2gct + k^2}$$

Zuſatz. Aus der gefundenen Gleichung folgt

$$t = \frac{(c - v)\,k^2}{2gcv} \text{ und } c = \frac{k^2 v}{k^2 - 2gtv}$$

Man kann alſo für einen beſtimmten Werth von k, wenn zwei von den drei Größen c, v und t gegeben ſind, die dritte finden.

Aufgabe 2. Es ſoll unter den Bedingungen der Aufgabe 1. der Raum = S gefunden werden, welchen der Körper in der Zeit t zurücklegt.

Auflöſung. Setzt man §. 94. in der Gleichung I.

$$dS = vdt$$

den obigen Werth für $v = \frac{ck^2}{2gct + k^2}$, ſo wird

$$dS = \frac{ck^2 dt}{k^2 + 2gct} = \frac{cdt}{1 + \frac{2gc}{k^2} \cdot t}$$

oder wenn man einſtweilen $\frac{2gc}{k^2} = \alpha$ ſetzt,

$$dS = c\left(\frac{dt}{1 + \alpha t}\right)$$

$$\text{und daher } S = c\int\left(\frac{dt}{1 + \alpha t}\right) + \text{Const}$$

$$\text{und da } \int\left(\frac{dt}{1 + \alpha t}\right) = \frac{1}{\alpha}\log\text{nat}(1 + \alpha t)$$

$$\text{ſo iſt } S = \frac{c}{\alpha}\log\text{nat}(1 + \alpha t) + \text{Const.}$$

Nun muß für $t = 0$ auch $S = 0$ werden; es iſt aber alsdann auch $\log(1 + \alpha t) = \log 1 = 0$, folglich iſt $\text{Const} = 0$, und ſonach

$$S = \frac{c}{\alpha}\log\text{nat}(1 + \alpha t)$$

nämlich es iſt, wenn man für α den Werth wieder ſetzt,

S =

$$S = \frac{k^2}{2g} \log nat \left(\frac{k^2 + 2gct}{k^2} \right)$$

Da nun, nach Aufgabe 1.,

$$\frac{k^2 + 2gct}{k^2} = \frac{c}{v}$$

ſo erhält man endlich

$$S = \frac{k^2}{2g} \log nat \frac{c}{v}$$

die Formel, durch welche der zurückgelegte Raum ſich berechnen läßt.

Zuſatz. Aus der Gleichung

$$S = \frac{k^2}{2g} \log nat \frac{c}{v}$$

folgt $\frac{2gS}{k^2} = \log nat \frac{c}{v}$

und daher iſt, wenn man die Grundzahl der natürlichen Logarithmen = e ſetzt,

$$e^{\frac{2gS}{k^2}} = \frac{c}{v}$$

$$\text{alſo } c = v \cdot e^{\frac{2gS}{k^2}} \text{ und } v = ce^{-\frac{2gS}{k^2}}$$

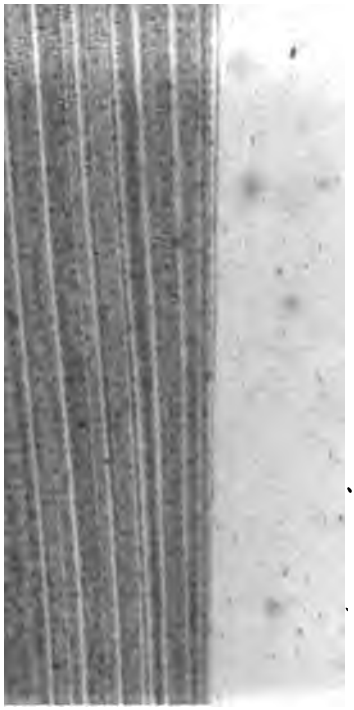
Durch dieſe Formeln kann jede der drei Größen c, v und S gefunden werden, wenn die beiden übrigen gegeben ſind.

Auch laſſen ſich, durch Verbindung dieſer Formeln mit der in der vorigen Aufgabe gefundenen, directe Formeln für die Abhängigkeit der Größen t, v und S von einander ableiten, ſo wie durch die gefundene Gleichung

$$S = \frac{k^2}{2g} \log nat \left(\frac{k^2 + 2gct}{k^2} \right)$$

die Abhängigkeit der Größen S, c und t von einander gegeben iſt.

Beiſpiel. Das Blei hat ein eigenthümliches Gewicht = 11,35, und das der atmoſphäriſchen Luft kann = 0,0013 angenommen werden, folglich iſt das eigenthümliche Gewicht von Blei in Verhältniß zu dem der Luft = $\frac{11,35}{0,0013}$ = 8731, welches alſo der Werth von n iſt. Da nun ange-



finden.

Aufgabe 2. Es sc
der Raum = S gefunt
Zeit t zurücklegt.

Auflösung. Se

den obigen Werth für

$$dS = \frac{}{k}$$

oder wenn man einstwe

$$d$$

und daher S

und da $\int\left(\frac{}{1}\right.$

so ist S =

$$S = \frac{k^2}{2g} \log nat \left(\frac{k^2 + 2gct}{k^2} \right)$$

nun, nach Aufgabe 1.,

$$\frac{k^2 + 2gct}{k^2} = \frac{c}{v}$$

erhält man endlich

$$S = \frac{k^2}{2g} \log nat \frac{c}{v}$$

Formel, durch welche der zurückgelegte Raum sich berech- läßt.

Zusatz. Aus der Gleichung

$$S = \frac{k^2}{2g} \log nat \frac{c}{v}$$

$$\text{folgt } \frac{2gS}{k^2} = \log nat \frac{c}{v}$$

daher ist, wenn man die Grundzahl der natürlichen Lo- thmen $= e$ setzt,

$$e^{\frac{2gS}{k^2}} = \frac{c}{v}$$

$$\text{also } c = v \cdot e^{\frac{2gS}{k^2}} \text{ und } v = ce^{-\frac{2gS}{k^2}}$$

ch diese Formeln kann jede der drei Größen c, v und S nden werden, wenn die beiden übrigen gegeben sind.

Auch lassen sich, durch Verbindung dieser Formeln mit der er vorigen Aufgabe gefundenen, directe Formeln für die ängigkeit der Größen t, v und S von einander ableiten, ie durch die gefundene Gleichung

$$S = \frac{k^2}{2g} \log nat \left(\frac{k^2 + 2gct}{k^2} \right)$$

Abhängigkeit der Größen S, c und t von einander gege- ist.

Beispiel. Das Blei hat ein eigenthümliches Gewicht 1,35, und das der atmosphärischen Luft kann $= 0{,}0013$ enommen werden, folglich ist das eigenthümliche Ge- t von Blei in Verhältniß zu dem der Luft $= \frac{11{,}35}{0{,}0013}$ 8731, welches also der Werth von n ist. Da nun ange-

nommen iſt $k^2 = \frac{16}{3} \cdot Dgu$, und für rheinländiſches Ma
$g = 15{,}625$, ſo hat man für die Bewegung einer Bleiku
in der Luft

$$k^2 = \frac{16}{3} \times 15{,}625 \times 8731 \times D = 727583 \cdot D$$

Nimmt man den Durchmeſſer einer gewöhnlichen Flintenku
0,65 Zoll $= \frac{65}{1200}$ rheinländiſche Fuß, ſo wird für dieſen Fa
der Werth von $k^2 =$ $\times \frac{65}{1200} = 39411$.

Iſt der Durchm r Kugel $= 3$ Zoll $= \frac{1}{4}$ Fuß,
wird

$$k^2 = \frac{1}{4} \times$$ 583 $= 181896$

Da nun, nach Aufgabe 1

$$v = \frac{}{k^2 \cdot \frac{1}{c}} = c - \frac{2gc^2t}{k^2 + 2gct}$$

ſo iſt für eine anfängliche Geſchwindigkeit von 1000 Fuß die
ſelbe nach einer Secunde, wenn nur der Widerſtand der Luf
berückſichtigt, alles andere aber außer Acht gelaſſen wird,

bei einer Bleikugel von 0,65 Zoll Durchmeſſer

$$v = 1000 - \frac{2 \cdot 15{,}625 \cdot 1000^2}{39411 + 2 \cdot 15{,}625 \cdot 1000} = 1000 - 442 = 558$$

und bei einer Kugel von 3 Zoll Durchmeſſer iſt

$$v = 1000 - \frac{2 \cdot 15{,}625 \cdot 1000^2}{181896 + 2 \cdot 15{,}625 \cdot 1000} = 1000 - 147 = 853.$$

Ferner iſt

log nat 1000	$= 6{,}90775528$	log nat 1000	$= 6{,}90775528$
log nat 558	$= 6{,}32435896$	log nat 853	$= 6{,}74675975$
	$0{,}58339632$		$0{,}16099553$

$$\text{also ist } \log\text{nat}\frac{c}{v} = \log\text{nat}\, c - \log\text{nat}\, v$$

für $D = 0{,}65$ Zoll; $= 0{,}5834$ und für $D = 3$ Zoll; $= 0{,}1609$
Nach Aufgabe 2. iſt aber

$$S = \frac{k^2}{2g} \log\text{nat}\frac{c}{v}$$

folglich iſt für eine Kugel von 0,65 Zoll Durchmeſſer der in
der erſten Secunde zurückgelegte Raum

$$S = \frac{39411}{2 \cdot 15{,}625} \times 0{,}5834 = 736$$

Aus dieſer Gleichung folgt

$$\frac{4g\mu t}{k} = \text{lognat}\left[\frac{(k\mu+v)(k\mu-c)}{(k\mu-v)(k\mu+c)}\right]$$

und daher, für die Grundzahl der natürlichen Logarithmen $= e$,

$$e^{\frac{4g\mu t}{k}} = \left(\frac{k\mu+v}{k\mu-v}\right)\left(\frac{k\mu-c}{k\mu+c}\right)$$

folglich iſt $\left(\frac{k\mu+c}{k\mu-c}\right)e^{\frac{4g\mu t}{k}} = \frac{k\mu+v}{k\mu-v}$

und man findet hieraus durch Reduction die geſuchte Geſchwindigkeit

$$v = k\mu\left[\frac{\left(\frac{k\mu+c}{k\mu-c}\right)e^{\frac{4g\mu t}{k}} - 1}{\left(\frac{k\mu+c}{k\mu-c}\right)e^{\frac{4g\mu t}{k}} + 1}\right].$$

Zuſatz. Von dem in den Klammern eingeſchloſſenen Ausdrucke iſt der Zähler kleiner als der Nenner, der Werth deſſelben iſt alſo < 1, und eben ſo iſt auch $\mu = \frac{n-1}{n} < 1$, folglich in allen Fällen $v < k$.

Aufgabe 4. Es ſoll unter den, Aufgabe 3., angegebenen Bedingungen der Raum beſtimmt werden, welchen ein Körper in der Zeit t zurücklegt.

Auflöſung. Nach §. 94. Formel III. iſt

$$v\,dv = \frac{P}{M}\cdot 2g\cdot dS$$

und hier $\frac{P}{M} = \mu^2 - \frac{v^2}{k^2}$

folglich wird

$$v\,dv = \left(\frac{k^2\mu^2 - v^2}{k^2}\right)2g\cdot dS$$

alſo $\frac{v\,dv}{k^2\mu^2 - v^2} = \frac{2g}{k^2}\cdot dS$

und man findet hieraus

$$\frac{4g}{k^2}\cdot S = \int\left(\frac{2v\,dv}{k^2\mu^2 - v^2}\right) + \text{Const.}$$

$$\frac{2g}{k^2}\cdot dt = \frac{dv}{k^2\mu^2 - v^2}$$

folglich iſt $\frac{2gt}{k^2} = \int \frac{dv}{k^2\mu^2 - v^2} + \text{Const}$

und $\frac{2gt}{k^2} = \frac{1}{k\mu}\int\left(\frac{\frac{dv}{k\mu}}{1 - \frac{v^2}{k^2\mu^2}}\right)$

wofür man ſetzen kann

$$\frac{2gt}{k^2} \quad \int\left(\frac{dz}{1-z^2}\right)$$

Nun iſt, nach Meier [illegible]p's Integraltafeln S. 47,

$$\int \frac{d}{1-} \quad \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

und hier $z = \frac{}{k\mu}$, alſo $\frac{1+z}{1-z} = \frac{k\mu+v}{k\mu-v}$

folglich wird

$$\frac{2gt}{k^2} = \frac{1}{2k\mu}\,\text{lognat}\,\frac{k\mu+v}{k\mu-v} + \text{Const.}$$

und daher $t = \frac{k}{4g\mu}\,\text{lognat}\,\frac{k\mu+v}{k\mu-v} + \text{Const.}$

Wird nun der Körper blos durch die Schwere bewegt, iſt die anfängliche Geſchwindigkeit $= 0$, ſo iſt $v = 0$, wenn man $t = 0$ ſetzt, und daher bei dieſer Vorausſetzung auch Const. $= 0$, und alſo vollſtändig

$$t = \frac{k}{4g\mu}\,\text{lognat}\,\frac{k\mu+v}{k\mu-v}$$

Wird der Körper aber ſenkrecht zur Erde mit einer anfänglichen Geſchwindigkeit $= c$ geworfen, ſo iſt $v = c$, wenn man $t = 0$ ſetzt, und daher

$$\text{Const} = -\frac{k}{4g\mu}\,\text{lognat}\,\frac{k\mu+c}{k\mu-c}$$

und es iſt ſonach

$$t = \frac{k}{4g\mu}\left[\text{lognat}\,\frac{k\mu+v}{k\mu-v} - \text{lognat}\,\frac{k\mu+c}{k\mu-c}\right]$$

$$= \frac{k}{4g\mu}\,\text{lognat}\left[\frac{k\mu+v}{k\mu-v} : \frac{k\mu+c}{k\mu-c}\right]$$

$$= \frac{k}{4g\mu}\,\text{lognat}\left[\frac{k\mu+v}{(k\mu-v)}\cdot\frac{(k\mu-c)}{(k\mu+c)}\right]$$

us dieser Gleichung folgt

$$\frac{4g\mu t}{k} = \text{lognat}\left[\frac{(k\mu+v)(k\mu-c)}{(k\mu-v)(k\mu+c)}\right]$$

d daher, für die Grundzahl der natürlichen Logarithmen = e,

$$e^{\frac{4g\mu t}{k}} = \left(\frac{k\mu+v}{k\mu-v}\right)\left(\frac{k\mu-c}{k\mu+c}\right)$$

folglich ist $\left(\frac{k\mu+c}{k\mu-c}\right)e^{\frac{4g\mu t}{k}} = \frac{k\mu+v}{k\mu-v}$

d man findet hieraus durch Reduction die gesuchte Geschwindigkeit

$$v = k\mu\left[\frac{\left(\frac{k\mu+c}{k\mu-c}\right)e^{\frac{4g\mu t}{k}} - 1}{\left(\frac{k\mu+c}{k\mu-c}\right)e^{\frac{4g\mu t}{k}} + 1}\right]$$

Zusatz. Von dem in den Klammern eingeschlossenen Ausdrucke ist der Zähler kleiner als der Nenner, der Werth desselben ist also < 1, und eben so ist auch $\mu = \frac{n-1}{n} < 1$, folglich in allen Fällen $v < k$.

Aufgabe 4. Es soll unter den, Aufgabe 3., angegebenen Bedingungen der Raum bestimmt werden, welchen ein Körper in der Zeit t zurücklegt.

Auflösung. Nach §. 94. Formel III. ist

$$vdv = \frac{P}{M}\cdot 2g\cdot dS$$

und hier $\frac{P}{M} = \mu^2 - \frac{v^2}{k^2}$

glich wird

$$vdv = \left(\frac{k^2\mu^2 - v^2}{k^2}\right)2g\cdot dS$$

also $\frac{vdv}{k^2\mu^2 - v^2} = \frac{2g}{k^2}\cdot dS$

d man findet hieraus

$$\frac{4g}{k^2}\cdot S = \int\left(\frac{2vdv}{k^2\mu^2 - v^2}\right) + \text{Const.}$$

$$\operatorname{tg}\frac{2g\mu t}{k} = \frac{k\mu(c-v)}{k^2\mu^2+cv}$$

und hieraus erhält man durch einfache Reduction die geſuchte Gleichung für die Geſchwindigkeit nach der Zeit t

$$v = \frac{k\mu\left(c - k\mu\operatorname{tg}\frac{2g\mu t}{k}\right)}{k\mu + c\operatorname{tg}\frac{2g\mu t}{k}}$$

Zuſatz. Soll die Zeit gefunden werden, nach welcher die Geſchwindigkeit $v = 0$ wird, ſo braucht man nur $v = 0$ zu ſetzen in der Gleichung

$$\frac{2gt}{k} = \frac{1}{\mu}\left(\operatorname{Arctg}\frac{c}{k\mu} - \operatorname{Arctg}\frac{v}{k\mu}\right)$$

und man findet alsdann

$$t = \frac{k}{2g\mu}\operatorname{Arctg}\frac{c}{k\mu}$$

Aufgabe 6. Man ſoll unter den Bedingungen der Aufgabe 5. den Raum S beſtimmen, den der Körper in der Zeit t zurücklegt.

Auflöſung. Die Formel III. §. 94. giebt hier in einer ähnlichen Art, wie bei Aufgabe 4.,

$$vdv = -\left(\frac{k^2\mu^2+v^2}{k^2}\right)2g\cdot dS$$

und es iſt daher

$$\frac{2g}{k^2}dS = -\frac{vdv}{k^2\mu^2+v^2}$$

$$\text{folglich } \frac{4g}{k^2}\cdot S = -\int\frac{2vdv}{k^2\mu^2+v^2} + \text{Const}$$

$$= -\log(k^2\mu^2+v^2) + \text{Const}$$

und weil für $S = 0$ ſein ſoll $v = c$, ſo iſt

$$\text{Const} = \log\text{nat}(k^2\mu^2+c^2)$$

$$\text{und } \frac{4g}{k^2}S = \log\text{nat}(k^2\mu^2+c^2) - \log(k^2\mu^2+v^2)$$

und es iſt daher der geſuchte Raum

$$S = \frac{k^2}{4g}\log\text{nat}\left(\frac{k^2\mu^2+c^2}{k^2\mu^2+v^2}\right)$$

Zuſatz. Um den Raum zu finden, welchen der Körper überhaupt mit der anfänglichen Geſchwindigkeit $= c$ in einer

der Schwere entgegengesetzten Richtung durchlaufen wird, braucht man in der gefundenen Formel nur $v = 0$ zu setzen. Der gesuchte Raum ist daher

$$S = \frac{k^2}{4g} \log\text{nat}\left(\frac{k^2\mu^2 + c^2}{k^2\mu^2}\right) = \frac{k^2}{4g} \log\text{nat}\left(1 + \frac{c^2}{k^2\mu^2}\right)$$

Da nun ganz allgemein ist

$$\log\text{nat}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots$$

so ist auch

$$S = \frac{k^2}{4g}\left[\frac{c^2}{k^2\mu^2} - \frac{c^4}{2k^4\mu^4} + \frac{c^6}{3k^6\mu^6} \cdots\right]$$
$$= \frac{1}{4g}\left[\frac{c^2}{\mu^2} - \frac{c^4}{2k^2\mu^4} + \frac{c^6}{3k^4\mu^6} \cdots\right]$$

Ist nun c bedeutend geringer als k an Werth, so erhält man für den ganzen durchlaufenen Raum den Näherungswerth

$$S = \frac{1}{4g} \cdot \frac{c^2}{\mu^2}$$

und derselbe wird, wenn man $\mu = 1$ annimmt,

$$S = \frac{c^2}{4g}$$

welches, nach §. 90. Aufgabe 3., der Raum ist für einen steigenden Körper, wenn hierbei der Widerstand der Luft nicht berücksichtigt wird.

§. 97.
Aufgabe.

Auf den Schwerpunkt eines Körpers, dessen Masse $= M$ ist, wirken fortwährend zwei Kräfte P und Q, deren Richtungen in jedem Punkte der Bahn aS, Fig. 164, des bewegten Körpers den normal auf einander stehenden Coordinaten ap und aq parallel sind; es sollen die Gleichungen für die Bewegung dieses Körpers gefunden werden.

Auflösung. Der Körper, dessen Bewegung von a aus beginnt, befinde sich in Folge der Einwirkung der beiden Kräfte P und Q nach der Zeit t in y, der in dieser Zeit zurückgelegte Weg ay sei $= S$, und die Geschwindigkeit in $y = v$. Die den Richtungen der beiden Kräfte parallelen Coordinaten des Punktes y der Bahn sollen $ax = x$ und $xy = y$ sein,

$$\operatorname{tg}\frac{2g\mu t}{k} = \frac{k\mu(c-v)}{k^2\mu^2+cv}$$

und hieraus erhält man durch einfache Reduction die ge
Gleichung für die Geſchwindigkeit nach der Zeit t

$$v = \frac{k\mu\left(c - k\mu\operatorname{tg}\frac{2g\mu t}{k}\right)}{k\mu + c\operatorname{tg}\frac{2g\mu t}{k}}$$

Zuſatz. Soll die Zeit gefunden werden, nach n
die Geſchwindigkeit v = wird, ſo braucht man nur
zu ſetzen in der

$$\frac{2gt}{k} = \frac{1}{\mu}\left(\operatorname{ctg}\frac{c}{k\mu} - \operatorname{Arctg}\frac{v}{k\mu}\right)$$

und man findet a

$$t = \frac{k}{g\mu}\operatorname{Arctg}\frac{c}{k\mu}$$

Aufgabe 6. Man ſoll unter den Bedingungen d
gabe 5. den Raum S beſtimmen, den der Körper in d
t zurücklegt.

Auflöſung. Die Formel III. §. 94. giebt hier i
ähnlichen Art, wie bei Aufgabe 4.,

$$vdv = -\left(\frac{k^2\mu^2+v^2}{k^2}\right)2g\cdot dS$$

und es iſt daher

$$\frac{2g}{k^2}dS = -\frac{vdv}{k^2\mu^2+v^2}$$

$$\text{folglich } \frac{4g}{k^2}\cdot S = -\int\frac{2vdv}{k^2\mu^2+v^2} + \text{Const}$$

$$= -\log(k^2\mu^2+v^2) + \text{Const}$$

und weil für S = 0 ſein ſoll v = c, ſo iſt

$$\text{Const} = \log\text{nat}(k^2\mu^2+c^2)$$

$$\text{und } \frac{4g}{k^2}S = \log\text{nat}(k^2\mu^2+c^2) - \log(k^2\mu^2+$$

und es iſt daher der geſuchte Raum

$$S = \frac{k^2}{4g}\log\text{nat}\left(\frac{k^2\mu^2+c^2}{k^2\mu^2+v^2}\right)$$

Zuſatz. Um den Raum zu finden, welchen der
überhaupt mit der anfänglichen Geſchwindigkeit = c i

Schwere entgegengesetzten Richtung durchlaufen wird, braucht
in der gefundenen Formel nur $v = 0$ zu setzen. Der
chte Raum ist daher

$$S = \frac{k^2}{4g} \log nat\left(\frac{k^2\mu^2 + c^2}{k^2\mu^2}\right) = \frac{k^2}{4g} \log nat\left(1 + \frac{c^2}{k^2\mu^2}\right)$$

nun ganz allgemein ist

$$\log nat(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots$$

ist auch

$$S = \frac{k^2}{4g}\left[\frac{c^2}{k^2\mu^2} - \frac{c^4}{2k^4\mu^4} + \frac{c^6}{3k^6\mu^6} \cdots\right]$$
$$= \frac{1}{4g}\left[\frac{c^2}{\mu^2} - \frac{c^4}{2k^2\mu^4} + \frac{c^6}{3k^4\mu^6} \cdots\right]$$

nun c bedeutend geringer als k an Werth, so erhält man
den ganzen durchlaufenen Raum den Näherungswerth

$$S = \frac{1}{4g} \cdot \frac{c^2}{\mu^2}$$

derselbe wird, wenn man $\mu = 1$ annimmt,

$$S = \frac{c^2}{4g}$$

ches, nach §. 90. Aufgabe 3., der Raum ist für einen fal-
den Körper, wenn hierbei der Widerstand der Luft nicht
ücksichtigt wird.

§. 97.

Aufgabe.

Auf den Schwerpunkt eines Körpers, dessen Masse = M
wirken fortwährend zwei Kräfte P und Q, deren Richtun-
in jedem Punkte der Bahn aS, Fig. 164, des bewegten
rpers den normal auf einander stehenden Coordinaten ap
aq parallel sind; es sollen die Gleichungen für die Be-
gung dieses Körpers gefunden werden.

Auflösung. Der Körper, dessen Bewegung von a aus
ünnt, befinde sich in Folge der Einwirkung der beiden Kräfte
und Q nach der Zeit t in y, der in dieser Zeit zurückge-
te Weg ay sei = S, und die Geschwindigkeit in y = v.
e den Richtungen der beiden Kräfte parallelen Coordinaten
s Punktes y der Bahn sollen ax = x und xy = y sein,

die Geſchwindigkeit in dem Punkte y, in der Richtu
Kraft P, alſo parallel ap, ſei = v′, und in der Richtu
Kraft Q, alſo parallel aq, ſei = v″.

Kommt nun der Körper in der Zeit dt von y n
ſo iſt yy′ = dS = vdt, und es iſt nun die hierzu g
Veränderung der Coordinaten

ym = xx′ = dx und my′ = dy

und da der kleine Theil yy′ der Bahn als geradlinig
ſehen werden kann, m

$$= (ym)^2 + (my')^2$$
$$= (dx)^2 + (dy)^2$$

und da dS = vdt, &c.

$$= (dx)^2 + (dy)^2$$

und dieſes giebt

$$\text{I.}\quad v = \frac{\sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}}{dt}.$$

Da die Geſchwindigkeit in der Richtung ap am End
Zeit t = v′ ſein ſoll, und in dieſer Richtung während
Zeit dt der Raum xx′ = dx zurückgelegt wird, ſo iſt

$$dx = v'dt, \text{ und eben ſo } dy = v''dt$$

$$\text{hieraus folgt } v' = \frac{dx}{dt} \text{ und } v'' = \frac{dy}{dt}$$

und es iſt daher, wenn man x und y als Functionen v
annimmt, und daher dt als conſtant,

$$dv' = \frac{d^2x}{dt} \text{ und } dv'' = \frac{d^2y}{dt}.$$

Nach §. 94. No. II. iſt aber

$$dv' = \frac{P}{M} \cdot 2gdt \text{ und } dv'' = \frac{Q}{M} \cdot 2gdt$$

folglich iſt auch

$$\frac{d^2x}{dt} = \frac{P}{M} \cdot 2gdt \text{ und } \frac{d^2y}{dt} = \frac{Q}{M} \cdot 2gdt$$

und hieraus folgt

$$\text{II.}\quad \frac{d^2x}{(dt)^2} = \frac{2gP}{M} \text{ und } \frac{d^2y}{(dt)^2} = \frac{2gQ}{M}.$$

Da nach I. iſt

$$v^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dt)^2}$$

$$P' = \frac{V dy}{dS} \text{ und } Q = \frac{V dx}{dS}$$

und es ist hier P′ negativ, weil P′ in der Richtung pa dem Falle des Körpers widersteht, die Schwere des Körpers ist seiner Masse gleich = M, und daher die Kraft P, mit welcher er in der Richtung ax wirklich bewegt wird, $P = M - P'$,

$$\text{also } P = M - \frac{V dy}{dS} \text{ und } Q = \frac{V dx}{dS}$$

Werden diese Werthe in der allgemeinen Gleichung III. §. 97. gesetzt, so erhält man

$$v dv = \frac{2g}{M}\left[\left(M - \frac{V dy}{dS}\right)\right] dx + \frac{V dx}{dS} \cdot dy\Big]$$

$$\text{folglich ist } v dv = \frac{2g}{M} \cdot M dx = 2g dx$$

$$\text{also } \int v dv = 2gx + \text{Const}$$

$$\text{und } \frac{v^2}{2} = 2gx + \text{Const}$$

und weil für $x = 0$ auch $v = 0$ wird, so ist Const = 0,

und daher $v^2 = 4gx$, folglich $v = \sqrt{4gx}$

die gesuchte Geschwindigkeit in dem Punkte y der Bahn.

Zusatz. Wenn ein Körper frei von a bis x, also durch einen Raum = x fällt, so ist hier, nach §. 90. Aufgabe 1., seine Geschwindigkeit in x, $v = 2\sqrt{gx} = \sqrt{4gx}$, sie ist also eben so groß, wie bei dem Fall in der Curve. Hieraus folgt: Fällt ein Körper von a aus in einer vorgeschriebenen Bahn ayb, so ist seine Geschwindigkeit in y, wo er sich dem Horizonte um ax genähert hat, eben so groß, als sie sein würde, wenn er durch freien Fall den Raum ax durchlaufen hätte.

Aufgabe 3. Es soll die Zeit angegeben werden, in welcher ein Körper durch den Fall in der vorgeschriebenen Bahn von a bis y gelangen wird.

Auflösung. Nach §. 97. Formel I. ist

$$v dt = \sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}$$

$$\text{also } dt = \frac{\sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}}{v}$$

Da nun, nach Aufgabe 2., $v = \sqrt{4gx}$ ist, so hat man

$$dt = \sqrt{\left[\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{4gx}\right]}$$

Eine Gleichung, aus welcher t durch Integration gefunden werden kann, sobald das Gesetz der Curve bekannt ist, sobald man also weiß, wie y von x abhängt.

Zusatz. Da $vdt = dS$, so ist auch

$$dS = V[(dx)^2 + (dy)^2]$$

und es läßt sich also auch der zurückgelegte Weg berechnen, wenn man weiß, wie y von x abhängt.

Aufgabe 4. Ein Körper befindet sich in b, Fig. 167, und würde sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit $= c$ in der Richtung bn bewegen: er wird aber fortwährend durch eine Kraft, die seiner Masse M gleich ist, nach dem Mittelpunkte g gezogen, und hierdurch gezwungen, die Curve byd zu durchlaufen; es soll der Punkt d gefunden werden, in welchem er den Umfang des Kreises aed treffen wird, wenn man hierbei voraussetzt, daß der Radius ga dieses Kreises im Verhältniß zu der Länge von ab sehr groß ist.

Auflösung. Es sei $ga = R$, $ab = h$, und der Körper befinde sich nach der Zeit t in y; ferner sei $gy = z$ und der sehr kleine Winkel $bgy = \varphi$, so ist für $bx = x$ und $xy = y$,

$$gy : yx = 1 : \sin\varphi, \text{ also } z : y = 1 : \sin\varphi,$$

also $y = z\sin\varphi$, und eben so ist $R + h - x = z\cos\varphi$. Weil aber gb nur sehr wenig von ga verschieden sein soll, und daher φ ein sehr kleiner Bogen ist, so kann $\sin\varphi = \varphi$ und $\cos\varphi = 1$ gesetzt werden, es ist sonach

$$y = z\varphi \text{ und } R + h - x = z.$$

In y wirkt auf den Körper eine Kraft, welche seiner Masse M gleich ist, in der Richtung yg; wird diese in zwei Seitenkräfte P und Q zerlegt, von welchen die erste parallel bg und die andere parallel nb ist, so findet man

$$P = M\cos\varphi = M \text{ und } Q = M\sin\varphi = M\varphi.$$

In dem Punkte y wirkt also auf den Körper parallel bn die Kraft $Q = M\varphi$ nach der negativen Richtung yx, und man muß daher in der Gleichung II. §. 97.

$$\frac{d^2y}{(dt)^2} = \frac{2gQ}{M}$$

setzen $Q = -M\varphi$. Hierdurch wird

$$\frac{d^2y}{(dt)^2} = -\frac{2gM\varphi}{M} = -2g\varphi.$$

$$P' = \frac{V dy}{dS} \text{ und } Q = \frac{V dx}{dS}$$

es ist hier P' negativ, weil P' in der Richtung pa dem
e des Körpers widersteht, die Schwere des Körpers ist sei=
Masse gleich $= M$, und daher die Kraft P, mit welcher
n der Richtung ax wirklich bewegt wird, $P = M - P'$,

$$\text{also } P = M - \frac{V dy}{dS} \text{ und } Q = \frac{V dx}{dS}$$

den diese Werthe in der allgemeinen Gleichung III. §. 97.
zt, so erhält man

$$v dv = \frac{2g}{M}\left[\left(M - \frac{V dy}{dS}\right)dx + \frac{V dx}{dS} \cdot dy\right]$$

$$\text{folglich ist } v dv = \frac{2g}{M} \cdot M dx = 2g dx$$

$$\text{also } \int v dv = 2gx + \text{Const}$$

$$\text{und } \frac{v^2}{2} = 2gx + \text{Const}$$

weil für $x = 0$ auch $v = 0$ wird, so ist Const $= 0$,
und daher $v^2 = 4gx$, folglich $v = \sqrt{4gx}$
gesuchte Geschwindigkeit in dem Punkte y der Bahn.

Zusatz. Wenn ein Körper frei von a bis x, also durch
n Raum $= x$ fällt, so ist hier, nach §. 90. Aufgabe 1.,
Geschwindigkeit in x, $v = 2\sqrt{gx} = \sqrt{4gx}$, sie ist also
so groß, wie bei dem Fall in der Curve. Hieraus folgt:
ein Körper von a aus in einer vorgeschriebenen Bahn
, so ist seine Geschwindigkeit in y, wo er sich dem Hori=
e um ax genähert hat, eben so groß, als sie sein würde,
n er durch freien Fall den Raum ax durchlaufen hätte.

Aufgabe 3. Es soll die Zeit angegeben werden, in
her ein Körper durch den Fall in der vorgeschriebenen Bahn
a bis y gelangen wird.

Auflösung. Nach §. 97. Formel I. ist

$$v dt = \sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}$$

$$\text{also } dt = \frac{\sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}}{v}$$

nun, nach Aufgabe 2., $v = \sqrt{4gx}$ ist, so hat man

$$dt = \sqrt{\left[\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{4gx}\right]}$$

aher Const $= (R+h)^2 \cdot \frac{c}{R+h} = (R+h)c.$

rth für Const in der Gleichung geſetzt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\text{Const}}{z^2}$$

giebt $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{(R+h)c}{z^2}$

Der Unterſchied zw[illegible] $= R+h$ und $gy = z$ beſteht in dem Raum, um welchen der Körper durch ſeine Schwere während der Zeit t dem Mittelpunkt g näher gekommen iſt; es iſt aber dieſer Raum $= gt^2$, folglich iſt auch

$$gt^2 = R+h-z$$

und daher $z = R+h-gt^2 = (R+h)\left[1 - \frac{gt^2}{R+h}\right]$

und hiernach iſt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{(R+h)c}{(R+h)^2\left[1 - \frac{gt^2}{R+h}\right]^2}$$

und dieſes giebt

$$d\varphi = \frac{c}{R+h} \cdot \frac{dt}{\left[1 - \frac{gt^2}{R+h}\right]^2}$$

$$\text{alſo } \varphi = \frac{c}{R+h}\int \frac{dt}{\left[1 - \frac{gt^2}{R+h}\right]^2}$$

$$\text{und } (R+h)\varphi = c\int \frac{dt}{\left[1 - \frac{gt^2}{R+h}\right]^2}$$

Anmerkung. Die weitere Anwendung hiervon enthält die folgende Aufgabe.

Aufgabe 5. Es iſt g, Fig. 167, der Mittelpunkt und ade der Aequator der Erde, welche ſich in der Richtung ade um ihre Axe dreht, ſo daß eine ganze Umwälzung der Erde in 86164 Secunden vollendet wird. Ein Körper fällt von dem Punkte b auf die Oberfläche der Erde herab; es ſoll der Punkt, in welchem der Körper die Erde erreichen wird, im Verhältniß zu der Lage, die der Punkt a in derſelben Zeit haben wird, beſtimmt werden.

Auf-

Auflösung. Es ist nach der oben gefundenen Formel für den Radius des Aequators = R und ab = h,

$$(R+h)\varphi = c\int \frac{dt}{\left(1-\frac{gt^2}{R+h}\right)^2}$$

und wenn hier Zähler und Nenner des zu integrirenden Ausdrucks mit $\left(1+\frac{gt^2}{R+h}\right)^2$ multiplicirt wird, so ist alsdann der Nenner $=\left(1-\frac{gt^2}{R+h}\right)^2 = 1$, weil $\frac{gt^2}{R+h} = 0$ geachtet werden kann. Hiernach wird

$$(R+h)\varphi = c\int dt\left[1+\frac{gt^2}{R+h}\right]^2$$
$$= c\int dt\left[1+\frac{2gt^2}{R+h}\right]$$

weil auch hier das dritte Glied = 0 gesetzt werden kann. Hieraus folgt nun

$$(R+h)\varphi = c\left[t+\frac{2gt^3}{3(R+h)}\right].$$

Trifft der Körper den Aequator in d, so ist der von demselben mittelst der Schwere durchlaufene Raum $= ab = h = gt^2$, und daher $t^2 = \frac{h}{g}$. Setzt man diesen Werth, so wird

$$(R+h)\varphi = c\left[\sqrt{\frac{h}{g}}+\frac{2\sqrt{\frac{h^3}{g}}}{3(R+h)}\right]$$
$$= c\sqrt{\frac{h}{g}}+\frac{c}{R+h}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\frac{h^3}{g}}$$

der von dem Körper durchlaufene Bogen.

Wird die Geschwindigkeit des Punktes a = γ gesetzt, so ist

$$c:\gamma = (gb):(ga) = R+h:R$$

und daher $\frac{c}{R+h} = \frac{\gamma}{R}$

folglich ist die Länge des Bogens

$$ad = c\sqrt{\frac{h}{g}}+\frac{\gamma}{R}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\frac{h^3}{g}}$$

und daher $\text{Const} = (R+h)^2 \cdot \frac{c}{R+h} = (R+h)c$.

Dieſen Werth für Const in der Gleichung geſetzt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\text{Const}}{z^2}$$

giebt $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{(R+h)c}{z^2}$

Der Unterſchied zwiſchen $gb = R+h$ und $gy = z$ beſteht in dem Raum, um welchen der Körper durch ſeine Schwere während der Zeit t dem Mittelpunkt g näher gekommen iſt; es iſt aber dieſer Raum $= \frac{gt^2}{2}$, folglich iſt auch

$$z = R+h-\frac{gt^2}{2}$$

und daher $z^2 = R^2 + \ldots = (R+h)\left[1 - \frac{gt^2}{R+h}\right]$

und hiernach iſt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{(R+h)c}{(R+h)^2\left[1-\frac{gt^2}{R+h}\right]^2}$$

und dieſes giebt

$$d\varphi = \frac{c}{R+h} \cdot \frac{dt}{\left[1-\frac{gt^2}{R+h}\right]^2}$$

$$\text{alſo } \varphi = \frac{c}{R+h}\int \frac{dt}{\left[1-\frac{gt^2}{R+h}\right]^2}$$

$$\text{und } (R+h)\varphi = c\int \frac{dt}{\left[1-\frac{gt^2}{R+h}\right]^2}$$

Anmerkung. Die weitere Anwendung hiervon enthält die folgende Aufgabe.

Aufgabe 5. Es iſt g, Fig. 167, der Mittelpunkt und ade der Aequator der Erde, welche ſich in der Richtung ade um ihre Axe dreht, ſo daß eine ganze Umwälzung der Erde in 86164 Secunden vollendet wird. Ein Körper fällt von dem Punkte b auf die Oberfläche der Erde herab; es ſoll der Punkt, in welchem der Körper die Erde erreichen wird, im Verhältniß zu der Lage, die der Punkt a in derſelben Zeit haben wird, beſtimmt werden.

Auf-

die Gesetze, nach welchen ein Körper in einem Kreisbogen fällt, so erhält man hierdurch die Eigenschaften des einfachen Pendels, und wird die Bahn, in welcher ein Körper herabfallen muß, als eine Cykloide angenommen, so findet man die Eigenschaft dieser Curve, daß alle Bogen derselben in gleicher Zeit durchlaufen werden, und man findet zugleich, daß sie die Curve des schnellsten Falles ist, so daß, wenn ein Körper z. B. von a nach b, Fig. 166, herabfallen soll, er den Punkt b in der möglichst kürzesten Zeit erreicht, wenn die Bahn ayb eine Cykloide ist.

Vierter Abschnitt.

Einiges von dem Stoße der Körper.

§. 99.

Von dem Stoße der Körper im Allgemeinen.

Zwei Körper stoßen einander, wenn sie während der Bewegung zusammentreffen, sei es, daß nur einer der beiden Körper sich bewegt, während der andere ruht, oder daß beide sich bewegen. Wenn beide Körper sich bewegen, so kann ein solches Zusammentreffen nur stattfinden, wenn beide dieselbe Bahn durchlaufen, oder wenn die Bahnen sich schneiden. In dem ersten Falle stoßen beide Körper zusammen, wenn beide die Bahn in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen, oder wenn sie die Bahn zwar in derselben Richtung zurücklegen, der nachfolgende Körper aber eine größere Geschwindigkeit hat. Ist jedoch die Bahn eine geschlossene, wie z. B. ein Kreis, so müssen die Körper bei ihrer Bewegung immer zusammentreffen, wenn sie verschiedene Geschwindigkeiten haben.

Die Wirkung des Stoßes bei dem Zusammentreffen zweier Körper ist von der Eigenthümlichkeit derselben abhängig, und man unterscheidet daher hierbei die Körper in elastische und in solche, die nicht elastisch sind. Ein Körper wird elastisch genannt, wenn er der Einwirkung eines Druckes nachgiebt, so

daß er hierdurch seine Form ändert, aber, sobald der Druck nachläßt, mit einer dem erlittenen Drucke gleichen Kraft seine vorige Form wieder anzunehmen strebt. Behält ein Körper aber die durch einen Druck veränderte Form auch noch, nachdem der Druck aufgehört hat, ohne ein Bestreben zu äußern, die frühere Form wieder anzunehmen, so ist er unelastisch. Ein Körper wird weich genannt, wenn die geringste Kraft hinreicht, um seine Form zu ändern, und er ist um so härter, eine je größere Kraft erforderlich ist, um eine Aenderung seiner Form hervorzubringen. Ein absolut harter Körper würde derjenige sein, der überhaupt seine Form nicht ändert, wie groß die Kraft auch sein mag, die auf ihn einwirkt. Es giebt aber in der Natur keinen vollkommen harten Körper, eben so giebt es auch keinen vollkommen elastischen Körper; das Bestreben, die vorige Form wieder anzunehmen, ist immer geringer als die Kraft, durch welche die Form geändert worden ist.

Wenn zwei Körper zusammenstoßen, so berühren sie sich in einer Ebene. Steht nun die Linie, welche die Schwerpunkte beider Körper verbindet, normal auf dieser Ebene, so ist der Stoß central. Der centrale Stoß ist gerade, wenn zugleich die Linie, welche die Schwerpunkte verbindet, mit der Bahn der Körper zusammenfällt; ist dieses nicht der Fall, so nennt man den Stoß schief. Der Stoß ist excentrisch, wenn die Linie, welche die Schwerpunkte der beiden zusammenstoßenden Körper verbindet, nicht normal auf der Berührungsebene derselben ist.

Der Stoß zweier Kugeln ist immer central, wenn der Stoß keine andere Wirkung auf dieselben äußert, als daß er sie an der Stelle, wo beide zusammen stoßen, platt drückt, und es werden bei Erklärung der Gesetze des Stoßes die bewegten Körper als Kugeln angenommen, um hierdurch die Untersuchung zu vereinfachen.

§. 100.

Aufgaben von dem Stoße unelastischer Körper.

Aufgabe 1. Zwei Kugeln A und B bewegen sich gleichförmig in derselben geraden Linie an, Fig. 168, nach einer und derselben Richtung. Die Masse der ersten Kugel ist = M',

und ihre Geschwindigkeit = c', die Masse der zweiten Kugel = M'', und ihre Geschwindigkeit = c''; es soll das Gesetz für die Bewegung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes gefunden werden.

Auflösung. Es sei zu gleicher Zeit die Kugel A in a, B in b, ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt in g, und der Abstand der Schwerpunkte beider Kugeln von einander sei = w', so ist, nach §. 30.,

$$ag = \frac{M''w'}{M' + M''} \text{ und } bg = \frac{M'w'}{M' + M''}$$

Nach der Zeit t sei A in α, B in β und der gemeinschaftliche Schwerpunkt in γ, so ist

$$a\alpha = c't;\ b\beta = c''t$$

$$\text{also } \alpha\beta = ab - a\alpha + b\beta = w' - c't + c''t = w''$$

$$\text{folglich ist } \alpha\gamma = \frac{M''w''}{M' + M''}$$

$$\text{und } a\gamma = a\alpha + \alpha\gamma = c't + \frac{M''w''}{M' + M''}$$

$$\text{und daher } g\gamma = a\gamma - ag$$

$$= c't + \frac{M''w''}{M' + M''} - \frac{M''w'}{M' + M''}$$

Es ist also

$$g\gamma = c't + \frac{M''(w'' - w')}{M' + M''}$$

und da $w'' - w' = c''t - c't$, so ist

$$g\gamma = c't + \frac{M''c''t - M''c't}{M' + M''} = \frac{M'c't + M''c''t}{M' + M''}$$

Hiernach ist der in der Zeit t von dem gemeinschaftlichen Schwerpunkt beider Körper zurückgelegte Weg

$$g\gamma = \left(\frac{M'c' + M''c''}{M' + M''}\right) \cdot t.$$

Da nun hier nach der Voraussetzung c' und c'' unveränderlich sind, so wie dieses auch bei M' und M'' der Fall ist, so ist die Bewegung des Schwerpunktes gleichförmig, und es ist, wenn die Geschwindigkeit desselben = x gesetzt wird,

$$g\gamma = xt$$

und folglich ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes

$$x = \frac{M'c' + M''c''}{M' + M''}$$

Zuſatz. Iſt der Körper B in Ruhe, ſo daß A ſich nur bewegt, ſo wird in der gefundenen Formel $c'' = 0$, und daher

$$x = \frac{M'c'}{M' + M''}$$

Bewegt B ſich aber in einer, der Bewegung von A entgegengeſetzten Richtung mit der Geſchwindigkeit c'', ſo wird c'' negativ, und daher für dieſen Fall

$$x = \frac{M'c' - M''c''}{M' + M''}$$

Aufgabe 2. Zwei Körper A und B bewegen ſich gleichförmig mit den Geſchwindigkeiten c' und c'', A von a und B von b aus, Fig. 168, beide in derſelben geraden Linie an und nach derſelben Richtung: ſie ſtoßen in Folge dieſer Bewegung zuſammen, und da ſie nicht elaſtiſch ſind, ſo erfolgt nach dem Zuſammentreffen ihre Bewegung gemeinſchaftlich; es ſoll die Geſchwindigkeit dieſer Bewegung gefunden werden.

Auflöſung. Die Einwirkung von A und B aufeinander, welche durch das Zuſammenſtoßen ſtattfindet, erfolgt gegenſeitig, ſo daß B dem A mit derſelben Kraft widerſteht, mit welcher A auf B einwirkt, und es ſind hierbei Wirkung und Gegenwirkung im Gleichgewicht. Dieſe gegenſeitige Einwirkung kann daher auf die gemeinſchaftliche Bewegung von A und B durchaus keinen Einfluß haben. Die gemeinſchaftliche Bewegung aber iſt die des gemeinſchaftlichen Schwerpunktes beider Körper, alſo wird die Bewegung dieſes Schwerpunktes nicht geändert, und es iſt die geſuchte Geſchwindigkeit deſſelben zugleich die geſuchte Geſchwindigkeit der gemeinſchaftlichen Bewegung beider Körper nach ihrem Zuſammentreffen. Setzt man alſo dieſe geſuchte Geſchwindigkeit $= x$, ſo iſt, wie bei Aufgabe 1.,

$$x = \frac{M'c' + M''c''}{M' + M''}$$

Zuſatz 1. So einleuchtend es auch iſt, daß das Zuſammenſtoßen zweier Körper auf die Bewegung ihres gemein-

ihre Geschwindigkeit = c', die Masse der zweiten Kugel M'', und ihre Geschwindigkeit = c''; es soll das Gesetz die Bewegung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes ge- den werden.

Auflösung. Es sei zu gleicher Zeit die Kugel A in a, n b, ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt in g, und der Ab- d der Schwerpunkte beider Kugeln von einander sei = w', ft, nach §. 30.,

$$ag = \frac{M''w'}{M' + M''} \text{ und } bg = \frac{M'w'}{M' + M''}$$

ch der Zeit t sei A in α, B in β und der gemeinschaftliche werpunkt in γ, so ist

$$a\alpha = c't;\ b\beta = c''t$$

$$\text{also } \alpha\beta = ab - a\alpha + b\beta = w' - c't + c''t = w''$$

$$\text{folglich ist } \alpha\gamma = \frac{M''w''}{M' + M''}$$

$$\text{und } a\gamma = a\alpha + \alpha\gamma = c't + \frac{M''w''}{M' + M''}$$

$$\text{und daher } g\gamma = a\gamma - ag$$

$$= c't + \frac{M''w''}{M' + M''} - \frac{M''w'}{M' + M''}$$

ist also

$$g\gamma = c't + \frac{M''(w'' - w')}{M' + M''}$$

da $w'' - w' = c''t - c't$, so ist

$$g\gamma = c't + \frac{M''c''t - M''c't}{M' + M''} = \frac{M'c't + M''c''t}{M' + M''}$$

rnach ist der in der Zeit t von dem gemeinschaftlichen hwerpunkt beider Körper zurückgelegte Weg

$$g\gamma = \left(\frac{M'c' + M''c''}{M' + M''}\right) \cdot t.$$

nun hier nach der Voraussetzung c' und c'' unveränder- sind, so wie dieses auch bei M' und M'' der Fall ist, so die Bewegung des Schwerpunktes gleichförmig, und es ist, n die Geschwindigkeit desselben = x gesetzt wird,

$$g\gamma = xt$$

folglich ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes

genſeitige Druck beider Körper auf einander = P, ſo iſt für A, deſſen Geſchwindigkeit durch das Zuſammentreffen mit B verzögert wird,

$$dv' = -\frac{2gPdt}{M'}, \text{ alſo } -M'dv' = 2gPdt$$

und für B iſt

$$dv'' = \frac{2gPdt}{M''}, \text{ folglich } M''dv'' = 2gPdt$$

und es iſt hiernach

$$-M'dv' = M''v'', \text{ alſo } M''dv'' + M'dv' = 0$$

folglich iſt

$$M''v'' + M'v' = \text{Const.}$$

Da nun zu Anfang des Stoßes, alſo für $t = 0$, iſt $v' = c'$ und $v'' = c''$, ſo iſt auch

$$M''c'' + M'c' = \text{Const.}$$

und die allgemeine Gleichung iſt folglich

$$M''v'' + M'v' = M''c'' + M'c'.$$

Iſt nun am Ende des Stoßes die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit = x, ſo wird $v'' = v' = x$, und daher

$$M''x + M'x = M''c'' + M'c'.$$

und hieraus erhält man ebenfalls

$$x = \frac{M'c' + M''c''}{M' + M''}$$

Aufgabe 3. Zwei Kugeln A und B bewegen ſich gleichförmig in den geraden Linien am und bn, Fig. 169, und es iſt zu gleicher Zeit A in a und B in b, und die Geſchwindigkeiten c' und c'' beider Körper ſind ſo, daß ſie in d zuſammenſtoßen; es ſoll die Geſchwindigkeit ihres gemeinſchaftlichen Schwerpunktes, und die Richtung, in welcher er ſich bewegt, angegeben werden.

Auflöſung. Nach der Zeit t' ſei a in α und b in β, und das Zuſammentreffen beider Kugeln in d finde nach der Zeit t ſtatt, ſo iſt

$$ad = c't;\ bd = c''t;\ a\alpha = c't' \text{ und } b\beta = c''t'$$

$$\text{da nun } c't : c''t = c't' : c''t'$$

ſo iſt auch

$$ad : bd = a\alpha : b\beta.$$

Zieht man alſo ab und $\alpha\beta$, ſo ſind dieſe Linien parallel, und

es ist aus gleichen Gründen, wenn man den Ort, welchen beide Kugeln zu einer andern Zeit zugleich einnehmen, durch eine gerade Linie verbindet, diese ebenfalls der ab parallel.

Ist nun, während die Kugeln in a und b sich befinden, g der gemeinschaftliche Schwerpunkt derselben, und man zieht dg, so ist

$$dg : d\gamma = ga : \gamma\alpha$$
$$\text{und } dg : d\gamma = gb : \gamma\beta$$
$$\text{folglich } ga : gb = \gamma\alpha : \gamma\beta.$$

Da nun, wenn die Masse der Kugel A = M′ und der Kugel B = M″, weil g der gemeinschaftliche Schwerpunkt sein soll,

$$ga : gb = M'' : M'$$
$$\text{so ist auch } \gamma\alpha : \gamma\beta = M'' : M'$$

und es ist folglich γ der gemeinschaftliche Schwerpunkt beider Körper, während dieselben in α und β sind. Hieraus geht also hervor, daß der gemeinschaftliche Schwerpunkt der beiden Körper fortwährend in der geraden Linie gd sich befindet.

Für t′ = 1 ist $a\alpha = c'$ die Geschwindigkeit von A, und $b\beta = c''$ die von B, und es ist alsdann die entsprechende Geschwindigkeit des gemeinschaftlichen Schwerpunktes $x = g\gamma$.

Zusatz. Da hiernach die Geschwindigkeit des gemeinschaftlichen Schwerpunktes beider Kugeln, so wie die Richtung der Bewegung geometrisch gefunden ist, so lassen sich nun auch leicht für die Geschwindigkeit und für die Richtung algebraische Ausdrücke finden. Nimmt man t = 1, also da = c′ und db = c″, so ist dg = x die gesuchte Geschwindigkeit. Es ist aber der Winkel adb = m gegeben, und auch das Verhältniß von bg : ga = M′ : M″; es kommt also bloß darauf an, aus dem gegebenen Dreieck adb und dem Stück bg die Länge von dg zu berechnen, und man erhält die Richtung der Bewegung, wenn man auch ∠bdg = φ sucht.

Aufgabe 4. Zwei Körper A und B bewegen sich gleichförmig in den geraden Linien am, bn, Fig. 170, und es befindet sich zu gleicher Zeit A in a und B in b. Der Körper A schneidet nach der Zeit t die Bahn von B in α, er legt also in der Zeit t mit der Geschwindigkeit c′ den Raum $a\alpha$ zurück, und B kommt in dieser Zeit von b bis β, es wird

alſo von B der Raum $b\beta$ in der Zeit t mit der Geſchwindigkeit c'' zurückgelegt. Es ſoll hieraus die Bewegung des gemeinſchaftlichen Mittelpunktes beider Körper beſtimmt werden.

Auflöſung. Da zu gleicher Zeit A in a und B in b iſt, ſo kann man den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt beider Körper für dieſen Augenblick finden, wenn man ab zieht, und dieſe Linie in g ſo theilt, daß

$$ag : gb = M'' : M'$$

wenn, wie in den vorigen Aufgaben, M' die Maſſe von A und M'' die von B bezeichnet.

Da ferner zu gleicher Zeit A in α und B in β anlangt, ſo findet man den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt für dieſen Zeitpunkt, wenn $\alpha\beta$ in γ getheilt wird, ſo daß

$$\alpha\gamma : \gamma\beta = M'' : M'.$$

Wird nun g mit γ verbunden, ſo giebt dieſe Linie die Richtung des gemeinſchaftlichen Schwerpunktes, und es iſt $g\gamma$ der von demſelben in der Zeit t, in welcher A von a nach α und B von b nach β kommt, zurückgelegte Weg. Theilt man hiernach $g\gamma$ durch t, ſo wird die geſuchte Geſchwindigkeit der Bewegung des gemeinſchaftlichen Schwerpunktes gefunden.

§. 101.

Geſetze des Stoßes elaſtiſcher Körper.

Wenn zwei nicht elaſtiſche Körper zuſammenſtoßen, ſo wird durch die Kraft des Stoßes, wenn die Körper nicht abſolut hart ſind, ihre Form geändert, aber ſie behalten nach dem Stoße die geänderte Form, weil ſie unelaſtiſch ſind. Die ganze Wirkung des Stoßes äußert ſich nun nur noch darin, daß ſie die Bewegung mit gleicher Geſchwindigkeit in derſelben Richtung fortſetzen, und alſo jetzt gleichſam ein zuſammenhängendes Ganze bilden. Iſt vor dem Stoße die Geſchwindigkeit des Körpers A $= c'$, und ſeine Maſſe $= M'$; die Geſchwindigkeit von B $= c''$, und die Maſſe deſſelben $= M''$, und bewegen beide ſich nach derſelben Richtung, ſo wird, wenn man die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit nach dem Stoße $= \gamma$ ſetzt, nach §. 100. Aufgabe 1.,

$$\gamma = \frac{c'M' + c''M''}{M' + M''}$$

Dieſe Formel iſt ganz allgemein und behält auch ihre Gültigkeit, wenn die Körper in entgegengeſetzten Richtungen ſich bewegen, oder wenn der eine ruht; nur muß man in dem einen Falle c'' negativ und in dem andern Falle $= 0$ annehmen.

Behält man die allgemeine Form bei, ſo verliert A einen Theil ſeiner Geſchwindigkeit durch das Zuſammenſtoßen mit B, und B gewinnt an Geſchwindigkeit. Wird der Verluſt, welchen A an Geſchwindigkeit erleidet, $= v$ geſetzt, und das, was B an Geſchwindigkeit gewinnt, $= w$, ſo iſt

$$v = c' - \frac{c'M' + c''M''}{M' + M''} = \frac{(c' - c'')M''}{M' + M''}$$

$$\text{und } w = \frac{c'M' + c''M''}{M' + M''} - c'' = \frac{(c' - c'')M'}{M' + M''}$$

Sind die beiden aufeinander ſtoßenden Körper elaſtiſch, ſo iſt anfangs die Wirkung des Stoßes ganz dieſelbe, wie bei unelaſtiſchen Körpern, bis durch den Stoß beide dieſelbe Geſchwindigkeit erlangt haben. Jetzt kann wegen der gleichen Geſchwindigkeit keine fernere Einwirkung ſtattfinden. Es iſt aber durch den Stoß die Form der Körper geändert worden, und da die Körper elaſtiſch ſind, ſo haben ſie ein Beſtreben, ihre vorige Form wieder herzuſtellen; die Kraft, mit welcher die Herſtellung der vorigen Form erfolgt, iſt der gleich, durch welche ſie geändert worden, und dieſe Kraft wirkt in einer Richtung, welche der entgegengeſetzt iſt, durch welche die Form des Körpers geändert wurde.

Dieſes führt zu der folgenden allgemeinen Aufgabe:

Aufgabe. Die elaſtiſchen Kugeln, deren Maſſen M' und M'' ſind, bewegen ſich in einer und derſelben geraden Linie nach derſelben Richtung mit den Geſchwindigkeiten c' und c'', und ſtoßen in Folge ihrer Bewegung zuſammen; es ſollen die Geſchwindigkeiten γ' und γ'', welche dieſelben nach erfolgtem Stoße haben, gefunden werden.

Auflöſung. Es ſei B die vorangehende und A die nachfolgende Kugel, und daher $c' > c''$, weil ſonſt kein Zuſammenſtoßen erfolgen kann. Durch das Zuſammenſtoßen erleidet A einen Verluſt an Geſchwindigkeit $= v$, und es wird hierdurch B zuſammengedrückt und beſtrebt ſich nach dem

Stoße, die vorige Gestalt wieder anzunehmen; hierbei wirkt B auf A mit derselben Kraft zurück, durch welche A einen Verlust der Geschwindigkeit = v erlitten hat. Durch diese Rückwirkung muß also, da sie der Bewegung des A entgegengesetzt ist, A abermals einen Verlust an Geschwindigkeit = v erleiden, folglich verliert A einen Verlust an Geschwindigkeit = 2v, und es ist daher

$$\gamma' = c' - 2v.$$

B gewinnt durch den Stoß eine Geschwindigkeit = w, und es wird hierbei A zusammengedrückt und sucht, wegen der Elasticität, die vorige Form mit derselben Kraft wieder anzunehmen, durch welche B die Geschwindigkeit = w gewonnen hat. Die Ausdehnung erfolgt in der Berührungsfläche, und es wirkt A daher bei dieser Ausdehnung in der Richtung, nach welcher B sich bewegt; hierdurch muß B abermals einen Zuwachs an Geschwindigkeit erhalten. Folglich gewinnt B durch die ganze Wirkung des Stoßes eine Geschwindigkeit = 2w, und es ist daher

$$\gamma'' = c'' + 2w.$$

Nun ist nach der obigen Ableitung

$$v = \frac{(c'-c'')M''}{M'+M''} \text{ und } w = \frac{(c'-c'')M'}{M'+M''}$$

folglich sind die gesuchten Geschwindigkeiten nach erfolgtem Stoß

$$\gamma' = c' - \frac{2(c'-c'')M''}{M'+M''} = \frac{c'(M'-M'')+2c''M''}{M'+M''}$$

$$\text{und } \gamma'' = c'' + \frac{2(c'-c'')M''}{M'+M''} = \frac{2c'M'-c''(M'-M'')}{M'+M''}$$

§. 102.

Anwendungen.

Die so eben für die Geschwindigkeiten γ' und γ'' der elastischen Kugeln A und B nach ihrem Zusammenstoßen gefundenen Formeln gelten ganz allgemein, wenn die Bewegungen in einer und derselben geraden Linie stattfinden, und es ergeben sich hieraus die Gesetze für die verschiedenen hier möglichen Fälle wie folgt:

1) A und B bewegen sich in derselben Richtung. Ist nun für diesen Fall $c' = c''$, so wird

$$\gamma' = c' - \frac{2(c' - c'')M''}{M' + M''} = c'$$

$$\text{und } \gamma'' = c'' + \frac{2(c' - c'')M'}{M' + M''} = c''.$$

Beide Körper behalten also ihre Geschwindigkeit, da sie unter diesen Umständen gar nicht zusammenstoßen. Ist aber $c' < c''$, so wird

$$\gamma' = c' + \frac{2(c'' - c')M''}{M' + M''}$$

$$\text{und } \gamma'' = c'' - \frac{2(c'' - c')M'}{M' + M''}.$$

In diesem Falle wird also die Geschwindigkeit von A größer und die von B wird kleiner; die Bewegung geschieht also in der Art, daß A der vorangehende Körper ist und B der nachfolgende.

Soll aber ein Zusammenstoßen nach einiger Zeit stattfinden, und soll hierbei B vorangehen und A folgen, so muß $c' > c''$ sein. Bei dieser Voraussetzung sei nun

a) $M' = M''$, so wird

$$\gamma' = \frac{2c''M''}{M' + M''} = \frac{2c''M'}{2M'} = c''$$

$$\text{und } \gamma'' = \frac{2c'M'}{M' + M''} = \frac{2c'M'}{2M'} = c'.$$

Beide Kugeln wechseln also ihre Geschwindigkeit nach dem Stoße. Ist

b) $M' > M''$, so erhält man

$$\gamma' = \frac{c'(M' - M'') + 2c''M''}{M' + M''}$$

und es hat dieser Ausdruck jedenfalls einen positiven Werth. A hat also auch nach dem Stoße noch eine Bewegung in derselben Richtung. Von B versteht sich dieses von selbst. Ist

c) $M' < M''$, so wird

$$\gamma' = \frac{-c'(M'' - M') + 2c''M''}{M' + M''}.$$

Ist hier $c'(M'' - M') = 2c''M''$, so wird $\gamma = 0$, und für $c'(M'' - M') > 2c''M''$ wird γ negativ. In dem ersten

Falle ruht A nach dem Stoße, und in dem zweiten Falle bewegt sich A nach dem Stoße in einer entgegengesetzten Richtung.

2) Es bewegen sich A und B nach entgegengesetzten Richtungen. Für diesen Fall ist in den allgemeinen Formeln c'' negativ anzunehmen, und dieselben werden daher, indem jetzt die Bewegung in der Richtung von A positiv ist,

$$\gamma' = c' - \frac{2(c'+c'')M''}{M'+M''}$$

$$\text{und } \gamma'' = c'' + \frac{2(c'+c'')M'}{M'+M''}$$

Ist nun bei dieser Voraussetzung

a) $M' = M''$, so wird

$$\gamma' = c' - \frac{2(c'+c'')M'}{2M'} = c' - (c'+c'') = -c''$$

$$\text{und } \gamma'' = -c'' + \frac{2(c'+c'')M'}{2M'} = -c'' + (c'+c'') = +c'.$$

Beide Körper wechseln also nach dem Stoße ihre Geschwindigkeiten und bewegen sich jeder in der, seiner frühern Bewegung entgegengesetzten Richtung.

b) Ist $c' = c''$, so wird

$$\gamma' = c' - \frac{4c'M''}{M'+M''} = \frac{c'(M'-3M'')}{M'+M''}$$

$$\text{und } \gamma'' = -c' + \frac{4c'M'}{M'+M''} = \frac{c(3M'-M'')}{M'+M''}$$

Hieraus werden nun wieder dieselben Werthe für γ' und γ'' wie in dem vorigen Falle erhalten, wenn man $M' = M''$ setzt.

3) Es sei vor dem Stoße B in Ruhe, so ist $c'' = 0$, und die allgemeinen Formeln werden

$$\gamma' = c' - \frac{2c'M''}{M'+M''} = \frac{c'(M'-M'')}{M'+M''}$$

$$\text{und } \gamma'' = \frac{2c'M'}{M'+M''}$$

Ist nun für diesen Fall

a) $M' = M''$, so wird

$$\gamma' = 0 \text{ und } \gamma'' = c'.$$

Nach dem Stoße ruhet also A, und B bewegt sich mit der frühern Geschwindigkeit des A.

b) Ist $M' > M''$, so bewegen beide Körper nach dem Stoße sich in der früheren Richtung von A.

c) Wenn aber $M' < M''$, so wird γ' negativ, und es bewegt sich also nach dem Stoße B in der Richtung der früheren Bewegung des A, und A erhält eine Bewegung in entgegengesetzter Richtung.

§. 103.
Aufgaben.

Aufgabe 1. Zwei elastische Kugeln bewegen sich in einer und derselben geraden Linie, und stoßen in Folge dieser Bewegung zusammen; es soll angegeben werden, wie groß die Geschwindigkeit der Bewegung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes nach dem Stoße sein wird.

Auflösung. Nach dem Stoße ist die Geschwindigkeit von $A = \gamma'$, und die von $B = \gamma''$. Sind nun die Massen dieser Körper M' und M'', und setzt man die Geschwindigkeit des gemeinschaftlichen Schwerpunktes nach dem Stoße $= z$, so ist, nach §. 100. Aufgabe 1.,

$$z = \frac{M'\gamma' + M''\gamma''}{M' + M''}$$

$$\text{also } (M' + M'')z = M'\gamma' + M''\gamma''.$$

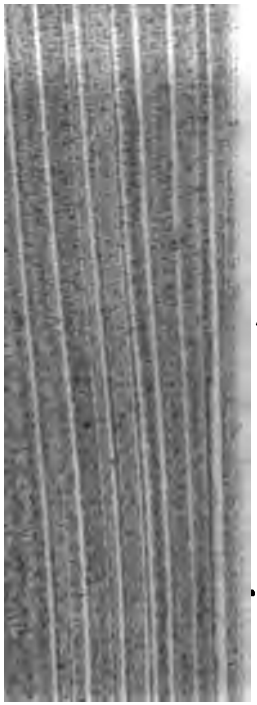
Setzt man nun hier für γ' und γ'' die allgemeinen, §. 101. gefundenen Werthe, so wird

$$(M' + M'')z = \left\{\begin{array}{l} M'\left(c' - \dfrac{2(c' - c'')M''}{M' + M''}\right) \\ +M''\left(c'' + \dfrac{2(c' - c'')M'}{M' + M''}\right) \end{array}\right\}$$

$$\text{folglich ist } (M' + M'')z = M'c' + M''c''$$

$$\text{und daher } z = \frac{M'c' + M''c''}{M' + M''}$$

die gesuchte Geschwindigkeit der Bewegung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes nach dem Stoße. Es ist aber der gefundene Ausdruck auch der Werth für die Geschwindigkeit der Bewegung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes vor dem Stoße; folglich gilt der für die Bewegung des gemeinschaft-



dieſer Geſchwindigkeit
Weg = $t\gamma'$ zurück, ur
folglich iſt der Abſta
= $t\gamma'' - t\gamma'$, und ſ
meinen Werthe aus

$$w =$$

und es iſt daher

$$w = t\left[c'' - c\right.$$
$$= t[c'' - c$$
$$= t(c' - c''$$

der geſuchte Abſtand
nach dem Stoße.

Eben dieſen Ab
cunden vor dem St
in gleichen Zeiten v

Aufgabe 3.

ſchen Körpern die E

daher ist, wenn man die erste Gleichung mit M' und die zweite mit M'' multiplicirt,

$$M'\gamma' = M'c' - \frac{2(c' - c'')M'M''}{M' + M''}$$

$$\text{und } M''\gamma'' = M''c'' + \frac{2(c' - c'')M'M''}{M' + M''}$$

und hieraus erhält man durch Addition

$$M'\gamma' + M''\gamma'' = M'c' + M''c''$$

die algebraische Summe der Momente ist also vor und nach dem Stoße gleich groß.

§. 104.

Aufgaben von dem schiefen Stoß.

Aufgabe 1. Zwei nicht elastische Kugeln A und B bewegen sich in den geraden Linien $A\alpha$, $B\beta$, Fig. 171., so daß sie in gleichen Zeiten die Räume $A\alpha$ und $B\beta$ zurücklegen und hier zusammenstoßen. Es sollen die Geschwindigkeiten und Richtungen der Körper nach dem Stoße gefunden werden.

Auflösung. Man verbinde die Mittelpunkte α und β beider Kugeln, verlängere diese Linien zu beiden Seiten, fälle darauf die Normalen Aa'', Bb'' und vollende die hierdurch bestimmten Rechtecke $Aa'\alpha a''$ und $Bb'\beta b''$, so läßt sich die Geschwindigkeit $A\alpha = c$ des Körpers A, in die Seitengeschwindigkeiten $Aa'' = a'\alpha = c'$ und $Aa' = a''\alpha = c''$ zerlegen. Die Geschwindigkeit $B\beta = \gamma$ des Körpers B wird eben so zerlegt in $Bb'' = b'\beta = \gamma'$ und in $Bb' = b''\beta = \gamma''$. Nun sind die Richtungen der Geschwindigkeiten c' und γ' parallel, sie bleiben also den Körpern auch nach dem Zusammenstoßen, und in Folge dessen hat nach dem Stoße

A die Geschwindigkeit $\alpha\alpha' = c'$

und B = = $\beta\beta' = \gamma'$.

Die Richtungen der Geschwindigkeiten c'' und γ'' sind einander gerade entgegengesetzt, und beide Körper erhalten hierdurch eine gemeinschaftliche Bewegung, deren Geschwindigkeit v, nach §. 100. Aufg. 2., ausgedrückt wird durch

$$v = \frac{c''M' - \gamma''M''}{M' + M''}$$

Diese Bewegung erfolgt, wenn, wie hier vorausgesetzt wird, $c''M' \quad \gamma''M''$ ist, in der Richtung $\alpha\beta$. Nimmt man also in dieser Richtung $\alpha\alpha'' = \beta\beta'' = v$, so hat nach dem Zusammenstoßen

A eine Geschwindigkeit $c' = \alpha\alpha'$ und $v = \alpha\alpha''$, die vereinte Wirkung beider giebt die Diagonale αx des Rechtecks $\alpha''\alpha\alpha' x$. Eben so hat

B die Geschwindigkeiten $c'' = \beta\beta'$ und $v = \beta\beta''$, deren vereinte Wirkung die Diagonale βz des Rechtecks $\beta''\beta\beta' z$ ist.

Es werden also durch diese Diagonalen die gesuchten Geschwindigkeiten und Richtungen beider Körper nach dem Stoße ausgedrückt.

Zusatz 1. Die algebraischen Formeln für die Geschwindigkeiten $\alpha x = x$ und $\beta z = z$ ergeben sich wie folgt:

Setzt man $\angle A\alpha a' = \varphi$ und $\angle B\beta b' = \psi$, so ist für $A\alpha = c$ und $B\beta = \gamma$,

$$\alpha\alpha' = a'\alpha = c' = c\cos\varphi \text{ und } a''\alpha = c'' = c\sin\varphi$$
$$\beta\beta' = b'\beta = \gamma' = \gamma\cos\psi \text{ und } b''\beta = \gamma'' = \gamma\sin\psi$$

$$\text{daher ist } \alpha\alpha'' = \beta\beta'' = v = \frac{c''M' - \gamma''M''}{M' + M''}$$

$$\text{also } v = \frac{c\sin\varphi \cdot M' - \gamma\sin\psi M''}{M' + M''}$$

und es ist nun

$$(\alpha x) = x = \sqrt{[(c')^2 + v^2]}$$
$$\text{und } (\beta z) = z = \sqrt{[(\gamma')^2 + v^2]}.$$

Zusatz 2. Auch die Richtungen der Bewegungen nach dem Stoße lassen sich leicht bestimmen, denn setzt man $\angle\alpha''\alpha x = \varphi'$ und $\angle\beta'\beta z = \psi'$, so ist

$$x : c' = 1 : \cos\varphi', \text{ also } \cos\varphi' = \frac{c'}{x}$$

$$\text{und } z : \gamma' = 1 : \cos\psi', \text{ also } \cos\psi' = \frac{\gamma'}{z}.$$

Aufgabe 2. Es ist, Fig. 171, β ein fester unbeweglicher Körper, und der unelastische Körper A bewegt sich in der Richtung $A\alpha$ mit der Geschwindigkeit c, so daß er auf β stößt; es soll die Bewegung desselben nach dem Stoße gefunden werden.

Auflösung. Der Theil $a''\alpha = c''$ der Geschwindigkeit

von A ist normal gegen den Widerstand, welchen β leistet, und wird durch denselben aufgehoben. Der Theil $a'\alpha = c'$ der Geschwindigkeit aber ist parallel dem Widerstande und erleidet durch denselben keine Aenderung. Folglich wird der Körper A nach dem Stoße mit der Geschwindigkeit $= c'$ seine Bewegung in der Richtung $\alpha\alpha'$ fortsetzen.

Aufgabe 3. Zwei elastische Kugeln A und B bewegen sich in den geraden Linien $A\alpha$ und $B\beta$, Fig. 172, so daß sie $A\alpha$ und $B\beta$ in gleichen Zeiten zurücklegen und hier zusammenstoßen; es sollen die Geschwindigkeiten und Richtungen der Bewegung beider Körper nach dem Stoße gefunden werden.

Auflösung. Behält man hier die Bezeichnung von Aufgabe 1. bei, so findet man wieder für die Geschwindigkeit $A\alpha = c$ des Körpers A, die Seitengeschwindigkeiten $a'\alpha = c'$ und $a''\alpha = c''$, von welchen die erstere dem Körper bleibt. Eben so findet man für $B\beta = \gamma$, als die Geschwindigkeit des Körpers B, die Seitengeschwindigkeiten $b'\beta = \gamma'$ und $b''\beta = \gamma''$, und es bleibt auch dem Körper B die erstere dieser Geschwindigkeiten.

Die Bewegungen mit den Geschwindigkeiten c'' und γ'' aber sind einander entgegengesetzt, und weil die Körper elastisch sind, so entstehe hieraus durch das Zusammenstoßen für den Körper A eine Geschwindigkeit v' und für B die Geschwindigkeit v'', so ist, nach §. 102. No. 2.,

$$v' = c'' - \frac{2\,(c'' + \gamma'')\,M''}{M' + M''}$$

$$\text{und } v'' = -\gamma'' + \frac{2\,(c'' + \gamma'')\,M'}{M' + M''}$$

beide in der Richtung $\alpha\beta$.

Findet man nun den Werth von v' negativ, so wird $\alpha\alpha'' = v'$ in der entgegengesetzten Richtung genommen, und es ist alsdann die Diagonale αx des durch $\alpha\alpha' = c'$ und $\alpha\alpha'' = v'$ bestimmten Rechtecks die Geschwindigkeit und Richtung für die Bewegung des Körpers A nach dem Stoße. Hat aber in einem besonderen Falle v' einen positiven Werth, so muß man, von α aus, v' nach der Richtung $\alpha\beta$ nehmen.

Wird ferner für einen positiven Werth von v'' genommen $\beta\beta'' = v''$, so giebt die Diagonale βz des durch $\beta\beta' = \gamma'$

und $\beta\beta'' = v''$ bestimmten Rechtecks, die Geschwindigkeit und Richtung des Körpers B nach dem Stoße.

Anmerkung. Die algebraischen Formeln für die Bewegung der Körper nach dem Stoße lassen sich hier auf eine gleiche Weise wie bei Aufgabe 1. finden.

Aufgabe 4. Ein elastischer Körper A bewegt sich mit der Geschwindigkeit $= c$ normal gegen den unverrückbaren Gegenstand mn, Fig. 173; es soll die Wirkung des Stoßes angegeben werden.

Auflösung. Trifft A den Gegenstand mn mit einer Kraft $= P$, so wird er durch diese Kraft zusammengedrückt, und sucht nun, da er elastisch ist, mit einer gleichen Kraft seine vorige Form wieder herzustellen: die Folge dieser Kraftäußerung ist, daß er nach dem Stoße in der entgegengesetzten Richtung aA mit derselben Geschwindigkeit sich bewegt.

Zusatz. Dieses Resultat läßt sich aus der allgemeinen Formel §. 101.

$$\gamma' = c' - \frac{2(c' - c'')M''}{M' + M''}$$

auf folgende Art finden:

Da mn ein unverrückbarer Gegenstand sein soll, so ist zunächst seine Bewegung $= 0$, also ist $c'' = 0$, und daher

$$\gamma' = c' - \frac{2c'M''}{M' + M''}$$

Es ist aber zugleich M'' in Verhältniß zu M' unendlich groß, und daher $M' + M''$ nicht verschieden von M'', folglich ist

$$\gamma' = c' - \frac{2c'M''}{M''} = c' - 2c' = -c';$$

der Körper hat also nach dem Stoße dieselbe Geschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung.

Aufgabe 5. Der elastische Körper B bewegt sich in einer schiefen Richtung gegen den unverrückbaren Gegenstand mn, Fig. 173, und stößt auf denselben in dem Punkte a unter einem Winkel $= \varphi$; es soll die Bewegung, welche der Körper nach dem Stoße haben wird, angegeben wird.

Auflösung. Zerlegt man die Geschwindigkeit $Ba = c$ in die Seitengeschwindigkeiten $B\alpha = c'$ parallel mn und $B\beta' = c''$ normal gegen mn, so bleibt dem Körper nach dem

Stoße die Geschwindigkeit $c' = \beta' a = a\beta''$, und die Geschwindigkeit $\alpha a = c''$ geht in die entgegengesetzte $a\alpha = -c''$ über, nach Aufgabe 4. Es sind also nach dem Stoße die Geschwindigkeiten des Körpers $a\beta'' = c'$ und $a\alpha = c''$. Durch die vereinte Wirkung beider durchläuft der Körper nach dem Stoße die Diagonale ax des Rechtecks $\alpha a \beta'' x$, und es ist daher ax die Geschwindigkeit und Richtung des Körpers nach dem Stoße.

Zusatz. Es ist $\Delta a\beta''x \cong \Delta a\beta' B$, folglich ist auch $ax = aB$ und $\angle \beta'' ax = \angle \beta' aB$. Der Körper hat also nach dem Stoße dieselbe Geschwindigkeit wie vor dem Stoße, und die Neigung seiner Bahn gegen mn ist für beide Bewegungen gleich groß, die Richtungen aber liegen auf entgegengesetzten Seiten von der Normale aA.

Bei J. A. List in Berlin sind erschienen:

Dr. E. S. Unger,

Uebungen aus der angewandten Mathematik

für Techniker und besonders für Architekten, Artilleristen, Ingenieure, Forst- und Bergbau-Beamte ꝛc.

complet in zwei Bänden.

Subscriptions-Preis: Druckpapier 5 Rthlr. 2½ Sgr., Schreibpapier 6 Rthlr. 15 Sgr.

Laden-Preis: Druckpapier 6 Rthlr. 22½ Sgr., Schreibpapier 8 Rthlr. 5 Sgr.

Der Subscriptions-Preis für das Ganze Werk besteht nur noch auf kurze Zeit, später tritt der erhöhete Ladenpreis ein; der Subscriptions-Preis für einzelne Abtheilungen aber ist bereits erloschen, und es finden jetzt folgende Ladenpreise statt:

Band I. Druckpapier 3 Rthlr., Schreibpapier 3 Rthlr. 15 Sgr.

Band. II. 1. Druckpapier 1 Rthlr. 22½ Sgr., Schreibpapier 2 Rthlr. 5 Sgr.

Band II. 2. 3. 4. Druckpapier 2 Rthlr., Schreibpapier 2 Rthlr. 15 Sgr.

Der erste Band enthält die Uebungen aus der Stereometrie, der zweite die Uebungen aus der Statik und Mechanik der festen Körper.

Nicht nur die gelehrten Zeitschriften Deutschlands, sondern auch Beurtheilungen in französischen und englischen Literatur-Zeitungen haben die praktische Brauchbarkeit dieses Werkes anerkannt; — die General-Prüfungs-Commission der Preuß. Armee, so wie die General-Inspection der Artillerie haben sich dahin ausgesprochen, daß das Buch eine fühlbare Lücke in der Literatur der mathemathischen und besonders der Kriegs-Wissenschaften ausfülle; — und neuerdings endlich hat das Kriegs-Ministerium durch Circular den sämmtlichen Militair-Unter-

richts-Anstalten des Preuß. Staats die Anschaffung desselben empfohlen.

Eleganteste, beste und wohlfeilste Ausgabe von:

Walter Scott's sämmtliche Werke,

übersetzt und mit erläuternden und historischen Anmerkungen versehen von

v. Halem, Methusal. Müller, Sophie May, Adolph Wagner, R. — F., *r und Dr. Leidenfrost.

55 Bände für 12 Rthlr.

Ueber den innern Werth dieser Ausgabe, — welche sich durch classische Uebersetzung und durch Anmerkungen auszeichnet, die dem Bedürfnisse jedes Gebildeten entsprechen, und ohne welche die mannigfachen Schönheiten und schwer verständlichen Anspielungen des Dichters nur halb genossen werden können, — haben die Urtheile der Gelehrten; über die äußere Ausstattung aber der ungetheilte Beifall des Publikums, welcher eine neue Auflage der meisten Bände nöthig machte, hinlänglich entschieden. — Uns möge es daher nur noch erlaubt sein, hinzuzufügen,

daß diese Ausgabe — selbst abgesehen von ihren vielen und großen Vorzügen — die wohlfeilste von allen ist, welche von diesem Dichter überhaupt existiren.

Um aber denjenigen, welche incomplete Ausgaben des W. Scott besitzen und diese completiren wollen, gefällig zu sein, wollen wir auch die einzelnen Romane abgeben und fügen hier ein Verzeichniß derselben hinzu:

Waverley, übesetzt von v. Halem. 2 Bde..... 15 Sgr.
Nigels Schicksale, übers. v. demselben. 2 Bde. 15 "
Peveril vom Gipfel, übers. von dems. 3 Bde. 22½ "

Kenilworth, überſ. von v. Halem. 2 Bde..... 15 Sgr.
Quentin Durward, überſ. von demſ. 3 Bde. 22½ =
Der ſchwarze Zwerg, überſ. v. Methuſ. Müller..... 7½ =
Der Presbyterianer, überſ. v. demſ. 3 Bde. 22½ =
Ivanhoe, überſ. von Sophie May. 3 Bde..... 22 =
St. Ronans-Brunnen, überſ. v. Adolph Wagner. 3 Bde..... 22½ =
Redgauntlet, überſ. v. Methuſ. Müller. 2 Bde. 15 =
Guy Mannering, [illegible] R. — F. 2 Bde.... 15 =
Der Seeräuber, über[illegible]r. 2 Bde..... 15 =
Die Verlobte, überſ. [illegible]uſ. Müller. 2 Bde. 15 =
Der Talismann, üb[illegible]ophie May. 2 Bde. 15 =
Das Kloſter, überſ. v[illegible]elben. 2 Bde..... 15 =
Der Alterthümler. [illegible]on *r. 2 Bde..... 15 =
Der Abt, überſ. von [illegible] May. 2 Bde..... 15 =
Das Herz von Midlothian (der Kerker von Edinburg), überſ. v. Adolph Wagner. 4 Bde. 1 Rthl.
Die Braut, überſ. v. Lammermoor von Methuſ. Müller. 3 Bde..... 22½ Sgr.
Montroſe, überſ. von demſelben..... 7½ =
Woodſtock, überſ. von Dr. Leidenfroſt. 2 Bde. 15 Sgr.
Robin der Rothe, überſ. von Sophie May. 2 Bde..... 15 =
Die Chronik des Canongate, überſ. von Dr. Leidenfroſt. 2 Bde..... 15 =
Das ſchöne Mädchen von Perth, überſ. von demſelben. 3 Bde..... 22½ =

J. W. L. Gleim's ſämmtliche Werke.

Erſte Originalausgabe
aus des Dichters Handſchriften
durch
Wilhelm Körte.

7 Bände. 8. Schreibpapier. Preis 4 Rthlr.

Bei J. A. List in Berlin ſind erſchienen:

Dr. E. S. Unger

Uebungen aus der angewandten Mathematik

für Techniker und beſonders für Architekten, Artilleriſten, Ingenieure, Forſt- und Bergbau-Beamte ꝛc.

Erſter Band:

Uebungen aus der reinen und angewandten Stereometrie.

(VI und 668 Seiten) mit 5 Kupfertafeln.

Subſcriptionspreis 2 Rthlr. 6 ggr., Schreibpapier 2 Rthlr. 16 ggr.; Ladenpreis 3 Rthlr., Schreibpapier 3 Rthlr. 12 ggr.

Deſſelben Werkes Zweiter Band:

Uebungen aus der Statik und Mechanik der feſten Körper.

Erſte Abtheilung. Mit 3 Kupfertafeln.

Subſcript.-Preis 1 Rthlr. 8 ggr., Schreibpap. 1 Rthlr. 16 ggr.; Ladenpreis 1 Rthlr. 18 ggr., Schreibpapier 2 Rthlr. 4 ggr.

(Die zweite Abtheilung iſt unter der Preſſe.)

Dr. C. Ch. Hüter

Die dynamischen Geburtsstörungen,

ein Versuch zur rationellen Begründung der dynamischen Geburtshülfe.

In zwei Bänden; sauber broschirt. (VI und 570 Seiten.) 3 Rthlr.

ΕΖΕΚΙΗΛΟΣ ΚΑΙ ΦΙΛΩΝ.

Ezechiel

des jüdiſchen Trauerſpieldichters Auszug aus Egypten

und

Philo des Aeltern

Jeruſalem.

Nach ihren Fragmenten herausgegeben, überſetzt und commentirt von

L. M. Philippſon.

Sauber broſchirt. 12 ggr.

Ein und sechzig

Darstellungen aus der Mythologie der Griechen,

gezeichnet von

Ender, Lober, Schedy, Ruß und Rebl,

gestochen von

Franz Stöber;

nebst Erklärung in deutscher und französischer Sprache.

Soixante-une représentations etc.

Fol. Velinpapier. 20 Rthlr.

Unter der Presse befindet sich:

ΤΑΗ ΑΝΘΡΩΠΙΝΗ.

De internarum humani corporis partium cognitione

Aristotelis, cum Platonis sententiis comparata.

Philosophorum, qui ante Aristotelem floruere, antiquorum doctrina de sensu,

partim ex eorum reliquis monumentis educta, partim e

Theophrasti Eresii

libro *περὶ αἰσθήσεως καὶ περὶ αἰσθητῶν*, cum hujus libri textu denuo recognito,

prima conversione latina,

notis criticis et commentariis, et Theophrasti sententiis de

sensu, phantasia et intellectu e Prisciani Lydi paraphrasi primum excerptis.

Aristotelis doctrina de sensu.

Scripsit

Ludov. Philippson.

12 — 14 Bogen. gr. 8. Sauber cartonnirt.

1 Rthlr. 8 ggr. — 1 Rthlr. 12 ggr.

[redacted]

Bei demſelben Verleger ſind folgende Bücher ſtets vorräthig:

NB. Man iſt erbötig, den Schulanſtalten bei Abnahme größerer Parthieen einer oder der andern Schulausgabe bedeutende Vortheile zu bewilligen; von Privatperſonen aber brauchbare Werke der antiquariſchen und modernen Literatur in Change anzunehmen.

Aesopicae fabulae, graece, quae Maximo Planudi tribuuntur. Cum Hudsoni et Heusingeri notis et c. ind. Cura G. H. Schaefer. 1 Rthlr. 12 ggr.; charta belg. 2 Rthlr.; ch. pergam. 2⅔ Rthlr.

— — idem liber, in usum scholarum.....14 ggr.

Antonini Liberalis transformationum congeries. Cum notis Xylandri, Berkelii etc.....20 ggr.

— — idem liber, in usum scholarum 4 ggr.; ch. script. 8 ggr.

Archilochi reliquiae ed. Ign. Liebel 2 Rthlr. 12 ggr.; ch. script. 3 Rthlr. 8 ggr.; ch. memb. 4 Rthlr. 16 ggr.

Burmanni, P., antiquitatum roman. brevis descriptio. In usum scholarum ed. F. V. Reitz..... 8 ggr.

Ciceronis orationes selectae.....10 ggr.

Euripidis Hecuba ed. G. H. Schaefer 6 ggr.; ch. script. 9 ggr.

— — idem liber, in usum scholarum.....4 ggr.

— Hippolytus ed. idem.....12 ggr.; ch. script. 15 ggr.

— — idem liber, in usum scholarum.....5 ggr.

— Medea ed. Blümner.....6 ggr.

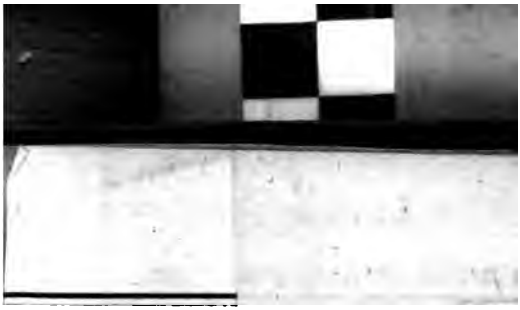
— Phoenissae ed. Martini.....6 ggr.

Grotii, Hugonis, de jure belli ac pacis. Cum notis etc. II Vol.....2 Rthlr. 16 ggr.; ch. script. 4 Rthlr.

Herodoti hist. lib. IX. ed. G. H. Schaefer. IV Ti. sonst 9 Rthlr., jetzt.....4½ Rthlr.

Longi pastoralia, gr. lat. c. notis ed. G. H. Schaefer. 2 Rthlr.; ch. pergam. 4 Rthlr.

Luciani opera, gr. lat. c. notis ed. J. P. Schmid. VIII
sonst 11 Rthlr. 8 ggr., jetzt.....5 Rthlr. 1
Phaedri fabb. Aesop. Cum commentario P. Burm
1 Rthlr.; ch. script. 1 Rthlr. 1
— — in usum scholarum ed. Adami.....
Philae carmina graeca, ed. Wernsdorff. 1 Rthlr. 1
Plinii naturalis historia, cum interpret. et notis in
Harduini etc. ed. .....17 Rthlr. 12
Publii Syri Mi esque sententiae, ed. atq
versus german. t e a Kremsier. 1 Rthlr. 1
Virgilii opera ed ger.....1 Rthlr. 6
— Bucolica et Ge 14
— opera c. fig. a a Bartolozzi, Fittler, N
et Sharp. II. ndini.....14 R



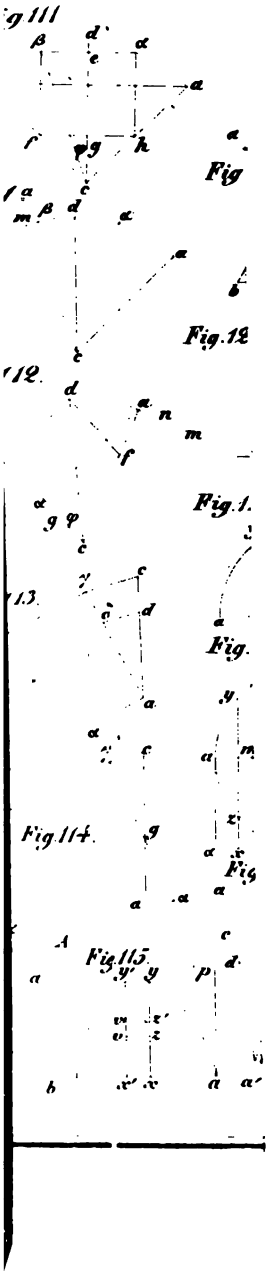
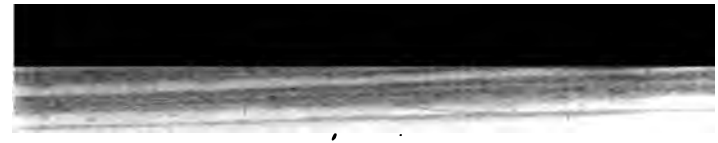


Fig 111
Fig
Fig.12
12.
Fig.1.
13.
Fig.
Fig 114.
Fig
Fig 115